

BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III

XXXIV

D

48

NAPOLI

XIV

D

18

22





GEOMETRIA INDIVISIBILIBVS CONTINVORVM

Noua quadam ratione promota.

A V T H O R E

P. BONAVENTVRA CAVALFRIO
M E D I O L A N E N.

*Ordinis S. Hieron. Olim in Almo Bononien. Archigym.
Prim. Mathematicarum Profess.*

In hac postrema editione ab erroribus expurgata.

Ad Illustriss. D. D.

MARTIVM VRSINVM
P E N N Æ M A R C H I O N E M & c.



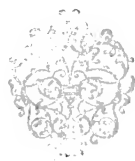
B O N O N I Æ, M. DC. LIII.

Ex Typographia de Ducijs.

Superiorum permissu.

THE
 UNIVERSITY OF
 THE SOUTH PACIFIC
 SINGAPORE
 MEMORANDUM
 OF THE
 PROCEEDINGS OF THE
 BOARD OF GOVERNORS
 HELD AT
 SINGAPORE
 ON THE 15th DAY OF
 APRIL 1960

UNIVERSITY OF THE SOUTH PACIFIC
 SINGAPORE



PRINTED AND BOUND BY
 THE UNIVERSITY OF THE SOUTH PACIFIC
 SINGAPORE



ILLVSTRISSIME

MARCHIO.



Litteris vsq; nascentibus, eos coluit semper honoribus Antiquitas, eosque non morituris obsequijs Posteritas venerabitur Heroas, quos vel cadentes disciplinas tollere, vel iniquis fortunæ casibus oppressos erigere sæpius conspexit; quare cum ego omni tempore, quantum in me fuit, studiosæ iuuentuti consulere cupierim, & presertim generosæ Nobilium propagini Mathematicas disciplinas adamanti, & iamdudum enixè postulanti, vt secundis typis præclarissima eruditissimi Caualerij Geometria mandaretur, illorum votis respondi, quippe dolentibus tam pretiosum opus, translatis

aliunde ab huius disciplinae cultoribus cunctis
ferè voluminibus, in Bononiensi solo lucem na-
ctum, tam subito nocte nancisci, nec posse de-
functi Auctoris mandata litteris Geometrica
schemata legere, quem viua voce in Archigy-
mnasio Bononiensi dictantem primum Pro-
fessorē silentes audierant; hinc est, Vir Genero-
sissime, quod ego praefatum opus iterum praelo
commisi, vt fecundissimus parens filios produ-
ceret, quos formosos, & sine mendis specta-
biles, omni adhibita diligentia, licet aspicere, ac
intueri; vnde solūm deerat, cui hos tenues meos
labores sacrarem, fortemque huic Geometrico
Cælo, forsan casuro, Atlantem inuenirem, cum
statim tui nominis fidei, inlyte Marti, ac tu-
telæ committere decreui; non enim maiori no-
mini, nobiliori Numini poteram hoc Nobili-
tatis opusculum dicare, cum natus sis ex nobi-
lissima Vrsinorum familia inter Romanas fa-
cilè prima; cuius fumosæ Imagines patentia
vndequaq; arctant Palatia, monstrantq; ni-
gricanti colore splendidissimam antiquissimę
gentis originem; & qui honorum gradus, qui
tituli inueniuntur, quos illa generosissimè non
subierit; quæ facta clarissima perleguntur, quę
ipsa non peregerit; ab illa, ob seruatos Ciues
cui.

ciueꝝ sunt Coronæ habitæ, ab illa obſeſſum
ab hoſtibus ſuam libertatem agnouit Capito-
lium; illa prudentiſſimos Patriæ Conſules;
ſapientiſſimos Romæ Senatores, ſpectatiſſi-
mos Vrbi Præfectos, Vigilantiſſimos Eccle-
ſiæ Vexilliferos peperit; nullus in tota Euro-
pa iacet angulus, in quo miranda Vrſinæ do-
mus non conſpiciantur monuméta; illam Italicę
orę, Hispaniarū Regna, Galliarum Prouincię,
remotiſſima Britanniæ Littora agnoſcunt; ab
illa domo initæ cum primoribus Regū Coro-
nis ſanguinis affinitates, potentiſſimaq; Germa-
nia ab illius nobiliſſimę familiæ germine Im-
perij Romani Electores vidit, quam inſignem
dignitatem ducentis quadraginta annis, & vl-
tra magna cum maiestate continuauit; inſi-
gnes titulorum honores, nām alios Comites,
alios Marchiones perlegetis; Barones alios,
Principes alios, Duces mirabimini; conſpicuę
dignitates, cum Baiului alij, S. Michaelis alij,
Rhodi alij eximij Equites fuerint; ſpectatiſſi-
ma curarum munia, cum ab illa familia ſuos
Cancellarios Sicilia, Priores Aquitania, Cam-
piductores Reſpublica Veneta, Patriarchas
Antiochia, Magnos Inſula Melitenſis habue-
rit Magiſtros; quid dicam de numeroſa ſegete

Epi-

Episcoporum, Archiepiscoporum, qui non tã subiectis sibi Ciuibus dicuntur præfuisse, quàm summa animi liberalitate, optimis vitæ moribus, præfuisse; quoties verò, & quot purpuratos Principes admirata est Roma, cui nil mirum solet accidere, ac vna totius Christiani orbis summa Capita est adorata; erubescerat illa domus eximios Terris Proceres produxisse, ni etiam Cœlis similes genuisset, fulgentibus inter illos Beatos spiritus summis martyrio Principibus; nec in procreandis fœminis voluit sterilis esse in Viris sæcundissima, cum enituerit miraculis Margherita Virgo, quæ Reginam Vrsinam, Vngariæ Regis Coniugem, suam agnoscens Parentem, sui generis nobilitatē cum animi sanctitate coniunxit; longior essem in recensenda tantę stirpis nobilitate, si historiam, non epistolam scriberem, & si illam, me tacente, saxa ipsa, ac monumenta illius celsitudinem non proclamarent; nam Venetijs equestris statua Nicolæ Vrsino ob seruatum ab obfidione Patauium videtur, testantur antiquissimi lapides à familia Vrsina adæquatum olim Capitolium fuisse reconditum, Tabularum leges fuisse seruatas, liberatam à Faliscis Republicam, resectos Pontes, Plebem placatam;

hic

hic in tuas laudes, Marchio inclyte, libentis-
mè descenderem, ni mihi silentium tua impo-
neret modestia; quæ mauult egregia facere,
quàm benèfacta palam audire; hoc tamen so-
lum dicam, te his virtutibus, quas in clarissimis
tuæ Domus dispersas Viris intellexisti, non de-
generasse, teq; vnum insignibus tum animi tum
Corporis dotibus tot hominibus respondere;
nam si animi celsitudinem spectas, quis te ma-
gnificentior, si liberalitatem; quis munificen-
tior, si in rebus peragendis dexteritatem, quis
te eruditior, tu enim, omitto cæteras artes, ac
scientias, quibus ab ineunte ætate cum maxi-
mo progressus censu operam impendisti; ma-
thematica theoremata calles optimè, tu loco-
rum distantias, disitas littorum regiones, Tellu-
ris, ac Pelagi mensuram apprimè cognoscis;
non tibi ignoti sunt ortus, & interitus syderum,
agnoscis qua parte Cœli serenitates, qua tem-
pestates sint futurę, nec te in immenso latentes
Oceano latent arenę; accipe igitur qualecunq;
hoc tuum munus, quod tibi libens, ac lubens
offero, tuæq; auctoritatis clypeo contra mali-
gni liuoris dentem tutor, ac pater defende, nec
doni tenuitatem, sed animum dantis plura da-
turi, si possent, conspice; oblatum à Mife gra-
tum

tum punicum malum ; ita Deus te diu. inco-
lumem seruet, vt ex Patriæ bono, Domus, ami-
corum in terris diu possis viuere, dū me tibi per-
petuum clientem polliceor, tuumque patroci-
nium hoc perenni in te animi mei monumen-
to summoperè exposco,

D. T. III.^{me.}

Additissim. Sernus
Carolus Manoleffius.

PRÆFATIO.



Neminem profecto mathematicarum demonstrationum dulcedinem, vel primoribus laboris vix attingisse puto, qui (non secus ac mellis in arbore latentis degustata parvulū suavitatem, innumera licet ferientibus certatim aculeis apium cæterua deglutentē Versum acervè arcerè possunt) summarum, qua illas committantur difficultatum copia crebris velut icibus obliſtente repulſus, ad satietatem vsq; eadem ubiq; perfundi totis viribus non conſendat. Talia tibi amice Lector, qui melleos hosce fructus depascere conſueſti, cuiſdam in Geometria res admiranda casu in me orta speculationis occasione, parta, huiusce dulcedinis amore flagranti, libanda propone. Cum ergo solidorum, qua ex revolutione circa axim oriuntur, generis atq; ando meditarer, rationemq; gignētium planarum figurarum cum generis solidis compararem, maxime sane admirabar quod à propriorum parētum conditione adeo nata figura degenerarent, ut aliam omninò ab eisdem rationem sequi viderentur. Cylindrus enim exempli gratia, in eadem basi, & circa eundem axim, cum cono constitutus, est eiusdem² tri-

^a plus, cum tamen ex parallelogrammo trianguli dictum conum generantis ^b duplo per revolutionem oriatur. Similiter si in eadē basi, & circa eundem axim, hemisphærium, vel hemisphæroides, necnon conoides parabolicum, atq; cylindrus, existerint, hic erit hemisphærij, vel hemisphæroidis sexquialter, conoidis verò ^c duplus, cum tamen gignens parallelogrammum dictum cylindrum ad inscriptum gignentem circulum, seu ellipsim, proximè rationē habeat, quam quatuordecim, ad undecim ad parabolā verò sit in ratione ^d sexquialtera. Quinimò & in planis figuris per revolutionē rectarum linearum circa punctum generis, quales sunt circuli, eandem varietatem licet experiri. Si enim plures circuli concentrici intelligantur expositi radios habentes ex. g. in proportione numerorum ab unitate deinceps expositorum, ipsi circuli non eandem radiorum proportionem conservabunt, sed eam, quā

10. Dnod.
Elcm.
b 41. Pri.
Elcm.

c Coro. 1
341. 5.
d Cor. 10.
51. l. 4.
e Arch.
de Div.
Cinc.
f Prop. 1.
l. 4.

b corum

g Cor. 1.
11. 3.

h Luc. Val
39. l. 1

l Idem 19.
l. 1.

K Idē 41.
l. 2.

l Arch. 8.
Se. 2. quep.

eoram 3 quadrata innicem habebunt. His verò perspectis cum ad planarum, ac solidarum figurarum quoq; gravitatum centra respicerem, similemque varietatem nactus essem, adhuc augebatur admiratio; in cono enim centrum gravitatis est in axe per quartam partem distant à basi, in triangulo verò ipsum gignente est in eodem axa, dictans ab eadem per tertiam partem eiusdem axis. Similiter in conoide parabolico illud est in axe per tertiam partem distant à basi, in parabola verò ipsum generante per duas tertias eiusdem axis remouetur ab ipsa basi. Cum ergo talem varietatem in plurimis alijs figuris sapius, ac sæpè suiszē meditatus, ubi prius ex. g. cylindrum ex indefinitis numero parallelogrammis, conum verò in eadem basi, & circa eundē axim cum cylindro constitutum, ex indefinitis numero triangulis per axem transfentibus veluti compactum effingens, habita dictorū planorum mutua ratione, illic & ipsorum solidorum ab ipsis genitorum emergere rationem existimabam, cum iam plane constaret planorum rationi genitorum ab iisdem solidorum rationem minimè concordare, figurarum mensuram tali ratione inquirentem oleum, & operam perdere, ac ex inanibus palcis trisuram facturum esse, mihi iure censendum videbatur. Verum paulò profundius rem contemplatus in hanc tandem deueni sententiam, nempe ad rem nostram lineas, & plana, non ad innicem consuetudentia, sed æquidistantia assumenda esse; sic enim in plurimis ratione inuestigata reperij tum corporum proportioni ipsorum planorum, tum planorum proportioni ipsarum linearum proportionem (sic modo sumantur, quo lib. 2. explicatur) ad amissum in omnibus respondere. Cylindrum igitur, & conum, iam dictos non amplius per axem sed æquidistanter basi ceu sectos cōtemplatus, eandem sanè rationem habere illa comperij, qua lib. 2. voco omnia plana cylindri ad omnia plana cono, & regula communi basi (nempe circularum congeriem, qua intra cylindrum, & conum, veluti vestigia plani à b asi ad oppositam basim continuo illi æquidistanter fluentis quodammodo relinquit intelliguntur) ei, quam habet cylindrus ad conum. Optimam ergo methodum figurarum scrutanda mensura iudicari prius linearum pro planis, & planorum pro solidis rationes indagare, ut illic ipsarum figurarum

m Def. 1.
Se 2. l. 2.

n. Def. 1. &
2. l. 2.

o Def. 1. &
1. l. 2.

mcu.

mensuram mihi compararem, res, puto, iuxta vota successit, ut
 perlegenti patebit. Artificio autem tali usus sum, quale ad pro-
 positas quaestiones ab solvendas Algebraici adhibere solent; qui
 quidem numerorum radices, quamvis ineffabiles, surdas, ac igno-
 ras, nihilominus simul aggregantes, subtrahentes, multiplican-
 tes, ac diuidentes, dummodo propositae rei expositam sibi notitiã
 enucleare valeant, sua satis obijisse munera sibi persuadent, Non
 aliter ipse ergo indiuersibilem sine linearum, sine planorum con-
 gerie (jisdem ut in lib. 2. explicatur assumptis) licet quoad eo-
 rundem numerum innominabili, surda, ac ignota, quoad ma-
 gnitudinem tamen conspicuis limitibus clausa, ad continuorum
 inuestigandam mensuram usus sum, ut legenti in processu ope-
 ris apparebit. Propositum mihi est autem Geometria in his se-
 ptem libris quamplurimum tam planarum, quam solidarum figu-
 rarum dimensionem adinuenire, quarum aliqua etiam ab alijs,
 ac praecipue ab Euclide, & Archimede pertractatae fuerunt, reli-
 qua vero nemini, quod sciam hucusque attentata; vno tamen ex-
 cepto Keplero, qui occasione Doli Austriaci per virgam mensu-
 riam dimetiendi, postquam in sua Stereometria Archimedea
 summarie ipsius Archimedis adinuenta sibi opportuna recensuit,
 nouis aliquando, qualescumque sint, adiectis rationibus, tandem
 eam partem superaddidit, quam Stereometria Archimedea sup-
 plementum nuncupauit, in qua multiplicem Sectionum conica-
 rum, Circuli nempe, Parabola, Hyperbola, & Ellipsis, necnon ea-
 rundem portionum circa duos axes reuolutionem contempla-
 tus, solida numero octuaginta septem, praeter quinque Archime-
 dea, Sphaeram scilicet, Conoides parabolicum, Conoides hyperbo-
 licum, Spheroides oblongum, & prolatum Geometris perquam
 eleganti praconio promulgauit. Cum ergo iam expositam me-
 tiendarum figurarum nouam, ac, si dicere fas sit, valde compen-
 diosam methodum adinuenissem, feliciter mecum actum esse exi-
 stimaui, ut haec solida, praeter illa Archimedea, mihi suppedita-
 rentur, circa quae illius vim ac energiam, experiri liceret. Ne
 quis tamen putet me omnium dictorum solidorum dimensionem
 fuisse consequutum, sicuti neq; Keplero contingere potuit, nisi
 paucorum, nec satis feliciter, ut praedictam Stereometriam, ac

p Keplero:
 Stereome-
 tria Dolic-
 rum.

supplementum perlegenti constare poterit : satis mihi fuit eorum aliqua certiori tamen, mi fallor ratione, inuestigare, qua circiter numero plusquam viginti ennumerari poterunt, precipue sibi Archimedea in numero computentur, quinque scilicet pro singulis quatuor Com sectionibus, & amplius alia quedam inferiori recedenda. Velenim reuolutio fit circa axem dictarum sectionum, & sic sunt solida Archimedea, ex circulo nempe Sphæra, ex parabola Conoides parabolicum, ex hyperbola hyperbolicum, & ex ellipsi spheroides oblongum, seu prolatum. Velenim reuolutio fit circa parallelam axi, extra figuram, sed minime eandem tangentem committam, & sic ex circulo fit Anulus latus circularis, ex parabola semianulus latus parabolicus, ex hyperbola hyperbolicus (hos Keplerus tanquam montis Actæa cavitatis similes Crateres vocat) & ex Ellipsi Anulus latus ellipticus, quem idem Keplerus, velut sero rusticarum puellarum similem, Anulam arduam appellat. Velenim reuolutio fit circa parallelam axi, ac figuram tangentem, & tunc ex circulo fit Anulus strictus circularis, ex parabola semianulus strictus parabolicus, ex hyperbola hyperbolicus, & tandem ex ellipsi, qui pariter Anulus strictus ellipticus nuncupatur. Denique reuolutione facta circa parallelam axi, secantemque figuram in duas portiones inequales, ex circulo portione maiori fit Malum roseum, ex minori Malum citrium. In ellipsi vero ex maiori Malum cotoneum, & ex minori fit Oliua. Ex parabola portione maiori fit Acerus maior parabolicus, ex minori Acerus minor: Ex hyperbola portione maiori fit Acerus maior hyperbolicus, ex minori Acerus minor. Hos autem Acerus minores parabolicos, & hyperbolicos, idem Keplerus cornibus rectis similes existimat, quorum alia sunt acuta, & alia obtusa, ut in pecudibus, quando primum, inquit, cornibus consueunt. Hac vero sunt solida numero viginti, quibus etiam Anulus strictus ellipticus altera parte latior, & Anulus latus ellipticus altera parte strictior, ad diuisione, quem Keplerus Tiara, seu Globo Turcico similem putat, necnon ea solida, qua ex sectionibus oppositis oriuntur, seu prafata videntur concommitantia. Hac inquam sunt, qua ex ennumeratis ab ipso excerptissimus examanda, à quo preter aliqua nomina nihil aliud à nobis

34. Cor. 14.

34. l. 3.

r Cor. 12.

51. l. 4.

i Cor. 16.

40. l. 2.

c Cor. 14.

34. l. 3.

u Cor. 13.

34. l. 3.

x Cor. 10.

51. l. 4.

y Cor. 15.

30. l. 5.

z Cor. 13

34. l. 3.

a Cor. 19.

34. l. 3.

b Cor. 20.

l. 2.

c Cor. 21.

51. l. 4.

d Cor. 24.

51. l. 4.

e Pa. abo-

hcis con-

formiter.

f Paraboli-

cis cofor-

miter.

g Cor. 18.

34. l. 3.

h Cor. 29.

34. l. 3.

i Cor. 11.

30. l. 5.

nobis desumptum est, ut inspicienti manifestum erit. Sciat verò
 lector nos præter dicta solida alia pariter quamplurima, quæ non
 sunt ex grege superius enumeratorum, etiam contemplari. Præ-
 cæteris autem maximam huiusce demonstrandi methodi univer-
 salitatem non resicebo, quod enim alij de una, vel saltem paucis
 solidorum speciebus, nos de infinitis continuò demonstramus, ne-
 dum enim hic ex. g. ostenditur ^K cylindrum coni, vel ^K prisma
 pyramidis, in ead. basi, & altitudine cum eo existens, triplū
 esse, sed quacumq; in basi variassime facta, qua nullo assignato
 numero coarctatur; solidum eidem insistent, quod cylindricum
 vocamus, esse triplum eius, quod in eadem basi, & altitudine
 cum eo constitutum, conicum appellamus; quorum quidem so-
 lidorū species numero indefinitas esse manifestò apparet: Ex hoc
 autē unico exemplo, tamquam ex ungue Leonem, dignoscet stu-
 diosus, quanto Geometricus ager per hac fertilior, & amplior fiat,
 hanc universalitatem namq; circa omnia penè solida à nobis hic
 considerata iugiter prosequemur. In primo igitur, & secundum
 Libro, ut plurimum lemmata proponuntur, qua ad sequentium
 librorum doctrinam capiendam necessaria videntur, licet in eis-
 dem plurima quoque suis sui gratia simpliciter demonstrata: In
 3. 4. & 5. Libro solida examinantur, qua ex conicis sectionibus
 suam genesim agnoscent. In 6. agitur de spatijs helicis, hac so-
 lidis ab eisdem genitis, problemataq; circa prædemonstrata con-
 struuntur. In septimo deniq; Lib. nostram infinitatis indivisibi-
 lium Oceanum emensam ratem, alia instituta methodo, in portū
 deducimus, ut in illius infinitatis scopulis periclitandi omnis tā-
 dem tollatur ambiguitas. Scio tamen hæc prima fronte leuiter
 perpendicularibus, quippe qua per iamdiū tritam Geometria sciti-
 tam haud fuerint inquisita, minus esse probanda; at qui nauseā
 vis stomachi tumentes status iniisio suppressentes ad extremam hui-
 us doctrina metam peruenire haud dedignabuntur, fortè super
 hæc minimè amplius nauseabunt. Ne quis igitur hanc rogo me-
 thodum prius damnare velit, quam hæc omnia puro mentis oculo,
 sinceròq; illius affectu fuerit perlustratus, hic enim tali ratio-
 ne demonstrata cum aliorum inuentis ad unguem concordare iu-
 giter animaduertet. Nemo autem hæc aggrediat, qui f. x. sa-

K 10. Duos
 Elem.
 Coro. 3.
 Quod. E. 16.
 m D. f. 3.
 l. 1.
 n Sect. 9.
 Cor. 4. 34.
 l. 2.
 o Def. 4. 1a

p Kepleri
C. 5 de mo
tu Martis.

tem priores Libros, & undecimum Elementorum non callueris, quod, in Apollonii, & Archimedis Operibus Lector pariter versatus fueris, facilius hac apprehendet, sin minus, quadam pauca, quae ab ipsis desumpta fuerit, poteris supponere. Quis verò videtur Com. de Motu Martis praefati Kepleri per has nostras speculationes planè intelliget, quam faciliè in dimensione plani elliptici posuerit ipse hallucinari, dum omnium distantiarum Planetæ à Sole, per ellipticam lineam circumuoluiti, mensuram putat equipollere plani elliptici mensura (quod est quoddam simile erroris, in quem initio praesentis speculationis & ipsa lapsus eram, putans coincidentia lineas, vel plana, proportionem planorum, seu solidorum, eandem conseruare) licet postmodum & ipse errorem proprium detegat, & quomodo possit illum emendare contemdat. His igitur rite consideratis, neminem fore existimo, qui hanc nouam methodum duxerit aspernendam, quin potius eandem velut auream clauem, qua summa arcis Geometria nonnullas hucusq; occlusas fores referantes, summis pulcherrimarum speculationum thesauris ditissimi fieri valeamus, albo adiecto calculo, postmodum fortè satis comprobabit



In huius Libri Autorem .

Exeris ecce nouos sapiens CAVALERIVS ausus
Archimedæa deficiente manu ;
Nempè geometricas ex umbris eruit artes ,
Quis metiare solum , quis metiare solum .
Egregium mirata VIRI decus , Ars stupet , indè
Sis ait , ergo meas exuperabis opes ?

Anonymus.

In Librum Geometriæ .

Dum noua peruoluis CAVALERI schemata , deque
Arte Geometrica prima trophæa refers ;
Applaudit dignis tibi Felsina laudibus , & quam
Suspici e ingenio , voce per astra uehit .
Hinc Archimedis sileant monumenta , reuixit
Esse Syracusÿ qui premis acta senis .

Co.Franc.Carolus Caprara Coll.Nob.Alum,

Ad Libri Auctorem .

Vera Geometria recte documenta recludis ,
Qua minus antiquis emicnere uiris .
Sufficis illius noua schemata scilicet artis ,
Percipis undè decus tu quoquè in orbe nouum .
Emensa spatium terra dumque exprimis ; indè
Arripis immensi limina summa Poli .

Petrus Franc.Coruinus Coll.Nob. Alum.

Ad Librum Geometriæ .

Optima si cupias cognoscere schemata Lector ,
Firma Geometrici percipe iura libri .
Acquoris , atquè soli disces spatia alma metiri ,
Ingenÿ miras arripesquè modos .
Felsina plaudis ouans , tantoquè superba triumpho ,
Gaudia non unquam deperitura ciet .

Co.Franc.Carolus Caprara Coll.Nob.Alum.

De

De Libro Geometriæ.

Exprimis egregiam nobis *CAVALERIVS*, artem
Ingenioquè refert abdita sensa nouo.
Huc veterum penitus cedunt monumenta virorum,
Vt longè meritis inferiora suis.

Co. Marcus Antonius Herculanus Coll. Nob. Alum.

De Libro Geometriæ.

Plena Geometricis sunt hæc monumenta figuris,
Quæ *BONAVENTURAE* condidit alma manus,
Ingenij vires, & suspice mentis acumen,
Quod merito æternum concelebrare licet.
Sola latere nequit *VIRTUS*: hæc sidera tranat,
Imaque despiciens limina, summa petiit.

Marcus à Cartis Coll. Nob. Alum.

Ad Autorem Libri Geometriæ.

Iam noua lux splendet, iam splendor prænitet omnis,
Arte Geometrica, dum noua iura refert.
Lux fuit Architas, lux Archimedis opusquè,
Lux ea sed tenebris consociata fuit;
Lux tua pellucet nulla caligine pressa,
Instar Apollinei sideris instar adest.

Petrus Franc. Coruinus Coll. Nob. Alum.

GEOMETRIÆ CAVALERII LIBER PRIMVS.

In quo præcipuè de sectionibus Cylindricorum, & Conicorum, nec non similibus figuris quadam elementaria præmittuntur; ac aliqua Propositiones lemmatica pro sequentibus Libris ostenduntur.

D I F I N I T I O N E S.

A. I.

A



VM duæ rectæ lineæ inuicem parallelæ aliquam tetigerint figuram planam cum illis in eodem plano constitutam, vnumquodq; punctum contactus illius vertex dicatur, & oppositi vertices puncta contactuum vtriusque dictarum tangentium parallelarum simul comparata; quilibet autem vertices semper intelligentur assumpti respectu cuiuscumque rectæ lineæ dictis tangentibus æquidistantis, quæ infra regula appellatur.

B.

B

Lineæ tangentes dicantur, oppositæ tangentes eiusdem figuræ respectu cuiuscumque rectæ lineæ eisdem tangentibus æquidistanter ductæ.

A

Cum

C.

CUm earum vnus contactus fuerit in linea, tunc linea contactus vocabitur basis eiusdem figuræ, respectu cuius poterunt dici vertices puncta contactuum alterius tangentis: vel si istius contactus pariter sit in linea, ambæ lineæ contactus, oppositæ bases, sumptæ respectu cuiuscumq; lineæ, cui sint æquidistantes.

A. II.

CUm plana inuicem parallela tetigerint aliquod solidum, vnumquodq; punctum contactus illius vertex dicatur; & oppositi vertices puncta contactuum vtriusque dictorum tangentium planorum simul comparata: quilibet autem vertices semper intelligantur assumpti respectu cuiuscumq; plani dictis tangentibus æquidistantis, quod infra regula pariter appellatur.

B.

Ipsæ tangentia plana dicantur, opposita tangentia plana eiusdem solidi, respectu dicti plani tangentibus æquidistantis assumpta.

C.

CUm dictorum tangentium contactus fuerit in plano, tunc vtriusuis tangentium planorum plana contactus bases dicantur, cuius respectu puncta contactus reliqui tangentis plani poterunt vertices appellari, & vtriusq; tangentium planorum contactus plana dicantur, oppositæ bases: cum verò vtriusque contactus fuerit in linea, oppositæ bases lineares ipsæ lineæ contactus vocabuntur.

D.

CUm figuræ planæ oppositis tangentibus vtriusq; ductis, & solidæ oppositis planis tangentibus, incidit perpendiculariter recta linea in eadem tangentia terminata, dicetur hæc altitudo propositæ figuræ planæ, vel solidæ, respectu dictorum tangentium, vel cuiuscumque eidem æquidistantis, assumpta.

Regula

Regula appellabitur in planis recta linea, cui quædam lineæ ducuntur æquidistantes, & in solidis, planum, cui quædam plana ducuntur æquidistantia, qualis in superioribus est recta linea, vel planum, cuius respectu sumuntur vertices, vel opposita tangentia, cui vel utraq; vel alterum tangentium æquidistat.

S C H O L I V M.

Hæc minimè discrepant ab his, quæ in Euclide, Archimede; & Apollonio, circa vertices, bases, altitudines, & tangentia, sine lineis, siue plana, assumuntur; cum, licet vniuersalius, idem, quod ipsi, declarent, vt ipsi, qui in supra dictorum auctorum operibus versati sunt innotescet facile, vnde sine scrupulo assumemus aliquando ex dictis auctoribus, quæ ex consimilibus definitionibus pendunt, illis commiscentes, prout opus fuerit, quæ ex his deducuntur.

III.

Exposita quacumque figura plana, & in eiusdem ambitu sumpto vt cumque puncto, ab eoque ad alteram eiusdem partium ducta quadam recta linea terminata, & super planum propositæ figuræ eleuata, si hæc per ambitum talis figuræ semper æquidistanter cuidam rectæ lineæ moueri intelligatur, donec omnem percurrerit ambitum, alterum eiusdem extremum punctum, quod non fertur per ambitum propositæ figuræ, describet circuitum planæ figuræ ipsi propositæ æquidistantis, vt probabitur. Solidum ergo, quod comprehenditur vtrisque figuris iam dictis, & superficie linea, quæ reuoluitur, descripta, dicetur: Cylindricus; superficies in reuolutione descripta, nec non quod libet illius frustum, superficies cylindracea: Cylindrici oppositæ bases dictæ figuræ planæ inter se æquidistantes; latus autem cylindrici, quæuis recta in superficie cylindracea oppositas bases pertingens, cui congruit in reuolutione;

6. huius.

A 2 ne ipsa

G E O M E T R I Æ

ne ipsa linea reuoluta ; & tandem regula lateris cylindrici dicitur illa, cui reuoluta semper manet æquidistans.

A. IV.

A

15. huius.

EXposita plana quacumq; figura; extra cuius planum ad utramuis eiusdem partium quodcūque sit assumptum punctum, si ab eo ad quoduis punctum illius ambitus recta linea ducatur, quæ indefinitè quoq; sit producta, & hæc per eiusdem ambitum moueatur donec ipsum totum percurrerit ambitum; sumptum punctum erit vertex solidi, quod comprehenditur superficie descripta à linea, quæ reuoluitur inter ambitum propositæ figuræ, & sumptum punctum clausa vertex, inquam sumptus respectu propositæ figuræ, ut probabitur. Tale solidum autem dicitur; Conicus, cuius basis proposita figura, & vertex dictum punctum; superficies descripta linea, quæ reuoluitur, & iacet inter ambitum propositæ figuræ, & dictum punctum, & quodlibet illius frustum dicitur; superficiei. Conicularis: illæ verò rectæ lineæ, quæ in eadem reperiuntur, quibus congruit reuoluta inter verticem, & ambitum basis conclusa, vocentur, latera eiusdem Conici.

C O R O L L A R I V M.

EX hac, & antecedenti d. finitione, petet cylindrum esse cylindricum, & conum esse conicum, eos scilicet, qui ab Apollonio, & Sereno definiuntur.

B

B.

Cylindrici recti dicentur, cum eorum latera fuerint ad rectos angulos basibus, scaleni verò, cum non fuerint ad rectos angulos eisdem: Conicorum verò, & cylindricorum frustra vocabuntur, quæ per plana basibus parallela (pro conicis versus ipsas bases) ab iisdem absinduatur.

V.

Axis, diameter, figuræ planæ, vel solidæ, ordinatim applicatæ ad easdem, lineæ, iuxta quas possunt, &c.

no-

nomina sectionum conicorum latera recta, seu transuersa, sumantur, prout ab Apollonio definiuntur, hoc tantum animaduerso, me in sequentibus aliquando abuti eisdem nominibus sectionum conicorum, Parabolæ. s. Hyperbolæ, Ellipsis, & oppositarum sectionum, spatia videlicet intelligens sub illis, & earum basibus, comprehensa, quod ex modo loquendi tunc euidenter cognoscitur. Cætera denique Apollonij, & quæ ab Archimede circa Sphæroides, & Conoides, definiuntur, nisi alia afferatur à me definitio, sumantur, prout ab ipsis usurpantur.

VI.

Figuram planam circa diametrum, vocat Apollonius 1. Conicorum, cum in ea ductis quouis lineis cuidam æquidistantibus, omnes bitariam à quadam recta linea diuiduntur, quam vocat diametrum, si eas oblique fecerit, & axem, si eas rectè diuidat, & ipsam figuram circa diametrum, vel axem.

Si ergo figura circa axem, reuoluatur circa eundem donec redeat, vnde discessit, descripta in tali reuolutione ab eadem solida figura dicatur: solidum rotundum, eiusdem verò axis, circa quem fit reuolutio.

VII.

Similes Cylindrici, & Conici dicantur, quorum bases sunt similes (iuxta definitionem 10. similium figurarum infra positam, subintellige, vel iuxta aliorum definitiones, quas cum prædictam concordare infra ostendemus) in quibus sumptis duabus homologis lineis, vel lateribus utcumque, & per ipsas, & latera extensis planis ipsa ad eandem partem equè ad bases inclinantur, horumque conceptæ in eisdem figuræ sunt similes, nempe similia parallelogramma in cylindricis, & similia triangula in conicis, quorum homologa latera sint sumptæ in basibus homologæ.

VIII.

Similes Sphæroides dicentur, quæ ex similium ellipsium reuolutione oriuntur.

Simi-

Similes portiones spherarum, vel spheroidum, & similes Conoides, siue Conoidum portiones appellabimus, quando per axes ductis planis ad rectos angulos basibus concepte in eisdem solidis figure similes erunt (iuxta definit. 10. Tubsequentem, vel etiam iuxta aliorum definitiones de similibus figuris planis allatas, subintellige) quarum, & basium communes sectiones sint homologe basium diametri, que vel circuli sint, vel similes ellipses.

S C H O L I V M.

Cetera definitiones ab Euclide similiarum planarum figurarum, & solidarum, & similiarum Cylindrorum, & Conorum, & que ab Apollonio lib. 6. Conicorum, referente Eutocio, sunt similiarum sectionum Coni portionum, sumuntur, & ab ipsis afferuntur, adiuncto tamen definitioni similiarum sectionum Coni portionum ibidem ab Apollonio allata, si pro spatij usurpetur quam infra dicitur.

A. X.

Similes figure plane in vniuersum vocentur, in quarum singulis opposite tangentes ita duci possunt, & in easdem tangentes ita incidere ad eundem angulum, ex eadem parte recte lineae in illis terminate, vt, si intra dictas oppositas tangentes eisdem æquidistantes vtrumque ducte fuerint recte lineae, eas, que incidunt dictis tangentibus, similiter ad eandem partem secantes; reperiamus harum parallelarum, nec non & oppositarum tangentium eas portiones, que inter dictas incidentes, & circuitus figurarum ad eandem partem sitae sunt, eodem ordine sumptas, eandem inter se rationem habere, quam rectae lineae, que dictis tangentibus inciderunt, & in easdem terminantur.

B.

Ipsae autem, que dictis tangentibus incidunt, & in eas terminantur, dicentur; Incidentes dictarum tangentium oppositarum, & figurarum.

QUæ verò dictis tangentibus oppositis æquidistant, & diuidunt productæ, si opus sit, similiter ad eandem partem ipsas incidentes, necnon oppositarum tangentium portiones, quæ in similibus figuris iam dictis reperiuntur, vocentur; homologæ earundem, sumptæ regula qualibet earum; dicantur autem lineæ homologæ, quæ sunt intra ambitum similiarum figurarum, quæ verò in ambitu, latera homologa. Ipsæ verò tangentes etiam, tangentes earundem homologarum.

D. IV.

D

CUM verò duæ similes figuræ planæ in eodem plano, vel in planis æquidistantibus ita positæ fuerint, ut earum, & oppositarum tangentium, quæ sunt regulæ homologarum earundem, incidentes vel sint superpositæ, vel sibi inuicem æquidistant, homologis earundem figurarum, & homologis partibus ipsarum incidentium, ad eandem partem constitutis, ipsæ figuræ similes dicantur etiam, inter se similiter positæ; siue à suis lineis, vel lateribus homologis similiter descriptæ.

E.

E

SI verò fuerint quocumque; & qualescumque figuræ planæ in eodem plano utcumque; dispositæ; fuerint autem aliæ tot numero figuræ in quouis plano, cum prædictis ita se habentes, ut binæ sint similes, & earum omnium lineæ homologæ duabus quibusdam sint æquidistantes: duæ verò oppositis tangentibus singularum similiarum figurarum, quæ sint parallelæ illis duabus, quibus homologæ earundem æquidistant, & reperiis incidentibus duarum ex dictis similibus figuris, & earum tangentium, illæ productæ fuerint usque ad extremas tangentes, reperiemus autem easdem à tangentibus similiarum figurarum similiter ad eandem partem diuidi, quarum portiones inter oppositas tangentes similiarum figurarum iacentes sint earundem oppositarum tangentium, & simi-

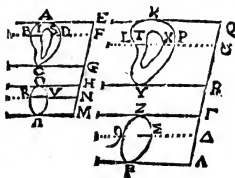
similium figurarum incidentes. Tales figuræ dicuntur binæ similes, & si niliter inter se positæ primò dictæ, ac secundo dictæ, & earum, ac extremarum tangentium etiam dicuntur incidentes, quæ in tangentium extreimas terminantur.

APPENDIX PRIOR

Pro explicatione Definit. 10. antecedentis.

Sint duæ figuræ plana. $ABCD$, $KLYP$, in quibus supponantur ductæ oppositæ tangentēs, AE , CG , in figura, $ABCD$, & KQ , YR , in fig. $KLYP$, quibus incident duæ rectæ lineæ, EG , QR , ad eundem angulum ex eadem parte, siue secent figuras, siue non, ductis autem utcumq; dictis tangentibus parallelis, BF , LC , quæ in punctis F , C , diuidant similiter ad eandem partem ipsas, EG , QR , & circuitus figurarum in punctis, B , I , S , D , L , T , X , P , reperiamus, DF , ad P & esse ut, EC , ad, QR , & ita esse, SF , ad, X & IF , ad, T & BF , ad LC , ita nempe, ut, quæ sunt ad eandem partem ipsarum, EG , QR , eodem ordine sumptæ sint, ut ipsæ, EG , QR , sic etiam tangentēs, AE , KQ , CG , YR , sint ut, FQ , CR , & sic cætera consimiliter sumptæ, tunc voco figuras, $ABCD$, $KLYP$ similes, & ipsas, EG , QR , incidentes similes figurarum, $ABCD$, $KLYP$, & oppositarum tangentium, AE , CG , KQ , YR ; ipsas, BI , SD , LT , XP , quæ clauduntur perimetri, figurarum, & diuidunt producta, si opus sit, ipsas, EG , QR , similiter ad eandem partem, voco, homologas earundem figurarum, quarum dictæ oppositæ tangentēs dicuntur tangentēs, siue regule.

Cum verò figura, $ABCD$, $KLYP$, fuerint in eodem plano, vel in pla-



A.D.f.10.

B.D.f.10.

C.D.f.10

In planis equidistantibus, ita constitutus, ut ipsa incidentes, EG , QR , sint vel superposita ad inuicem, vel parallela, & homologa, BI, SD, LT, XP , ad eandem partem ipsarum, EG, QR , & partes homologa incidentium (per dictas homologas, productas, si opus sit, similiter ad eandem partem diuisarum) faciunt pariter ad eandem partem constituta, tunc uoco figuras, ABC D. Def. 10.
 $D, KLYP$, nedum similes, sed etiam similiter positas.

Sint nunc quocumque figurae plana in eodem plano utcumque disposita, $ABCD, ORQV$, & alia tot numero in quouis plano, $KLYP, Z\theta\beta\Sigma$, quae bina sint similes, scilicet, $ABCD$, ipsi, C. Def. 9.
 $KLYP$, & $ORQV$, ipsi, $Z\theta\beta\Sigma$, quarum omnium homologa

duabus quibusdam reperiantur equidistantes, sint autem respectu ipsarum, quibus dicta homologa equidistant, ducta in figuris, $ABCD, KLYP$, oppositae tangentes, AE, CG, KQ, YR , B. Def. 8.
 & in figuris, $ORQV, Z\theta\beta\Sigma$, oppositae tangentes, $OH, \Omega M, Z\Gamma, \beta\Lambda$, quae tangentes erunt regula homologarum similium

figurarum iam dictarum; Sint deinde incidentes duarum ex dictis similibus figuris utcumque ut ipsarum, $ABCD, KLYP$, & oppositarum tangentium, AE, CG , ipsa, EG, QR , quae producantur usque ad extremitates tangentes, $SM, \beta\Lambda$, quibus inci- B. Def. 10.
 dant in punctis, M, Λ , reperiamus autem integras, EM, QA ,

similiter ad eandem partem secari tum à tangentibus, CG, YR , tum ab, $OH, Z\Gamma$, & insuper portiones, $HM, \Gamma\Lambda$, esse etiam incidentes oppositarum tangentium, $OH, \Omega M, Z\Gamma, \beta\Lambda$, & similium figurarum, $ORQV, Z\theta\beta\Sigma$, ueluti ipsa, EG, QR , sunt incidentes oppositarum tangentium, AE, CG, KQ, YR , & similium figurarum, $ABCD, KLYP$. Tunc igitur has figuras uoco binas similes, & unas, scilicet ipsas, $ABCD, ORQV$, similiter, ac alias inter se dispositas, idest ut ipsa, $KLYP, Z\theta\beta\Sigma$, & earum, ac extremarum tangentium, $AE, \Omega M, KQ, \beta\Lambda$, ipsas, EM, QA , uoco etiam incidentes.

A. XI.

Similes figurae solidae, vel similia solida, in uniuersum uocentur, in quorum singulis opposita plana tangentia ita duci possunt, & in eadem ita incidere ad eundem angulum ex eadem parte duo plana in iisdem terminata, ut si

B

dcia.

deinde inter eadem plana tangentia eisdem æquidistantia utcumque plana ducta fuerint, altitudines solidorum, respectu dictorum tangentium sumptas, similiter ad eandem partem diuidentia, reperiamus figuras ex his planis in dictis solidis conceptas esse similes, vel si plures producantur, tot numero in vno, quot in alio solido produci, quæ sint binæ similes, & quæ sunt vnus solidi similiter inter se dispositæ, ac quæ sunt alterius, & omnium homologas duabus quibusdam rectis lineis communiter, tamquam earumdem regulis, æquidistare. (sic n. earum homologæ cum quibusuis alijs duabus regulis angulos æquales cum prædictis facientibus, vt infra Prop. 23. huius ostendetur, etiam haberi poterunt) Vnde si regulæ homologarum accipiantur cum incidentibus planis concurrentes, & conceptarum in solidis similium figurarum ductæ in singulis oppositæ tangentibus præfatis regulis Parallele producantur, si opus sit, quousq; prædictis incidentibus planis occurrant, & binarum quarumcumque oppositarum tangentium puncta occursum iungantur rectis lineis, etiam has iungentes reperiamus singulas esse incidentes suarum similium figurarum, & oppositarum tangentium, ac omnes dictas incidentes concipi in figuris similibus, quarum, & ipsæ incidentes sint homologæ, & omnium regulæ communes sectiones planorum incidentium, & oppositorum planorum tangentium. His omnes, inquam, conditiones similia solida in vniuersum habere suppono.

B

B.

Ipsæ autem figuræ planæ similes, quæ capiunt omnes dictas incidentes, vocentur. Figuræ incidentes dictorum similium solidorum, & oppositorum tangentium iam ductorum.

C

C.

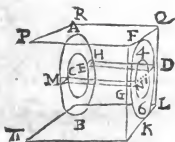
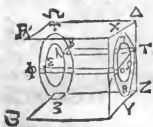
Figuræ verò ex planis dictis tangentibus Parallelis in eisdem solidis conceptæ, quotcumque sint, altitudines eorum eadem respectu dictorum tangentium sumptas similiter ad eandem partem diuidentes, quæ similes esse re-

pe-

perluntur, siue binæ similes, & vnæ, ac aliæ similiter inter se dispositæ, vocentur: Figuræ homologæ dictorum solidi A. P. Def. 10.
 lium solidorum, sumptæ regula vna ipsarum, vel oppositorum tangentium, quæ homologarum figurarum plana tangentiæ, si libeat, etiam vocentur.

APPENDIX POSTERIOR
 Pro declaratione Definit. 11.

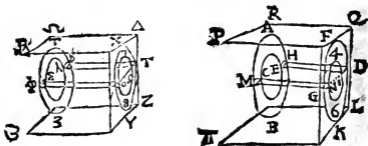
Sint solida, $\Gamma\beta\Phi$, $AHBM$, quorum sint opposita tangentiæ plana, $\Delta\Re$ $Z\zeta$, solidi, $\Gamma\beta\Phi$, ζ , ζP , $L\Pi$, solidi, $AHBM$, sint autem alia duo plana, qua istis incidant ad eundem angulum ex eadem parte, ΔY , ζK , illa nempe quorum, et dictorum tangentium sint communes sectiones, ΔX , Z B. Def. 2.



T , ζF , LK , secentur nunc dicta solida planis tangentibus parallelis, quæ diuidant eorum altitudines respectu duorum tangentium sumptas similiter ad eandem partem: Sint autem eorum in dictis solidis conceptæ figura plana similes, si vna in vno quoque solido figura producantur, vel si plures, binæ similes, et similiter inter se dispositæ, quæ sunt in vno, ac qua sunt in alio solido, ex. g. ipse, $\beta\Lambda$, $\Sigma\Phi$, HE , CM , quæ sint binæ similes, id est, $\beta\Lambda$, ipsi, HE , ζ , $\Sigma\Phi$, ipsi, CM , ζ , $\beta\Lambda$, $\Sigma\Phi$, similiter inter se dispositæ, ac ipse, HE , CM , quarum similium figurarum homologæ duabus quibuscumque regulis, ut ipsis, $\Re\Omega$, $P R$, aquidistant; vel si hæ non sint cum planis, ΔY , ζK , concurrentes, D. Def. 2.

B 2 aisas,

alias, $\Omega \Delta, R Q$, cum prædictis angulos æquales continentes, & $\Omega \Delta, P R Q$, pro regulis homologarum accipiemus, hoc .n. fieri posse demonstrabitur in Prop. 23. huius, quæ erunt cum planis, $\Delta T, QK$, concurrentes. Si ergo ducantur prædictarum similium



figurarum, $\beta \lambda, H E, \Sigma \Phi, C M$, opposita tangentes, parallele regulis, $\Omega \Delta, R Q$, ex.g. figura, $\beta \Delta$, opposita tangentes, $\beta T, A S, \&, H E$, ipse, $H D, E I, \&, \Sigma \Phi$, ipse, $\Sigma O, \Phi V, \&$ tandem ipsius, $C M$, ipse, $C N, M G$, qua producta si opus sit, occurrant planis, $\Delta T, QK$, in punctis, $T, S; O V; D, I; N, G$; iungantur autem, $T S, O V, D I, N G$, et ipse reperiantur esse incidentes similium figurarum, $\beta \lambda, H E, \Sigma \Phi, C M$, et dictarum oppositarum tangentium.

Consimiliter, sectis eisdem solidis alijs planis dictis planis tangentibus parallelis, altitudinisque dictas similiter ad eandem partem secantibus, semper conceptæ in solidis figurae sint similes, vel binæ similes, &c. & earumdem homologarum oppositæ tangentes parallele præfatis regulis, $\Omega \Delta, R Q$, sint productæ usque ad plana, $\Delta T, QK$; occurrantque illis in punctis, quæ si iungantur rectis lineis, ipse iungentes sint dictarum similium figurarum, & dictarum oppositarum tangentium semper incidentes, quæ omnes iaceant in planis, $\Delta T, QK$, per quarum extrema transeant lineæ, $X V Y T, F G K D$, et interius lineæ, $4 N 6 1, 7 0 8 5$, & contingat figuras, $X V Y T, F G K D$, esse similes, earumque homologas dictas incidentes, & ipsarum regulas esse communes sectiones planorum, in quibus iacent, & oppositorum planorum.

tangentium, idest ipsas, $X\Delta$, YZ , FQ , KL . His igitur
 positis, voco solida, $\Gamma\beta\gamma\Phi$, $AHBM$, similia; figuras vero, F A. Def. 11.
 GKD , $XVYT$; dico figuras incidentes similibus solidorum iam B. Def. 12.
 dictorum, et oppositorum tangentium planorum, $\beta\Delta$, γZ ; PQ ,
 ΠL ; ipsas autem figuras, $\beta\lambda$, $\Sigma\Phi$, HE , CM , et eas, quarum
 extensa plana similiter ad eandem partem dividunt altitudines
 solidorum, $\Gamma\beta\gamma\Phi$, $AHBM$, respectu dictorum tangentium
 planorum sumptas, & sunt similes, vel binæ similes, & similiter
 inter se disposita, voco figuras homologas dictorum solidorum, C. Def. 13.
 sumptas, regulis earum duabus, vel dictis tangentibus planis.

SCHOLIUM.

Aduertendum est autem pro similibus figurarum nominatione,
 dum voco eas similes figuras siue planas, siue solidas, me intel-
 ligere in eis definitiones generales superius allatas; dum vero eas
 particulari nomine appello, intelligere definitiones particulares pro
 ipsarum similitudine ab alijs, vel à me allatas, ut cum dicam, simi-
 les confectionum portiones, intelligam particularem in eis definitio-
 nem, & cum dicam (similia parallelogramma) intelligam in eis par-
 ticularem definitionem similibus rectilinearum figurarum, & sic in
 ceteris, licet utramq; definitionem tum particularem, tum genera-
 lem, de eisdem figuris verificari inferius ostendemus.

X I I.

Cum fuerint quotcumque magnitudines eiusdem ge-
 neris utcumque dispositæ, prima ad ultimam dicitur
 habere rationem compositam ex rationibus primæ ad se-
 cundam, secundæ ad tertiam, tertiæ ad quartam, & sic de-
 inceptus vsq; ad ultimam.

X I I I.

Cum vnum, & idem antecedens ad plura consequen-
 tia comparatum fuerit, singillatim ad vnumquodq;
 comparare idem ad eadem consequentia simul collecta, di-
 cemus, colligere, vel, colligendo.

Parallelogrammum dicitur expositę cuiusque planę figurę circumscriptum, si eius singula latera tangant dictam figuram, quę illi pariter dicitur inscripta.

X V.

Parallelepipedum dicitur exposito solido circumscriptum, si eius singula plana tangant dictum solidum, quod illi pariter dicitur inscriptum.

P O S T V L A T A

I.

Quamlibet rectam lineam indefinitę ita posse moueri, vt semper vni cuidam fixę sit parallela, siue in eodem, siue in pluribus planis, in tali motu existat.

I I.

Quodlibet planum indefinitę ita posse moueri, vt semper vni cuidam fixo sit æquidistans.

P R O B L E M A I. P R O P O S. I.

Cuiuslibet propositę figurę planę, vel solidę, verticem inuenire, respectu datę, pro figurę plana rectę lineę; pro solida verò, respectu dati plani.

A. Def. 2. Sit figura plana quęcumque, $A B C$, & in ea ducta recta linea, $B C$, oportet respectu ipsius, $B C$, verticem figurę, $A B C$, inuenire.

Sumatur in plano figurę, $A B C$, indefinitę producto, vtcumq; punctum, N , & per, N , ipsi, $B C$, ductatur parallela, $K V$, indefinitę hinc inde producta, vel igitur, $K V$, tangit figuram, $R A C$, & sic inuentum esset, quod quæritur, vel non; igitur erit, $K V$, vel intra, vel extra figuram, vbicumq; sit, moueatur, $K V$, semper manens in eiusdem figurę plano, & æquidistans ipsi, $B C$, recedendo ab eadem, $B C$, si intra figuram reperiebatur, vel accedendo, si erat extra, tandem n. con-

Postul. 1.



tin-

tinget figuram, ABC , contingat in situ ipsius, FG , & in puncto, A , igitur, A , erit vertex figuræ, ABC , respectu ipsius, BAC , à nobis inuentus, qui in huius Problematis priori parte inueniendus proponebatur.

Sit nunc figura solida, siue solidum, ADE , in quo respectu plani, $BEC D$, sit vertex inueniendus, sumpto igitur extra planum figuræ, utcumque puncto, N , per ipsum agatur planum, $KH V X$, ipsi, $BEC D$, æquidistans. quod vel continget solidum, BAC , vel non, si autem non contingat, moueatur accedendo, vel recedendo, à plano, $BEC D$, tandem igitur continget ipsum, tangat in, A , puncto, igitur punctum, A , erit vertex solidi, ADE , respectu plani, $BEC D$, qui inueniendus proponebatur.

COROLLARIUM.

Hinc manifestum est, si recta, BC , tangat planam figuram, ABC , quod ductæ erunt oppositæ tangentes ipsius figuræ, ABC , respectu datæ rectæ lineæ, quæ fuit vna ex eisdem tangentibus, nempe, BC ; & ita si figura, $BDC E$, tangit solidum, ADE , ductæ erunt oppositæ tangentia plana solidi, ADE , respectu plani, $BEC D$, in quibus puncta contactuum erunt oppositi vertex earundem figurarum, hoc pacto inuenti: Si verò recta lineæ, BC , secaret figuram, ABC , vel planum, $BEC D$, secaret solidum, ADE , eodem pacto ex alia parte lineæ, BC , vel plani, $BDC E$, inueniemus verticem, unde inuenti erunt oppositæ figuræ planæ oppositi vertex, & ductæ oppositæ tangentes respectu datæ lineæ, BC ; & in solido inuenti erunt oppositi vertex, & ductæ oppositæ tangentia plana respectu dati plani, $BDC E$, quæ cum tangunt in figuris planis, figuræ contactuum vocantur etiam oppositæ bases, & earum singulæ bases, & bases lineares, si contactus fieret in lineis: hinc ergo discimus inuenire oppositos vertex figuræ planæ, vel solidæ cuiuscumque, & eorum oppositæ tangentia ducere respectu datæ in figura plana rectæ lineæ, & dati plani pariter in solida figura.

PROBLEMA II. PROPOS. II.

Cvilibet figuræ planæ parallelogrammum circumscribere, cuius latera duabus datis rectis lineis, in oppositæ figuræ plano se secantibus, sint parallela.

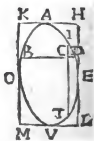
Sit

18 GEOMETRIÆ

Def. 14. Sit propofita quæcumque figura plana, $A O V E$, & in ipſius plano duæ rectæ lineæ, $B D, I T$, utcumq; ſe inuicem ſecantes

Cor. ant.

in puncto, C , oportet illi parallelogrammum circumſcribere, cuius latera rectis, $S D, I T$, ſint parallela. Ducantur ergo oppoſitæ tangentibus figuræ, $A O V E$, reſpectu ipſius, $I T$, quæ ſint, $K M, H L$, & aliæ duæ reſpectu ipſius, $B D$, quæ ſint, $K H, M L$, quæ cum prædictis concurrent, nam ſunt parallelae ipſis, $B D, I T$, quæ inuicem concurrunt, ſit ergo concurſus in punctis, K, M, L, H , igitur, $K L$, erit parallelogrammum, cuius ſingula latera tangent ambitum figuræ, ut in punctis, A, O, V, E , & ideo erit figuræ, $A O V E$, circumſcriptum, habens latera duabus datis rectis lineis, $B D, I T$, in figuræ, $A O V E$, plano ſe inuicem ſecantibus, parallela; quod efficitur, &c.



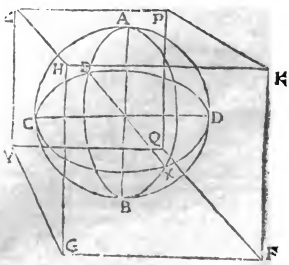
Def. 14.

in punctis, A, O, V, E , & ideo erit figuræ, $A O V E$, circumſcriptum, habens latera duabus datis rectis lineis, $B D, I T$, in figuræ, $A O V E$, plano ſe inuicem ſecantibus, parallela; quod efficitur, &c.

PROBLEMA III. PROPOS. III.

Cvilibet ſolido parallelepipedum circumſcribere, cuius plana oppoſita tribus datis planis, ſe inuicem ſecantibus, ſint parallela.

Sit ſolidum, $A C B D$, quodcumq; in quod tria plana, $A C B D, A B, C D$, ſe inuicem ſecent, quælibet duo, oportet ſolido, $A C B D$, parallelepipedum circumſcribere, cuius oppoſita plana prædictis planis ſint parallela. Ducatur duo plana oppoſita



Def. 15.

Coroll. 1. huius.

tangentia dictum ſolidum reſpectu cuiuſvis planorum ſe ſecantium,

tium, $ACBD$, AB , CD , & producantur donec sibi occurrant, occurrent autem, quia hæc planis se inuicem secantibus sunt parallela, & sit ab illis comprehentum solidum, ZF , erit igitur, ZF , parallelepipedum, cum eius opposita plana sint inuicem parallela, quæ tangunt solidum, $ACBD$, vt in punctis, A , C , B , D , E , X , & ided erit solido, $ACBD$, circumscriptum, habens plana opposita propositis planis se secantibus parallela; quod efficere opus erat.

Def. 15.

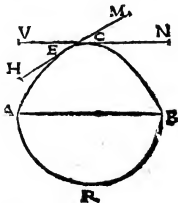
SCHOLIUM.

Potesť autem contingere in antecedentis Propos. figura ipsam esse parallelogrammum, & lineas rectas se secantes, quibus parallelogrammi circumscriptibilis latera debent esse parallela, esse ipsa parallelogrammi latera, in quo casu idem esset parallelogrammum circumscriptum, & cui circumscriberetur: Veluti hic etiam si solidum, $ACBD$, esset parallelepipedum, cuius oppositis planis, plana circumscriptibilis deberent esse parallela, tunc enim idem esset parallelepipedum circumscriptum, & cui circumscriberetur: Contactus autem in antecedenti potest etiam esse in linea, & in hac tum in linea, tum in planis, licet contactus, qui sit in punctis tantum expositus fuerit.

THEOREMA I. PROPOS. IV.

Data quacumq; figura plana, vel solida, & in plana data recta linea, in solida verò dato plano; quælibet linea, vel planum, quod indefinitè productum non tangat figuram dictam planam, vel solidam, in vertice sumpto respectu dictæ lineæ, vel plani, vel totum extra, vel aliquid eius intra figuram cadit, nempè figuram secat, si linea lineæ, vel planum plano æquidistet.

Sit data figura plana, $CARB$, & in ea recta, AB , sit vertex vnus respectu ipsius, AB , punctus, C , & sit recta, HM , parallela ipsi, AB , quæ etiam indefinitè producta non tangat figuram, $ARBC$, in, C , vertice. Dico, HM , vel totam extra figuram cadere, vel eandem secare. Neutrum efficiat si possibile est, igitur, HM , tanget figuram, $CARB$, & non in, C , igitur in alio puncto, vt in, E , igitur, E , erit vertex figuræ, $CARB$, respectu ipsius, AB , est etiam, C , vertex eiudem respectu eiusdem, AB , ergo si per, C ,



A. Def. 11. huius.

C

du.

Vide di-
sta lib. 7.
Annot.
Prop. 3.
Ex A. Dc-
fin. 1. hu-
jus.

ducamus rectam, VN , parallelam ipsi, AB , transibit hæc per punctum, E , qui est etiam vertex respectu ipsius, AB , igitur secabit, HM , quod est absurdum, nam utraque sunt parallelæ eidem, AB , & ideo inter se sunt parallelæ, vel, VN , extendetur super, HM , & sic, HM , transiret per, C , in ipso; tangeret figuram contra suppositum, quod etiam est absurdum, non igitur, HM , tanget figuram, $CARB$, sed erit tota extra figuram, si nullibi concurrat cum ambitu figuræ, vel, transiens per aliquem punctum, eandem secabit, si is punctus non sit ex illis, qui sunt vertices ipsius figuræ ex hac parte, vel ex opposito respectu ipsius, AB ; quod similiter in solidis ostendemus pro rectis lineis, AB , HM , VN , plana intelligentes, & ipsam, $CARB$, esse figuram solidam supponentes, quæ ostendere opus erat.

C O R O L L A R I V M I.

Hinc patet à quolibet puncto ambitus datæ figuræ planæ, vel solidæ ductam lineam, vel planum æquidistans illi, respectu cuius sumitur vertex (si sumptus punctus non sit unus ex verticalibus dictis) secare figuram, cum, ut ostensum est, tangens esse non possit, & ideo semper inter duo opposita tangentia, respectu regulæ, penes quam sumitur vertex, assumpta linea cadet, licet indefinite producatur.

C O R O L L A R I V M I I.

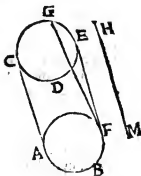
ET quia si recta linea, vel planum, secat duas parallelas, vel duo æquidistantia plana, secat etiam omnia intermedia illis æquidistantia; ideo si recta linea, vel planum, transeat per verticem, & basim, siue per oppositos vertices datæ figuræ planæ, vel solidæ, secabit etiam omnes in figura oppositis tangentibus æquidistantes intra figuram, vel eandem productas extra figuram.

T H E O R E M A I I. P R O P O S. V.

Defin. 3.
SI à quocumque puncto circuitus cylindrici, per quam sit reuolutio versus cylindricum ducta fuerit recta linea parallelæ regulæ lateris cylindrici, hæc erit latus cylindrici in tali basi constituti.

Sit cylindricus, CB , in basi, AFB , in cuius circuitu sumpto utcumq; puncto, F , ab eo ducta sit versus cylindricum quædam parallelæ

lela ipsi, HM , quæ sit regula lateris cylindrici. Dico eam esse latus huius cylindrici: Intelligatur per punctum, F , ductum latus cylindrici, quod sit, FE , vel igitur ducta ab, F , parallela ipsi, HM , cadit super, FE , & sic erit, & ipsa latus cylindrici, vel non, nempe si caderet, vt, FG , tunc quia, FE , est parallela ipsi, HM , & etiam, FG , est ipsi, HM , parallela sequitur, FE , ipsi, FG , esse parallelam, & sunt FE , FG , eductæ ab eodem puncto, F , in quo sunt concurrentes, quod est absurdum, igitur quæ ducitur à puncto, F , parallela ipsi, HM , cadet super, FE , latus cylindrici, igitur erit latus huius cylindrici, quod erat ostendendum.



THEOREMA III. PROPOS. VI.

Superficies, quæ clauditur ambitu descripto ab extremo puncto lateris cylindrici, quod per circuitum eiusdem basis non properat, est superficies plana, & æquidistans basi; si ea sumatur, in qua iacent iungentes duo quæuis puncta descripti ambitus.

Sit quilibet cylindricus, AE , cuius basis, $CDEV$, latus, MV , cuius punctum extremum, M , quod non properat per ambitum basis, in reuolutione deferibat circuitum, $MANH$. Dico figuram hoc circuitu comprehensam, in qua iacent iungentes duo quæuis puncta descripti ambitus esse superficiem planam, æquidistantem basi, $CDEV$, & ideo singula puncta huius circuitus reperiri in tali plano. Sumatur ergo in tali circuitu utcumq; punctum, M , & per, M , ducatur basi, CE , æquidistans planum, $MBOF$. Dico omnia puncta descripti circuitus esse in hoc, plano: si enim non sint, aliquod erit extra, sit hoc punctum, N , & per, N , sit ductum latus cylindrici, quod sit, ND , secans circuitum figuræ planæ, BF , in, O , & circuitum basis in, D , deinde per, N , D , MV , quæ sunt æquidistantes, cum sint cylindrici latera, exten-



16. Vnde.
cimi Ele.

datur planum, quod basi n secet in recta, $D V$, figuram planam, $M B O F$, in recta, $O M$, & iungantur, $M N$, puncta, quia ergo plana parallela, $B F$, $C E$, secantur plano quodam, communes eorum sectiones, nempe, $O M$, $D V$, erunt inuicem parallelae, sed etiam, $O D$, $M V$, sunt parallelae, ergo, $O V$, erit parallelogrammum, &, $O D$, æqualis ipsi, $M V$, est autem, $M V$, æqualis ipsi, $N D$, quia ambo sunt latera eiusdem cylindrici, ergo, $D O$, æqualis erit ipsi, $D N$, pars toti, quod est absurdum, non igitur aliquod punctum circuitus descripti à puncto, M , est extra planum æquidistans basi, $C E$, igitur omnia sunt in tali plano, iuncta igitur, $N M$, ipsa erit in eodem cum illis plano, in quo pariter iacebunt duo quævis puncta iungentes eiusdem circuitus, & idè figura tali ambitu contenta est superficies plana ipsi basi, $C E$, æquidistans, quod erat ostendendum: istæ autem vocantur cylindrici oppositæ bases.

C O R O L L A R I V M.

Quoniam vero supposito ipsam, $M B O F$, esse superficiem planam, basi æquidistantem, & ducto per latera, $O D$, $M V$, plano ostendimus, $D V$, esse parallelogrammum, idè cum sciamus, $M A N H$, esse superficiem planam basi, $C E$, æquidistantem, ducto per latera utcumque plano cylindricum secante, ostendemus eodem pacto, ducti plani secantis in cylindrico conceptam figuram esse parallelogrammum, cum scilicet planum ducitur tantum per duo latera, vel parallelogramma, cum per plura duobus, ipsum in eorum aliquo non tangens.

Defin. 3.

T H E O R E M A I V. P R O P O S. V I I.

Si cylindricus secetur, vel tangatur à duobus planis per eiusdem latera ductis, quæ non sint inter se parallela, sint autem illa producta donec sibi occurrant, communis eorum sectio erit eiusdem cylindrici lateribus parallela.

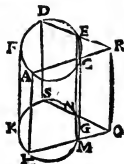
Coro. an
seced.

Sit quilibet cylindricus, $F G$, per cuius latera sint ducta duo plana non parallela, quæ ita sint producta, donec sibi occurrant, sint autem illa plana, $A M$, $D N$, quorum, & oppositarum basium cylindrici, $F G$, communes sectiones, $A C$, $H M$, $D E$, $S N$, erunt igitur, $A M$, $D N$, parallelogramma, intelligantur oppositarum basium, $F L$, $G K$, indefinitè productarum plana secari à planis dictorum parallelogrammorum pariter indefinitè productis, in rectis, $A R$, $D R$, $H O$, $S O$, & eadem se inuicem secare in recta, $R O$.

Di.

Dico, RO , esse parallelam lateri cylindrici, FG . Iungantur, CE , MN , quoniam ergo, CE , MN , coniungunt extrema laterum cylindrici, CM , EN , quæ sunt æqualia, & parallela, erunt & ipsæ æquales, & parallelæ, sunt etiam parallelæ ipsæ, CR , MO , ergo angulus, ECR , erit æqualis angulo, NMO , eodem pacto ostendendus angulum, $CE R$, esse æqualem angulo, MNO , unde etiam, CR , MO , erunt æquales, & sunt parallelæ, ergo eas iungentes, quæ sunt, RO , CM , erunt æquales, & parallelæ, est autem, CM , latus cylindrici, FG , ergo, RO , communis sectio duorum planorum dictum cylindricum secantium, erit eiusdem lateribus

33.p.Primi Elem. p.16. Undec. Elem. 10. Undecimi Ele.



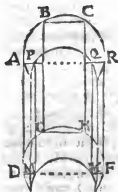
26. Primi Elem.

parallela. Idem ostendemus, si sectio contingat fieri intra cylindricum, si autem fiat in superficie, patet non posse fieri, nisi in latere cylindrici, nam plana secantia ducuntur per latera, quodlibet autem latus est ceteris eiusdem cylindrici lateribus æquidistans, & ideo ubicumq; contingat sectionem fieri semper communis sectio planorum per latera cylindrici ductorum se inuicem secantium, est parallela lateribus cylindrici. Idem sequetur de tangentibus planis, quod erat ostendendum.

THEOREMA V. PROPOS. VIII.

SI quilibet cylindricus secetur planis parallelis per latera ductis, conceptæ in cylindrico figuræ erunt parallelogramma æquiangula.

Sit quilibet cylindricus, BF , planis sectus parallelis per latera ductis, sit autem vnus in cylindrico, AF , concepta figura parallelogrammum, BH , alterius autem parallelogramma, AN , OF . Dico hæc esse æquiangula, quod enim sint parallelogramma, patet, quia plana secantia ducuntur per latera, quod verò sint æquiangula patet etiam, nam in parallelogrammo, AN , latus, AD , æquidistat lateri, BO , & AP , ipsi, BC , nam sunt communes sectiones plani, $ABCR$, & æquidistantium planorum, AN , BH , & ideo angulus, PAD , æquat angulo, CBO , ergo parallelogramma, AN , BH , erunt equi-



Ex Cor. 6. huius.

10. Undecimi Ele.

angu-

angula, eodem pacto ostendemus parallelogramma, QF , BH , esse æquiangula, unde concludetur etiam parallelogramma, AN , QF , esse inter se æquiangula, quod ostendere opus erat.

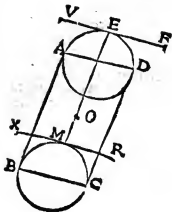
C O R O L L A R I V M.

SI autem intelligamus oppositarum basium cylindrici, AF , ita producta plana, ut secentur à plano per latera, AD , PN , QM , RF , ducto in rectis, AR , DF , quarum portiones ex ra cylindricum manentes sint, PQ , NM , manifestum est etiam parallelogrammum, PM , quod extra cylindricum constituitur, & quod integratur ex parallelogrammis, AN , PM , QF , i. AF , esse predictis æquiangulum.

THEOREMA VI. PROPOS. IX.

SI planum æquidistans plano per latera cylindrici ducto tangat cylindricum, contactus fiet in recta linea, vel rectis lineis, quæ erunt latera eiusdem cylindrici: Vel si tangat in plano, aut planis, plana contactus erunt parallelogramma, æquiangula per latera ducto.

Sit cylindricus, AC , per cuius latera ducatur planum in eo producens parallelogrammum, AC , sit autem ductum aliud planum huic æquidistans, quod tangat cylindricum, AC . Dico eiusdem contactum fieri in recta linea, vel rectis lineis, quæ erunt latera cylindrici, AC , vel si tangat in plano, aut planis, plana contactus esse parallelogramma, æquiangula ipsi, AC . Primò igitur non tangat ipsum in plano, quia ergo tangit cylindricum, aliquid superficiei cylindrici commune est ipsi, & plano tangenti, sit is punctus, O , existens, & in plano tangente, & in superficie cylindracea, & per, O , sit ductum latus cylindrici, quod sit, EM . Dico totum, EM , reperiri in plano tangente cylindricum in, O , æquidistante ipsi, AC . Ducatur per, M , ipsi, BC , parallela, XR , quia ergo, XR , æquidistat ipsi, BC , & EM , ipsi, AB , vel,



vel, DC , planum per, EM , XR , ductum æquidistabit plauo, AC , est autem planum, quod tangit cylindricum in, O , æquidistans plano, AC , & transit per idem punctum, O , per quod transit planum per, EM , XR , ductum, ergo illa duo plana fiunt vnum planum, iacet autem, EM , in plano per, EM , XR , ducto, ergo iacet etiam in plano æquidistante ipsi, AC , & cylindricum, AC , tangente, igitur tangit cylindricum in recta, EM . Eodem pacto si in alio puncto extra, EM , in superficie cylindracea sumpto tangeret cylindricum, AC , ostenderemus tangere ipsum in latere, quod per tale punctum transiret; in quo casu tangeret cylindricum in lateribus vno pluribus, vt contingere potest. Tangat autem secundo ipsum in plano, igitur in eo plano sumpto vtcunque puncto, tanget cylindricum in latere transeunte per tale punctum, igitur planum contactus tale est, vt in eo omnes ductæ rectæ lineæ æquidistantes ipsi, EM , sint latera cylindrici, AC , & subinde eidem, EM , æqualia, vnde superficies, in qua iacent erit parallelogrammum, igitur planum contactus in hoc casu erit parallelogrammum, & erit æquiangulum parallelogrammo, AC , nam eius latera sunt parallela lateribus parallelogrammi, AC , & ideo continent angulos æquales contentis à lateribus parallelogrammi, AC , vnde talia parallelogramma sunt æquiangula, igitur contactus plani æquidistantis plano per latera cylindrici ducto, vel fit in latere, aut lateribus contacti cylindrici, vel in parallelogrammo, siue parallelogrammis, in eiusdem superficie iacentibus, & æquiangulis ei, quod fit a plano per latera ducto, quod ostendendum erat.

C O R O L L A R I V M.

Hinc habetur communes sectiones plani tangentis, & cylindrici oppositarum basium productorum planorum, quæ sint, VE , XR , esse inter se parallelas, & tangere easdem bases; scilicet, VF , ipsam basim, EAD , & XR , ipsam, ABC .

THEOREMA VII. PROPOS. X.

SI cylindricus quomodocumque secetur per latera, diuiditur in cylindricos à secantibus planis, si autem secetur planis omnibus eiusdem lateribus coincidentibus inter se parallelis; solidum compræhensum conceptis in cylindrico figuris, & inclusa superficie cylindracea, erit cylindricus.

Sit

Sit cylindricus, $A E$, sectus à planis quomodocumque per latera. Dico per eadem diuidi in cylindricos; sint autem secantia plana, quæ in cylindrico, $A E$, producant parallelogramma, $A E, M E$. Quia igitur, $A E$, est parallelogrammum, si in ipso ducantur rectæ lineæ ipsi, $A D, H E$, parallelæ, & in, $A H, D E$, terminatæ, erunt eisdem, $A D, H E$, æquales, & subinde erunt æquales, & parallelæ regulæ lateris cylindrici, $A E$, vnde erit, $A E$, superficies cylindracea descripta latere, $A D$, siue latere cylindrici, $A E$, ergo solidum, $A R X E$, erit cylindricus. Eodem pacto ostendemus solida, $A M H D V E, M Z H V I E$, esse cylindricos, talibus igitur planis cylindricus, $A E$, semper diuiditur in cylindricos, quæ est prior pars huius Theorematis.

Secetur nunc duobus planis vtrumque inter se parallelis coincidentibus cum omnibus eiusdem lateribus, quæ in cylindrico, $A E$, producant figuras, $B N G K, C O F L$. Dico solidum compræhensum inter has figuras, & ijs inclusam superficiem cylindraceam, esse cylindricum. Sint adhuc plana per latera cylindrici, $A E$, vtrumque ducta, $A E, M E$, quæ secent figuras, $B N G K, C O F L$, in rectis, $B G, C F, N G, O F$, igitur eiusdem plani, & ipsarum, $B N G K, C O F L$, communes sectiones erunt parallelæ, quæ sint, $B G, C F$, sicut etiam ipsæ, $N G, O F$, sunt autem parallelæ etiam ipsæ, $B C, N O, G F$, ergo, $B F, N F$, erunt parallelogramma, & latera eorundem, $B C, G F, N O$, inter se æqualia, & æquidistantia; si igitur eorum quoduis, vt, $G F$, statuatur pro regula lateris cylindrici, superficies inclusa duabus figuris, $B N G K, C O F L$, erit descripta vno latere, $B C$, vel, $N O$, properante per circuitum figuræ, $C O F L$, semper ipsi, $G F$, æquidistante, donec redeat vnde discessit, igitur hæc erit superficies cylindracea, cuius oppositæ bases ipsæ figuræ, $B N G K, C O F L$, & solidum eiusdem inclusum erit cylindricus, quod erat posterior pars huius Theorematis à nobis demonstranda.



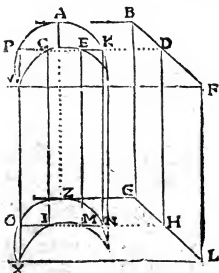
THEOREMA VIII. PROPOS. XI.

Cuius cylindrici oppositæ bases sunt similes, æquales, & similiter positæ.

Sit cylindricus, $P N$, cuius oppositæ bases, $A P K, O Z N$. Dico eas esse similes, æquales, & similiter positas. Ducantur vtrumque duo

duo plana opposita tangencia cylindricum, PN, parallela cuidam Coroll. 1.
huius.
per latera transeunti, quorum, & oppositarum basium productarum
communes sectiones sint ex vna parte ipsæ, VF, XL, ex alia verò,
AB, ZG, quæ tangent vel in latere, siue lateribus, vt in, VX, AZ, 9. Huius.
vel in planis, quæ erunt parallelogramma, sint autem dicta plana, &
communes sectiones, indefinitè producta, & in qualibet dictarum
communium sectionum, vt

in, AB, sumpto vtcumque
puncto, B, ducatur vsque
ad oppositam tangentem
vtcumque in earum plano
recta, BF, illi incidens in,
F, & per, B, ducatur in pla-
no tangente ipsa, BG, pa-
rallela vni laterum cylin-
drici, PN, per ipsas autem,
FB, BG, intelligatur ex-
tensum planum, quod fec-
et aliud planum tangens
in recta, FL, & planum
per, ZG, XL, ductum in
recta, GL, erunt igitur ipse,
BE, GL, parallelæ, vt &
ipsæ, BG, FL, & erit, FG,
parallelogrammum. Duc-
tatur nunc intra dicta op-



posita tangencia plana eisdem equidistans planum, quod erit ductum
per latera, cylindricumque, PN, secabit, sit ductum per latera, P Ex Lem.
seq.
O, CI, EM, KN, & productum secet planum, FG, in recta, D
H, & planum, quod transit per, AB, VF, in recta, PD, & quod
transit per, ZG, XL, in recta, OH: erit ergo, DH, parallela
ipsi, BG, & BG, est parallela vni laterum cylindrici, ergo & D
H, erit parallela ipsi, KN, EM, CI, PO, & erunt ipsa, PI, CM,
EN, KH, FH, DG, parallelogramma, & eorum latera oppo-
sita inter se equalia, nempe, PD, ipsi, LH, & DB, ipsi, HG, D
K, ipsi, HN, DE, ipsi, HM, DC, ipsi, HI, & DP, ipsi, H
O, sunt igitur ipsæ, BF, GL, ductæ inter oppositas tangentes fi-
gurarum, APK, ZON, ad eundem angulum ex eadem parte,
quia angulus, BFV, est æqualis angulo, GLX, nam, BF, est pa-
rallela ipsi, GL, & FV, ipsi, LX, & sunt ipsæ, BF, GL, simili- 10. Vnde
cimi Ele.
ter ad eandem partem diuisæ in punctis, D, H, per rectas, PD, O
H, parallelas ipsi oppositis tangentibus, quæ cum sint vtcumque
du-

D

du-

ductæ, reperitur tamen earundem portiones, quæ iacent inter ipsas, GL , BF , ex eadem parte, eodem ordine sumptas, esse, ut ipsas, BF , GL , nam quia, DK , est æqualis ipsi, HN , &, BF , ipsi, GL , ut, BF , ad, GL , ita est, DK , ad, HN , & ita esse ostendimus, DE , ad, HM , DC , ad, HI , &, DP , ad, HO , nam istæ sunt æquales. Idem demonstrabitur in cæteris, quæ similiter ad eandem partem diuidunt ipsas, BF , GL , igitur figuræ, APK , ZON , sunt similes: Et quia earum homologæ, tum, PC , OI , tum, EK , MN , sunt æquales, quod etiam de cæteris ostendetur eodem pacto, sunt enim semper parallelogrammorum opposita latera, ideo figuræ, APK , ZON , nedum erunt similes, sed etiam æquales, & regulæ homologarum erunt ipsæ oppositæ tangentes, & ipsæ, BF , GL , earum incidentes. Quia verò figuræ, APK , ZON , sunt in planis æquidistantibus ita constitutæ, ut earum incidentes sint parallelæ, & homologæ figurarum, ZON , APK , sunt ad eandem partem incidentium positæ, & item homologæ partes incidentium, BF , GL , ut ipsæ, BD , GH , sunt ad eandem partem pariter constitutæ, ideo figuræ, APK , ZON , nedum erunt similes, & æquales, sed etiam similiter positæ, quod ostendere opus erat.

Def. 10.

Aequales homologas argue re æquales similes figuræ, & contra, patebit infra in Cor. 25. huius, ubi hac inde pendet. D. B. fia. 10.

C O R O L L A R I V M.

Manifestum est autem, quia plana opposita tangentia cylindrici, PN , ducta sunt utcumque, & eorum, & oppositarum basium productarum communes sectiones sunt regulæ homologarum earundem, quod si duxerimus duo alia opposita tangentia plana, habebimus etiam earundem figurarum homologas, regulis adhuc communibus sectionibus horum tangentium planorum postremò ductorum, & earundem basium productarum, quæ communes sectiones cum primò ductis angulos æquales continebunt, nam quæ existent ex. gr. in plano figuræ, APK , erunt parallela existentibus in plano figuræ, ZON , igitur in oppositis cylindricorum basibus homologas habebimus etiam cum quibusvis rectis lineis æquales angulos cum duabus quibusvis homologarum earundem inuentis regulis continentibus, quæ igitur cum regulis homologarum oppositarum basium cylindrici angulos ad eandem partem continent æquales, sunt & ipsæ homologarum earundem regulæ, necnon earundem oppositarum basium, & oppositarum tangentium aequè ad prædictas inclinatarum, etiam incidentes licebit, ut supra, inuenire.

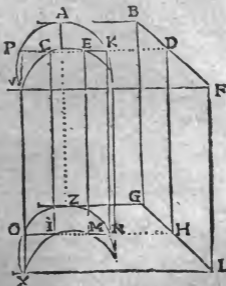
10. Vnde. cimi Ele.

LEMMA PRO ANTECED. PROP.

Desiderari tantum videtur huius euidencia, quod scilicet planum inter opposita tangencia plana eidem æquidistanter ductum transeat per latera cylindrici, quod assumpta eiusdem figura nunc fiet manifestum; intelligatur ergo in ambitu vtriusuis

oppositarum basium cylindrici, $P N$, sumptum punctum, vt, O , in ambitu figuræ, $Z O N$. Dico planum, quod transit per, O , æquidistans planis tangentibus, $A G, V L$, transire per latera cylindrici, $P N$. Ducatur ergo à puncto, O , latus cylindrici, $P O$, & ab eodem puncto, O , in basi, $Z O N$, recta, $O N$, parallela ipsi, $X L$, igitur planum, quod transit per, $P O, O N$, æquidistat plano, $V L$, nam, $P O$, ipsi, $V X$, lateri cylindrici, & $O N$, ipsi, $X L$, æquidistat, quod

ergo ducitur per, O , eidem plano tangenti æquidistans transit per ipsas, $P O, O N$, si. n. non, erunt duo plana eidem plano, $V L$, æquidistantia, & ideo inter se æquidistantia, quibus communis erit punctus, O , igitur in eo concurrent, quod est absurdum, non ergo illa sunt duo plana, sed vnum tantum, illud nempe, quod ducitur per punctum, O , ipsi plano, $V L$, æquidistans, transitque per, $P O, O N$, necessariò: Si verò à punctis, I, M, N , erigantur latera cylindrici, $C I, M E, N K$, erunt cuncta in plano per, $P O, O N$, transeunte, ergo planum, quod ducitur per punctum, O , æquidistans plano, $V L$, cylindricum tangenti transit per latera, $P O, C I, E M, K N$, quod ostendendum erat.



15. Vnde
cimi Ele.

THEOREMA IX. PROPOS. XII.

Si cylindricus planis secetur quomodocumque per latera ductis, eiusdem oppositæ bases in figuras similes, æquales, & similiter positas diuiduntur, tales autem erunt, quæ

ad eandem partem secantium planorum existent: Et si idem fecetur planis parallelis quomodocumq; omnibus eiusdem lateribus coincidentibus, conceptæ in cylindrico figuræ erunt similes, æquales, & similiter positæ.

Conspiciatur figura Proposit. 10. in qua iam propositas sectiones habemus, plana enim, $A E$, $M E$, transeuntia per cylindrici latera ipsum secant, & plana, $B N G$, $C O F$, omnibus eiusdem lateribus coincidunt, & sunt parallela. Dico ergo figuras, $M Z H$, $E I V$, esse similes, & æquales, & similiter positas, quod patet, nam illæ sunt cylindrici, $M H Z I$, oppositæ bases; idem eodem modo probabitur de figuris, $A M H$, $D V E$, & de, $A R H$, $D X E$, & tandem ostendemus pariter figuras, $B N G K$, $C O F L$, esse similes, æquales, & similiter positas, quia sunt cylindrici, $B F$, oppositæ bases, quod demonstrandum erat.

ii. Huius.



C O R O L L A R I V M.

Hinc apparet, quamvis figuram planam ex sectione plani, oppositis basibus cylindrici æquidistantis, in eo productam, eisdem oppositis basibus esse similem, æqualem, & similiter positam.

T H E O R E M A X: P R O P O S. X I I I.

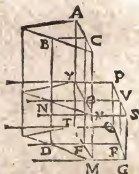
SI quis cylindricus secetur plano per latera, deinde secetur planis oppositis eiusdem basibus æquidistantibus: Communes sectiones plani per latera ducti, & planorum basibus æquidistantium, erunt lineæ, vel latera homologa figurarum similium, quæ ex sectione æquidistantium planorum in cylindrico effecta in eodem producuntur.

Sit cylindricus, $A D M$, cuius oppositæ bases, $A B C$, $T D F$, secetur autem plano utcumque per latera ducto, quod in eo producat parallelogrammum, $B F$, & alio utcumque plano oppositis basibus æquidistante, quod in eo producat figuram, $Y N X O$, & in parallelogrammo, $B F$, rectam, $N O$. Dico rectas, $D F$, $N O$, $B C$, esse lineas, vel latera homologa figurarum, $T D F$, $Y N O$, $A B C$, simi-

mi-

milium. Ducantur plana opposita tangentia cylindrici, AM , respectu plani, BF , in eo ducti, vnus quorum, & planorum figurarum, YNO , TDF , productorum, communes sectiones sint, XS , MG , alterius autem, & eorundem planorum sint rectæ, YP , TQ , indefinitè ambæ productæ, sumpto autem in, YP , vtcumque puncto, P , ducatur per, P , ipsi, CF , æquidistans, PQ , & ab eodem in plano per, YP , XS , transeunte vique ad, XS , ducatur vtcumque ipsa, PS , per ipsas autem, QP , PS , intelligatur extensum planum, quod secet aliud tangens planum in, SG , & planum per, TQ , MG , ductum in, QG , producantur autem ipsæ, NO , DF , verius, PS , QG , quibus occurrant in, V , R , & iungatur, VR , erunt igitur, VR , PQ , communes sectiones æquidistantium planorum, YQ , NR , & plani, PR , & idè erunt parallelæ, vt & ipsæ, PV , QR , & PR , crit parallelogrammum: Similiter, vt in Prop. 1. r. ostendimus esse parallelogramma ipsa, VG , PG , NF , OR , NR , & angulum, PSX , æqualem esse angulo, QGM , & tandem, PS , QG , esse incidentes similibus figurarum, YNO , TDF , & oppositarum tangentium, YP , XS , TQ , MG , & tangentes esse homologarum earundem regulas, & quia eisdem æquidistant ipsæ, NO , DF , & productæ similiter, & ad eandem partem ipsas incidentes, PS , QG , diuidunt; nam, PV , æquatur ipsi, QR , & VS , ipsi, RG , idè ipsæ, NO , DF , erunt lineæ homologæ figurarum, YNO , TDF , similibus, quæ in plures homologas iritari contingere potest, prout se habet ambitus superficiei cylindricæ huius cylindrici, AM , sunt lineæ homologæ inquam, & sint intra ambitum figurarum, quarum sunt homologæ, sunt verò latera homologa, si sint in earundem ambitu, veluti contingeret si planum per latera ductum esset planum contactus vnus oppositorum tangentium, veluti si cylindricus fuisset, cuius oppositæ bases sunt, ABC , TDF , exclusis residuis figuris, quæ ab ipsis, BC , DF , abscinduntur, tunc enim eodem modo facta fuisset demonstratio, vt consideranti facilè patebit; idem ostendimus in recta, BC , & in quibusuis alijs, quæ sunt communes sectiones planorum basibus æquidistantium, & parallelogrammi, BF , probantes scilicet easdem esse lineas, vel latera homologa figurarum in cylindrico per basibus æquidistantia plana productarum, quod ostendere opus erat.

Coroll. 1.
huius.



B. Def. 10.
huius.

C. Def. 10.
huius.

THEO.

T H E O R E M A X I . P R O P O S . X I V .

SI duæ figuræ planæ non existentes in eodem plano fuerint similes, æquales, & similiter positæ, illæ erunt cuiusdam cylindrici oppositæ bases.

Sint duæ similes figuræ planæ, & æquales, $AQTO$, $FDNC$, non existentes in eodem plano, & similiter positæ. Dico eas esse cuiusdam cylindrici oppositæ bases. Quoniam enim sunt similiter positæ erunt inter se æquidistantes, & earum incidentes pariter inter se æquidistantes, ducantur oppositæ tangentes figuræ, $AQTO$, quæ sint, TP , AB , & figuræ, $FDNC$, quæ sint, FH , NL , quæque sint regulæ homologarum earundem similium figurarum, & sint incidentes earum, & similium figurarum ipse, BP , HL , quæ erunt parallelæ, & quia sunt incidentes similium figurarum, AT , FN , & oppositarum tangentium TP , AB , ductarum, idè ad eandem ex eadem parte efficiunt angulos æquales, igitur angulus, BPT , erit æqualis angulo, HLN , & idè etiam, PT , æquidistabit ipsi, LN ,

D. Def. 10

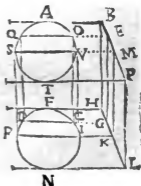
Coroll. 1.
huius.

D. Def. 10

B. Def. 10

Exoquer.
(a 10. Vn.
dec. Elc.10. Sexti
Elem.15. Vnde-
cim) El.

& BA , ipsi, FH , iungantur, BH , PL , quoniam ergo, AT , FN , sunt similes, & æquales, earum homologæ erunt pariter æquales, sunt autem incidentes, BP , HL , ut ipsæ homologæ, ut colligitur in Coroll. 1. sequentis Proposit. 22. independenter ab hac Propositione, ergo, BP , HL , erunt æquales, & sunt æquidistantes, ergo eas iungentes, BH , PL , erunt æquales, & æquidistantes. Diuidantur ipsæ incidentes, BP , HL , similiter ad eandem partem in punctis, E , M , G , K , & iungantur, EG , MK , erit ergo, MP , æqualis ipsi, EK , & EM , ipsi, GK , & BE , ipsi, HG , nam quia, BP , HL , similiter diuidantur in his punctis, earum partes sunt, ut ipsæ integræ, illæ verò sunt æquales, & idè etiam homologæ partes sunt æquales, & eas iungentes, PL , MK , EG , BH , erunt æquales, & æquidistantes, ducatur à puncto, K , versus figuram, FN , ipsa, KR , æquidistans ipsi, NL , quia ergo, MK , æquidistat ipsi, PL , & KR , ipsi, NL , planum per, MK , KR , transiens æquidistat transienti per, PL , LN , secet hoc planum transiens per, MK , KR , planum, AT , productum, in recta, SM , & iungantur, SR , VI , erit ergo,



ergo, SM , æquidistans ipsi, TP , regulæ homologarum figuræ, A
 T , veluti, RK , æquidistat ipsi, NL , regulæ homologarum figu-
 ræ, FN , & secant incidentes, BP , HL , similiter ad eandem par-
 tem in punctis, M , K , ergo ipsæ, SV , RI , erunt homologæ di-
 ctarum figurarum similibus, & equalium, quæ ideo erunt æquales,
 sicut etiam ipsæ, VM , IK , & sunt æquidistantes, ergo eas iungen-
 tes erunt æquales, & æquidistantes, scilicet, SR , VI , MK , est au-
 tem, MK , parallela, & equalis ipsi, PL , ergo, SR , VI , erunt
 æquales, & parallelæ ipsi, PL : Eodem pacto per, EG , extendentes
 planum æquidistans plano, TL , quod secet figurarum, AT , FN ,
 productarum plana in rectis, QE , DG , ostendemus ipsas, QO , DC ,
 esse homologas figurarum similibus, & equalium, AT , FN , &
 ideo eas esse æquales, ut & ipsas, OE , CG , ergo si iungantur, QD ,
 OC , istæ erunt æquales, & parallelæ ipsi, EG , idest ipsi, PL ; simi-
 liter in cæteris planis procedemus, quæ inter plana, TL , AH , ip-
 sis æquidistantia ducuntur, ostendentes, quæ iungunt extrema ho-
 mologarum earundem figurarum, AT , FN , esse æquales, & æqui-
 distantes ipsi, PL , si igitur, PL , regula statuatur, erunt omnes di-
 ctæ iungentes in superficie quadam, per quam ipsi, PL , prope-
 ran- te quadam recta linea æquali semper æquidistanter, eisdem extrema
 iugiter manent in ambitu figurarum, AT , FN , ergo hæc erit su-
 perficies cylindrica, cuius oppositæ bates erunt ipsæ, AT , FN , sunt
 igitur, AT , FN , cylindrici cuiusdam (nempe cuius latus est quod-
 vis ipsorum, QD , SR , VI , OC ,) oppositæ bates, quod erat no-
 bis ostendendum.

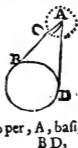
Def. 3.

THEOREMA XII. PROPOS. XV.

PVNCTUS manens, cui in reuolutione innititur latus conici,
 est vnicus vertex conici respectu eiusdem basis.

Sit conicus, ABD , basis, BD , punctus, cui innititur latus conici,
 ABD , in reuolutione, quæ ab eo fit per circuitum basis, BD ,
 fit, A . Dico, A , esse vnicum verticem conici, ABD , respectu basis, BD .
 Intelligatur per punctum, A , ductum planum æquidistans basi, dico
 hoc planum tantummodo in hoc puncto tangere conicum, si enim possibile est
 eundem tangat, seu secet in duobus punctis, ut in, C , A , iuncta ergo,
 AC , illa erit in superficie conicari, & cum descendat à puncto, A ,
 per ipsum transiet aliquando latus conici, ut, AB , igitur, AB ,
 erit in plano ducto per, A , basi, BD ,

A. Def. 4.



B. D, æquidistante, & quia latus, A B, indèhnitè productum occurrat basi, etiam dictum basi æquidistans planum occurreret indefinitè productum ipsi basi, quod est absurdum, non igitur planum ductum per, A, basi, B D, æquidistans conicum tangit vel secatur in alio, quam in puncto, A, ergo, A, erit illius vnicus vertex respectu basis, B D, quod erat ostendendum.

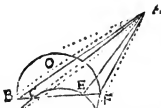
S C H O L I V M.

Cum autem dicemus verticem alicuius conici, intelligemus semper ipsum respectu basis assumptum, id est punctum, cui in reuolutio, ne innititur latus cylindricæ, nisi aliud explicetur.

THEOREMA XIII. PROPOS. XVI:

SI conicus secetur vtrumque per verticem ducto plano, concepta in ipso figura, vel figuræ, erit triangulus, vel trianguli.

Secetur quilibet conicus, A B F, plano vtrumque per verticem ducto, quod in eo producat figuram, siue figuras, A B C, A E F. Dico eas esse triangulos. Sit communis sectio illius, & basis producti plani, tota, B F, cuius, C E, portio maneat extra basim, est igitur, B F, recta linea, dico etiam esse rectas ipsas, A B, A C, A E, A F, si enim non est, A B, recta, ducatur in plano figuræ, A B C, recta, A O B, igitur, A O B, que iungit punctum, B, & verticem conici est latus conici, A B F, ergo est in superficie coniculari, & est etiam in plano figuræ, A B C, ergo est in eorum communi sectione, id est cadit super, A B, igitur, A B, erit recta linea, eodem modo ostendemus ipsas, A C, A E, A F, esse rectas, & ideo erit, A B C, triangulus, vt etiam, A E F, quod erat ostendendum.



C O R O L L A R I V M.

Eodem modo nobis innotescit figuras, que extra conicum sunt esse triangulos, id est, A C E, esse triangulum, & qui ex ipsis intelligitur, scilicet, A B F, pariter esse triangulum.

THEO-

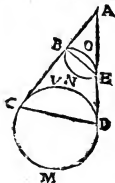
THEOREMA XIV. PROPOS. XVII.

SI conicus secetur utcumque planis per verticem, diuiditur ab eisdem in conicos: Et si secetur utcumque planis coïcidentibus omnibus eiusdem lateribus, solida ab iisdem abscissa versus verticem erunt pariter conici, & eorum bases ipsæ figuræ abscindentes.

Sit quilibet conicus, AMV , sectus plano utcumque per verticem ducto, quod in eo producat triangulum, ACD . Dico ab hoc plano secante in conicos, $ACVD$, $ACMD$, fuisse diuitem. Si nã intelligamus latus trianguli, ACD , quod sit, AC , vel, AD , innixum puncto, A , indefinite productum ferri per rectam, CD , ipsa describet superficiem trianguli, ACD , ad modum superficiæ coniculis, est autem reliqua, quæ insitit ambitui, CVD , sic descripta,

ergo tota superficies, $ACDV$, est conicularis descripta latere, AC , vel, AD , properante per circuitum figuræ planæ, CVD , ergo erit, $ACVD$, conicus, cuius basis ipsa figura, CVD , & vertex, A . Eodem modo ostendemus, $ACMD$, esse conicum, cuius basis, CMD , vertex, A . Secetur nunc utcumque omnibus conici, AMV , lateribus coincidente, quod in eo producat figuram, $BNEO$. Dico, ANO , esse conicum, cuius basis figura, $BNEO$, vertex, A ; nam dum latus conici, AMV , properat per circuitum basis, CMV ,

ut describat eius conicularem superficiem, properat etiam per circuitum figuræ, $BNEO$, & describit supra ipsam superficiem conicularem, igitur superficies ab eadem figura, BE , abscissa versus, A , est conicularis, & solidum comprehentum ab ipsa, & figura plana, $BNEO$, erit conicus, & eiusdem basis ipsa figura, $BNEO$, vertex autem, A , quod ostendere opus erat.



AD. cf. 46

COROLLARIUM.

Hinc habetur, si planum transeat per verticem conici, & quàmlibet rectam lineam intra basim conici existentem, qui quidem secetur alio plano coincidente cum omnibus eiusdem conici lateribus,

E

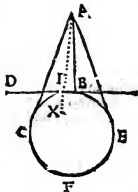
com-

communem sectionem horum duorum planorum fore intra figuram in conico productam à plano omnibus eiusdem lateribus coincidente, ut patet in conico, ACD , qui secatur plano, ACD , & alio, $BNEO$, quorum contactus in hisse fit, BE . Dico n. si, CD , sit intra figuram, $CNDV$, etiam, BE , fore intra figuram, $BNEO$, nam, $ACVD$, est conicus, & quia latera non ununtur, nisi in puncto, A , ideo, BOE , est aliqua figura, ut etiam, BNE , & ideo, BE , cadit intra figuram, $BNEO$.

THEOREMA XV. PROPOS. XVIII.

SI per verticem conici, & rectam tangentem eius basim extendatur planum, hoc tanget ipsum conicum in vna, vel pluribus rectis lineis, quæ erunt latera conici, vel in plano transeunte per eiusdem latera, quod erit triangulum, siue in pluribus triangulis.

Sit conicus, cuius vertex, A , basis, BCE , quam tangat recta, DF , in puncto, vel punctis, siue in linea. Dico planum, ADF , tangere dictum conicum in recta linea, siue in pluribus rectis lineis, siue in plano, quod erit triangulum per eiusdem latera transiens. Tangat igitur, DF , figuram, BCE , in puncto, B , & iungatur, AB , perq; AB , & DF , dictum sit extensum planum, ergo, AB , erit latus conici, ACE , nam latus, quod reuoluitur transiens per, B , congruit rectæ, AB , alioquin duæ rectæ lineæ clauderent superficiem, est ergo, AB , in superficie coniculi, est etiam in plano per, A , & DF , transeunte, ergo, AB , est communis tum superficiem coniculi, tum plano per, A , & DF , ducto, nullus autem punctus rectæ, AB , est intra superficiem cylindraceam, ergo planum per, AB , DF , ductum tangit conicum in recta, AB : Eodem pacto ostendemus idem tangere conicum in quibusuis alijs lateribus, quæ ducuntur à punctis contactus rectæ lineæ, DF , qui si sint plures, fit etiam contactus in omnibus lineis, si vero contactus rectæ, DF , fiat in recta linea tunc contactus plani per, AB , DF , fit in singulis rectis lineis, quæ à recta talis contactus



ad verticem, A, duci possunt, facient autem omnes illæ in plano trianguli, cuius basis est linea contactus vertex respectu eius, punctus, A, igitur, contactus plani per, A B, D F, ducti sit vel in vna, vel pluribus rectis lineis, vel in plano, quod est triangulum, siue plura triangula, non secabit autem alicubi tale planum: ipsum conicum, tunc enim aliquis punctus talis plani per, A B, D F, transeuntis esset intrâ superficiem conicalem, sit is punctus, I, iuncta igitur, A I, & producta versus basim incidet intra basim, vt facillè ostendi potest, & quia est, A X, in plano per, A B, D F, ducto, & punctus, X, est etiam in plano basis, erit in communi sect. oline, id est in linea, D F, igitur aliquis punctus rectæ, D F, erit intra basim, igitur illam secabit, quod est absurdum, ergo falsum est planum per, A, D F, ductum secare alicubi ipsum conicum, igitur illum tanget in his, quæ dicta sunt, quod ostendere oportebat.

C O R O L L A R I U M.

EX hoc habetur, si conicus secetur plano basi æquidistante, communem sectionem huius, & plani per verticem, & tangentem basim ducti, tangere figuram à plano æquidistante basi in conico productam, si enim eam secaret, etiam tangens planum secaret conicum, quod est absurdum.

T H E O R E M A X V I. P R O P O S. X I X.

SI conicus plano secetur basi æquidistante, concepta in eo figura erit similis basi, & eidem similiter posita.

Sit conicus, cuius vertex, A, basis, T D F, secetur autem plano basi æquidistante, quod in eo producat figura, V B O. Dico hanc esse similem basi, & eidem similiter positam. Ducantur ipsius basis duæ utcumque oppositæ tangentes, quæ sint, T H, S P, indefinitely productæ, deinde per verticem, & quamlibet dictarum tangentium extendatur planum, erunt ergo hæc plana tangentia conicum, A D F, secent autem figuræ, V B O, productum planum in rectis, V K, X N, quæ erunt ipsius figuræ, V B O, oppositæ tangentes, sumatur deinde in altera ipsarum, T H, S P, vt in, T H, utcumque punctum, vt, H, à quo versus reliquam tangentem euldem figuræ, T D F, in eisdem plano ducatur utcumque, H P, in, S P, terminata, deinde intelligatur extensum planum per, A, & H P, transiens ita, vt secet plana conicum tangentia in rectis, A H, A P, &

Coroll. i. huius.

Penates.

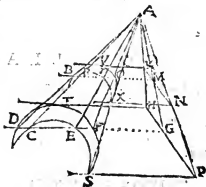
C. r. lanteced.

planum per, $V K, X N$, ductum in recta, $K N$, rursus diuidatur, $H P$, utcumq; in puncto, G , à quo ducatur ipsi, $S P$, parallela, $G D$, secans basis ambitum in punctis, E, E, C, D , deinde extendatur planum per, A , verticem, & rectam, $D G$, quod per conici latera transibit, & producet triangula siue intus, siue extra conicum, quæ sint, $A D C, A C E, A E F, A F G$, secabitque figuram, $V B O$, secet eius productum planum in recta, $B M$, quæ ambitum eiusdem, $V B O$, diuidat in punctis, B, R, I, O , habebimus etiam triangula, $A B R, A R I, A I O, A O M$, quorum latera erunt portiones laterum inferiorum triangulorum, per planum autem, $A D G$, siue per rectam, $A G$, sit secta, $K N$, in puncto, M . Quia ergo plana, quæ

7o. Vnde
simi El.

4. Sexti
Elem.

per, $T H, S P$, transeunt sunt parallela, & secantur à plano, $A P H$, communes eorum sectiones erunt parallele, scilicet $K N$, ipsi, $H P$, igitur triangulus, $A M N$, æquiangulus crit triangulo, $A G P$, & ideo circa æquales angulos erunt latera proportionalia, ergo vt, $P G$, ad, $G A$, sic crit, $N M$, ad, $M A$, eodem modo ostendemus, vt, $A G$, ad, $G H$, ita esse, $A M$, ad, $M K$, ergo ex æquali $P G$, ad, $G H$, erit vt, $N M$, ad, $M K$, sunt igitur, $P H, N K$, similiter ad eandem partem diuisæ in punctis, M, G : Eodem modo ostendemus triangulum, $A M O$, esse equiangulum ipsi, $A G F$, & $A M I$, ipsi, $A G E$, & $A M R$, ipsi, $A G C$, & tandem, $A M B$, ipsi, $A G D$, igitur, vt, $G A$, ad, $A M$, sic crit, permutando, $F G$, ad, $O M$, vt verò, $G A$, ad, $A M$, sic permutando est, $P G$, ad, $N M$, ideo, $P H$, ad, $N K$, ergo, $F G$, ad, $O M$, est vt, $P H$, ad, $N K$, similiter ostendemus, $E G$, ad, $I M$, & $C G$, ad, $R M$, & tandem, $D G$, ad, $B M$, esse vt, $P H$, ad, $N K$, & quia, $K N$, est parallela ipsi, $H P$, & $N X$, ipsi, $P S$, ideo angulus, $K N X$, est æqualis angulo, $H P S$; habemus igitur duas figuras planas, $V B O$, $T D F$, quarum ductæ sunt oppositæ tangentes, $V K, X N$, vnus, & $T H, S P$, alterius, inuenimus autem rectas, $K N, H P$, inter easdem positas, cum eis ad eandem partem angulos æquales continentes, ita se habere, vt ductis duabus utcumque ipsis tangentibus parallelis, quæ diuidant ipsas similiter ad eandem partem, repertum sit



7a. Vnde
simi El.

per, $T H, S P$, alterius, inuenimus autem rectas, $K N, H P$, inter easdem positas, cum eis ad eandem partem angulos æquales continentes, ita se habere, vt ductis duabus utcumque ipsis tangentibus parallelis, quæ diuidant ipsas similiter ad eandem partem, repertum sit

fit

fit eas, quæ inter taliter incidentes, & perimetrum figurarum continentur, eodem ordine sumptas, esse ut ipsas, HP , KN , incidentes, sunt igitur figuræ planæ, BVO , DTF , inter se similes, & homologarum earundem regulæ ipsæ tangentes, dictæ figuræ sunt in planis æquidistantibus, quarum incidentes sibi inuicem æquidistant, & homologæ earundem figurarum sunt ad eandem partem incidentium, & ipsarum incidentium partes homologæ pariter ad eandem partem constitutæ, igitur figuræ, VBO , DTF , nedum erunt similes, sed etiam similiter positæ, quod ostendendum erat. A. Def. 9.

COROLLARIUM I.

ET quia ostensum est ipsas tangentes, SP , XN , esse homologarum earundem similium figurarum regulas, & ductæ sunt utcumque, patet si duxerimus alias duas eiusdem basis oppositas tangentes, quæ cum primò ductis angulos efficiant aequales, & per ipsas, & verticem, A , extenderimus duo plana (quorum & plani figuræ, BVO , producti communes sectiones erunt aliæ dua figuræ, BVO , oppositæ tangentes) quod eodem modo ostendimus has secundas tangentes esse homologarum earundem similium figurarum regulas, & intra ipsas contineri earundem quoque incidentes, facient autem secunda tangentes cum primis angulos aequales, prima .n. ex. gr. tangens figuræ, BVO , quæ est, XN , est parallela ipsi, SP , primæ tangenti figuræ, DTF , & secunda tangens figuræ, BVO , est pariter parallela secundæ tangenti figuræ, DTF , nam tum primæ, tum secundæ tangentes sunt communes sectiones æquidistantium planorum, ipsarum nempe figurarum, BVO , DTF , productorum planorum, & idcirco sunt parallele, & angulos continent aequales, unde in figuris, quæ à planis basi conici parallelis producuntur, si habeamus homologas cum duabus quibusdam regulis, easdem etiam habebimus cum duabus quibusvis alijs angulos aequales cum prædictis ad eandem partem continentibus. 10. Unde citum Bl.

COROLLARIUM II.

Patet in super ex hac, & 11. ac 12. huius similium planarum figurarum, quæ ex sectione planorum basi cylindrici, vel conici æquidistantium in illis producuntur, vel sunt oppositæ bases cylindrici, aut frustri conici, possibile esse inuenire incidentes, quæ sint & ductarum utcumque oppositarum earundem tangentium incidentes, & quia prædictum, H , sumptum est utcumque, & ab ipso ducta qualibet incidens, HP , patet, quod, ducta utcumque in dictis figuris incidente earum tangentibus,

bus, quæ sunt regulæ homologarum earundem, possunt reperiri duæ incidentes earundem, quarum altera sit iam ducta; veluti, acta, HP , utrumque inuenta sunt duæ incidentes, KQ , HP , quarum altera fuit, HP . Et quia homologarum in easdem incidentes productarum, & ad eas terminatarum, portiones, eodem ordine sumptæ, sunt proportionales, sunt enim, ut ipse incidentes, ideo per homologarum productarum, talia extremis semper transeunt aliqua incidentes.

THEOREMA XVII. PROPOS. XX.

SI conicus secetur quomodocumq; planis parallelis, cum omnibus eiusdem lateribus coincidentibus, conceptæ in ipso figuræ erunt inter se similes, & similiter positæ.

Sit conicus, cuius basis, FHG , vertex, A , secetur autem utcumque planis parallelis, quæ cum omnibus eiusdem lateribus coincident, & sint conceptæ in ipso figuræ, DME , BNC . Dico has esse similes, & similiter positas: Nam quia planum figuræ, DME , coincidit omnibus lateribus conici, $AFHG$, ideo est etiam conicus ipse, $ADME$, secatur autem plano eius basi, DME , æquidistante, eo scilicet, quod producit figuram, BNC , ergo figura, BNC , erit similis basi, DME , & eidem similiter posita, quod erat demonstrandum.

17. Huius.

Ex antec.



THEOREMA XVIII. PROPOS. XXI.

SI quilibet conicus secetur plano per vertex, siue ab eodem tangatur in plano, nempe in triangulo, vel triangulis, secetur autem alijs planis utcumq; basi parallelis, communes sectiones, quæ ab eodem plano secante fiunt in dictis planis basi parallelis, erunt homologæ lineæ, vel latera figurarum, quæ ab eisdem æquidistantibus planis in eodem conico producuntur.

Videatur figura Propof. 16. huius, in qua conicus, ATDF, intelligatur feftus plano utcumque per verticem, A, dufto efficiente triangulum, siue triangulos, ADC, AEF, intra, extra autem triangulum, ACE, & qui ex illis integratur, ADF, fecetur autem alio plano bafi parallelo, quod in conico producat figuram, VBO, & sint earum, & plani per verticem communes feftiones, BR, DC, IO, EF. Dico eandem esse lineas homologas earundem figurarum, VBO, TDF. Intelligantur in bafi duftæ oppositæ tangentæ, TH, SP, per quas, & verticem, A, extendantur plana, quæ pariter tangent conicum, ATDF, sint autem eorum, & plani figuræ, VBO, producti communes feftiones, VK, XN, quas, vt ibi, ostendimus esse oppositas tangentæ ipsius, VBO, refpectu, BO, sumptas, accipiat deinde in, TH, utcumq; punctum, H, à quo vsq; ad aliam oppositam tangentem, SP, ducatur utcumque, HP, & per ipsam, & punctum, A, extendatur planum, quod fecet tangentia plana in rectis, AH, AP, & planum parallelarum, VK, XN, in recta, KN, erunt ergo ipsæ, KN, HP, parallelæ, extendatur planum trianguli, ADF, ita vt fecet triangulum, APH, in recta, AG, & planum figuræ, TDF, productum, si opus fit, in recta, DG. Eodem modo igitur, quo vti sumus in Propof. 19. quia, KN, HP, sunt parallelæ, ostendimus ipsas, KN, HP, esse ab ipsis, BM, DG, (quæ sunt communes feftiones trianguli, ADF, & equidistantium planorum, VBO, TDF, & ideo sunt parallelæ) similiter diuifas, & ad eandem partem in punctis, M, G, vnde, vt ibi ostendimus figuræ, VBO, TDF, esse fimiles, & earum, & tangentium oppositarum, XN, VK; SP, TH, incidentes esse ipsas, KN, HP, & tangentæ esse regulas homologarum earundem, quarum duæ sunt ipsæ, BRIO, DCEF, coniunctæ, siue ipsæ, BR, DC; IO, EF. Eodem modo, si propositus conicus fuisset, cuius vertex, A, bafi altera figurarum à bafi, TDF, per rectam, DE, abscissarum, vt ipsa, DTF, ostensum est ipsas, BR, DC; IO, EF, communes feftiones plani conicum tangentis in triangulis, ADC, AEF, & planorum æquidistantium, BVO, DTF, esse earundem homologas, erunt autem in hoc casu latera homologa, velut cum sunt intra figuras sunt lineæ homologæ earundem, quod erat ostendendum.

Coroll. 7.
huius.

18. Huius

Sed hoc etiam per modum Corollarij ex Prop. 19. deduci potuisset.

COROLLARIUM.

Hinc habetur, si propositum fuisset frustum conici, BTF, quod eius omnia latera producta coincidissent in vno puncto, A, vnde ostensum pariter fuisset communes feftiones plani per eius latera tran-

scun-

seuntis, ut ipsius, $B D F O$, quod semper est trapezium, & ipsarum, $V B O, T D F$, siue eisdem aequidistantium inter easdem ductarum, esse earundem lineas, vel latera homologa, unde patet communes sectiones plani per latera frusti conici ducti, & eiusdem basium oppositarum, siue eisdem aequidistantium inter eas productarum figurarum, esse earundem lineas, vel latera homologa; lineas, inquam, cum sint intra figuras, nec sumuntur in plano tangente: latera, cum sint in earum circuitu, cum nempe sint in eodem plano tangente, in eo precisè, quod est planum contactus frusti conici (contactus scilicet eius plani, quod per verticem ducitur) quod semper erit trapezium, vel trapezia, ut patere potest in trapezijs, $B D C R, I E F O$, quæ sunt planum contactus frusti conici, si idem frustum tangeretur à plano trianguli, $A D F$.

THEOREMA XIX. PROPOS. XXII.

SI duæ figuræ planæ similes, non existentes in eodem plano, fuerint inæquales, & similiter positæ; erunt cuiusdam frusti conici oppositæ bases.

Utamur adhuc figurâ Propos. 19. & sint duæ figuræ planæ quæcumque similes, inæquales, & similiter positæ, non tamen existentes in eodem plano, ipsæ, $V B O, T D F$. Dico, quod erunt ambæ cuiusdam frusti conici oppositæ bases. Quoniam ergo figuræ, $V B O, T D F$, sunt similiter positæ, & non in eodem plano, erunt in planis æquidistantibus, & quia sunt similes sint earum incidentes, & oppositarum tangentium, quæ sunt earundem homologarum regulæ, ipsæ, $K N, H P$; $K N$, ipsius, $V B O$, & $H P$, ipsius, $T D F$, & prædictæ tangentibus figuræ, $V B O$, sint ipsæ, $V K, X N$, & figuræ, $T D F$, ipsæ, $T H, S P$, erunt ergo ipsæ, $K N, H P$, æquidistantes, & quia ad tangentes, quæ sunt regulæ homologarum, illæ efficiunt ad eandem partem angulos æquales, erit angulus, $K N X$, æqualis angulo, $H P S$, & quia, $K N$, est parallela ipsi, $H P$, erit etiam, $X N$, parallela ipsi, $S P$. Eodem pacto ostendemus, $V K$, esse parallelam ipsi, $T H$; ducantur in figuris, $V B O, T D F$, duæ earum homologæ regulis dictis tangentibus, quæ sint ipsæ, $B R, I Q, D C, E F$, sint autem totæ, $B O, D F$, productæ, si opus sit, ut fecerint ipsas, $K N, H P$, quas diuident similiter ad eandem partem, ut in punctis, M, G , & quia figuræ propositæ sunt inæquales, sit maior ipsa, $T D F$, igitur etiam maior erit, $D C$, ipsa, $B R$, vel, $E F$, ipsa, $I O$, si n. essent eisdem æquales, etiam reliquæ homologæ his parallelæ essent æquales, cum omnes sint proportionales (sunt. n.

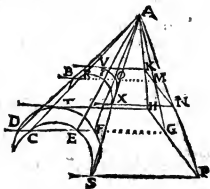
vt

D. Def. o.
huius.

Conuertis
10. Vnde.
cimi El.

vt incidentes) vnde etiam figuræ essent æquales, & si minores, etiam ipsa figura, TDF, esset minor figurâ, BVO, contra suppositum, est igitur, DC, maior ipsâ, BR, est autem, vt, DC, ad, BR, ita, PH, ad, NK, nam vt, DG, ad, BM, ita est, PH, ad, NK, & A. Defin. etiam ita, CG, ad, RM, ergo reliqua, DC, ad reliquam, BR, 10. erit vt, PH, ad, NK, sic etiam esse ostendemus, EF, ad, IO, vt, PH, ad, NK, & quia, DC, est maior ipsâ, BR, vel, EF, ipsâ, IO, ideò, HP, erit maior, KN, si igitur iunxerimus puncta, PN, HK, ipsæ, PN, HK, si producantur ad partes ipsius, NK, concurrent, vt in, A. Dico, A, esse verticem conici, cuius est basis ipsa, TDF, & ex plano ipsi,

TDF, æquidistantè ducto est in ipse concepta figura, VBO. Quia ergo, NK, est parallela ipsi, PH, erunt triangula, ANK, APH, æquiangulara, & circa æquales angulos latera proportionalia, igitur, HP, ad, PA, erit vt, KN, ad, NA, & permutando, HP, ad, NK, erit vt, PA, ad, AN, vt autem, PH,



4. Secti
Elench.

ad, NK, ita est, PG, ad, NM, nam ipsa, HP, KN, similiter sunt diuisæ in punctis, G, M, ergo, PA, ad, AN, erit vt, PG, ad, NM, & sunt parallelæ ipsæ, PG, NM, ergo puncta, G, M, A, erunt in vna recta linea, sit illa, AG, igitur, vt, PG, ad, NM, vel, PH, ad, NK, ita erit, GA, ad, AM, est autem, PH, ad, NK, vt, FG, ad, OM, & vt, EG, ad, IM, & tandem, vt, DG, ad, BM, ergo, vt, GA, ad, AM, ita erit, FG, ad, OM; EG, ad, IM; CG, ad, RM; & DG, ad, BM, ergo, cum sint parallelæ, erunt tum puncta, AOF, tum, AIE, ARC, tum etiam, ABD, in vna recta linea, extendantur ergo diætæ rectæ lineæ, quæ erunt, AF, AE, AD, AC. Eodem modo, si per duas quaslibet homologas figurarum, VBO, TDF, planum extendamus, fiet in cæteris demonstratio; igitur si sumantur in ambitu figuræ, TDF, quæcumq; puncta, quæ iungantur cum puncto, A, semper iungentes transibunt per circuitum figuræ, VBO, ergo figuræ, TDF, & VBO, erunt frusti conici oppositæ bases, quod à conico, ATDF, abscinditur per figuram, VBO, quod erat demonstrandum. Ex Lemmate seq. Ex Lemmate seq. Defin. 4.

COROLLARIUM I.

Quoniam ostendimus, tum, DC , BR , tum etiam, EF , IO , esse ut ipsas incidentes, TH , NK , habetur similitum figurarum homologas pariter esse, ut incidentes earundem, & oppositarum tangentium, quæ sunt earundem regula, quod in diffinitione assumitur contingere, tantum ijs, quæ inter circuitum figurarum, & ipsas incidentes, eodem ordine sumptæ, continentur.

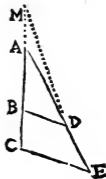
COROLLARIUM II.

Patet etiam ex hac, & 14. huius, omnes similes figuras planas posse esse alicuius cylindrici, vel frusti conici, oppositas bases; unde quæ pro illis in Coroll. 2. 19. huius colliguntur, pro omnibus similibus figuris planis etiam colligi possunt.

LEMMA PRO ANTECED. PROP.

SI in recta linea signentur tria puncta, primum, medium, & postremum, à primo autem, & medio ducantur ad eandem partem duæ inuicem parallelæ ita se habentes, ut educa à primo ad eandem à secundo, sit veluti recta inter primum, & postremum punctum posita, ad eam, quæ inter medium, & idem postremum sita est: Extrema puncta parallelarum, quæ non sunt in proposita linea, & illius postremum, erunt in recta linea.

Sit proposita recta, AC , in qua signatis utrumque tribus punctis, C , primo, B , medio, &, A , postremo, à punctis, C , B , educantur ad eandem partem duæ inuicem parallelæ, quæ sint, CE , BD , ita se habentes, ut, CE , ad, BD , sit, ut, CA , ad, AB . Dico puncta, A , D , E , esse in recta linea, si enim (iuncta, ED ,) ipsa, ED , producta non transit per, A , transibit supra, vel infra, A , secans, CA , (nam, BD , est minor ipsa, CE , ut est, AB , minor, AC ,) transeat, ut per, M , quia igitur, $E D M$, est recta erit, MCE , triangulus, in quo lateri, CE , ducitur parallela, BD , ergo trianguli, ECM , DBM , erunt æquianguli, & circa æquales angulos latera proportionalia, ergo, permutando, CE , ad, BD , erit ut, CM , ad, MB , est autem ut, C



4. Sexti
Elem.

E , ad,

E, ad, B D, ita, C A, ad, A B, ergo vt, C M, ad, M B, ita erit, C A, ad, A B, diuidendo, C B, ad, B M, erit vt, C B, ad, B A, ergo, M B, erit æqualis ipsi, B A, totum parti, quod est absurdum, non igitur, E D, producta tranſit ſupra, A, eodem modo ostendemus non tranſire infra, A, ergo tranſibit per, A, ergo tria puncta, A, D, E, eunt in recta linea, A E, quod erat ostendendum.

THEOREMA XX. PROPOS. XXIII.

SI duarum quarumlibet ſimilium figurarum habeamus homologas cum duabus quibusdam regulis, habebimus etiam homologas earundem cum duabus quibusdam alijs, cum prædictis angulos æquales ad eandem partem facientibus.

Patet hæc propositio, nam quæcunq; figuræ planæ ſimiles, ſi ſint æquales, & ſimiliter poſitæ, poſſunt eue cuiusdam cylindrici oppoſitæ baſes, ſi ſint inæquales, oppoſitæ baſes fruſti conici, in his autem contingit, ſi habeamus homologas cum duabus quibusdam regulis, nos eandem habere cum alijs duabus quibuscumque cum prædictis angulos æquales ad eandem partem conſtituentibus, ergo hoc in quibuscumque planis ſimilibus figuris veniat, quod eſt propositum.

14. Huius.
22. Huius
Corol. 9.
& 11. Huius.

C O R O L L A R I V M.

ET quia incidentes ad homologarum ſimilium figurarum regulas angulos ad eandem partem efficiunt æquales, idcirco & ipſæ incidentes erunt homologarum earundem ſimilium figurarum regulae, & vice verſa in quibusdam regulis homologarum poterunt ſumi earum incidentes.

8. Def. 10.

THEOREMA XXI. PROPOS. XXIV.

SI in duarum ſimilium figurarum oppoſitas tangentes, quæ earundem homologarum ſint regulæ, incidant duæ rectæ lineæ ad eandem angulum ex eadem parte eaſdem ſecantes, ductis verò quibusdam duabus, prædictis tangentibus parallelis, in dictis figuris, quæ ſecantes diuidunt ſimiliter ad eandem partem, vel aſſumptis ipſis oppoſitis tangentibus, reperiamus harum portiones inter incidentes, & cir-

cuitum figurarum eodem ordine sumptas, ita se habere, velut illæ, quæ dictis tangentibus inciderunt, istæ, quæ illis inciderunt, erunt tum similibus propositarum figurarum, tum ductarum tangentium, incidentes.

Sint duæ quæcumq; similes planæ figuræ, $A C E I, M T V S$, quarum sint ductæ oppositæ homologarum earundem regulæ, $A B, E F$, figuræ, $A E$, & $M N, V R$, figuræ, $M V$, incidant autem eidem ad eundem angulum ex eadem parte duæ, $B F, N R$, & ductæ sint quædam duæ ipsis tangentibus parallelæ, $C D, T O$, secantes ipsas, $B F, N R$, (& consequenter incidentes, vt facillè patet) similiter ad eandem partem, reperiamus, $C D$, ad, $T O$, & pariter, $I D$, ad, $S O$, esse vt, $B F$, ad, $N R$. Dico ipsas, $B F, N R$, esse incidentes similibus figurarum, $A E, M V$, & ductarum oppositarum tangentium, $V R, M N$;

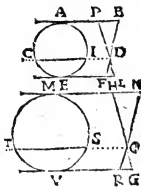
C. 10. def. $E F, A B$. Ex dictis igitur ipsæ, $C I, T$
nitonus. S , erunt homologæ earundem similibus

Ex Cor. 2. figurarum, $A E, M V$, & quia, $C D$,
19. & 22. ad, $T O$, est vt, $B F$, ad, $N R$, & B
huus. F , ad, $N R$, vt, $I D$, ad, $S O$, erit, C

D , ad, $T O$, vt, $I D$, ad, $S O$, igitur puncta, D, O , reperientur in duabus ductarum similibus figurarum, & oppositarum tangentium, incidentibus, sint illæ ipsæ, $H G, P L$, quæ cum ipsis, $T O, C D$, æquales angulos ad eandem partem continebunt. Dico tamen etiam ipsas, $N R, B F$, esse earundem figurarum, & tangentium, incidentes: Sint puncta contactus tangentium, $F E, R V$, proxima ipsis, $N R, B F$, ipsa, V, E . Dico, $E F$, ad, $V R$, esse vt, $F B$, ad, $R N$, nam, $E L$, ad, $V G$, est vt, $L P$, ad, $G H$, quia verò angulus, $C D F$, æquatur angulo, $T O H$, & $C D B$, ipsi, $T O N$, reliquus, $P D B$, æquabitur reliquo, $H O N$, & sic etiam, $F D L$, ipsi, $R O G$, est etiam angulus, $P L E$, æqualis angulo, $H G V$, ideo reliquus in triangulo, $D F L$, idest angulus, $D F L$, erit æqualis angulo, $O R G$, & sic triangu-
la, $F D L, O R G$, erunt æquiangula, vt etiam probabimus triangu-
la, $D P B, O H N$, esse æquiangula, sicut sunt æquiangula inter se triangu-
la, $F D L, P D B$, & $R O G, H O N$, vnde vt, $L D$, ad, $D F$, sic erit, $P D$, ad, $D B$, permutando, $E D$, ad, $D P$, erit vt, $F D$, ad, $D B$, componendo, $L P$, ad, $P D$, erit vt, $F B$, ad, $B D$, permutando, $L P$, ad, $F B$, erit vt, $P D$, ad, $D B$,

B. Defin.
10.

4. sexti
Elem.



DB, idest vt, HO, ad, ON, at, vt supra, ostendemus, HO, ad, ON, esse vt, HG, ad, NR, ergo, PL, ad, BF, erit vt, HG, ad, NR, erat autem, EL, ad VG, vt, PL, ad, HG, ergo, EL, ad, VG, erit vt, BF, ad, NR, quia verò, BF, ad, NR, est vt, DF, ad, OR, (nam, BF, NR, sunt similiter diuise in punctis, D, O,) idest vt, FL, ad, RG, ergo, EL, ad, VG, erit vt, FL, ad, RG, ergo reliqua, EF, ad, VR, erit vt tota, EL, ad, VG, idest vt, BF, ad, NR. Idem ostendemus de quibuslibet ductis ipsi, EF, VG, parallelis, quæ diuidant, BF, NR, similiter ad eandem partem, nempe eas, quæ inter ipsas, BF, NR, & circuitum figurarum, AE, MV, eodem ordine sumptæ continentur, esse vt ipsas, BF, NR, ergo, BF, NR, sunt incidentes similiarum figurarum, MV, AE, & ductarum tangentium, quod ostendere opus erat. B. Def. 19.

C O R O L L A R I V M.

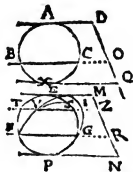
Innotescit ex hoc consequenter duarum similiarum figurarum, & earum dem oppositarum tangentium, quæ sunt regulæ homologarum, tum incidentes similiter diuidi ab homologis earundem figurarum, productis, si opus sit tum quascumque alias, quæ cum homologis angulos continent aequales, vt exempli gratia ipsæ, NR, BF. Et vterius ipsas homologas esse, tum vt quasuis incidentes, tum vt eisdem parallelas, idest ex. gr CI, ad, TS, n. dum erit vt, PL, ad, HG, siue vt, BF, ad, NR, sed etiam vt, BF, ad quancumque altam parallelam ipsi, NR, ductam inter parallelas, MN, VR, nam illa erit æqualis ipsi, NR. Patet igitur duarum similiarum figurarum homologas non solum esse vt earum, & oppositarum earundem tangentium, quæ sunt regulæ homologarum, incidentes, sed etiam vt quasuis alias inter easdem tangentes ductas ipsi incidentibus æquidistantes, siue ad homologas similiarum figurarum æqualiter inclinatas.

THEOREMA XXII. PROPOS. XXV.

Si quæcunque similes figuræ planæ à rectis lineis describuntur, quæ sint earundem homologæ, & inter se æquales; superponantur autem ad inuicem ipsæ figuræ, ita vt easdem describentes rectæ lineæ sibi congruant, figuræq; sint similiter positæ, illæ quoque erunt ad inuicem congruentes.

Sint similes figuræ planæ, ABXC, EFP G, quæcunq; descriptæ ab earundem homologis, & æqualibus rectis lineis, BC, FG, quæ

- D. Defin. 10. quæ ita inuicem superponantur, vt, BC, FG , sibi congruant, & ipsæ sint similitè politæ. Dico etiam ipsas figuras ad inuicem fore congruentes. Sint oppositæ tangentè ductæ pro figura, $ABXC$, Coroll. 1. ipsæ, AD, XQ , regula, BC , & pro figura, $EFPG$, regula, F huius. G , ipsæ, EM, PN , quarum figurarum, ac oppositarum tangentium sint quoque incidentes ipsæ, DQ, MN , productis verò, BC, FG , versis, DQ, MN , illis incident in punctis, O, R , & superponatur figura, $ABXC$, figuræ, $EFPG$, ita vt, BC , congruat
- D. D: fin. 10. ipsi, FG , & sint similitè politæ: Erunt ergo ipsæ incidentes, DQ, MN , ad eandem partem figurarum iam superpositarum, & inuicem parallelæ, vel congruentes, sed in nostro casu erunt congruentes, cum enim vt, BC , ad, FG , ita sit, DQ , ad, MN , ipsæ verò, BC, FG , sint æquales, etiam, DQ, MN , æquales erunt, sicut etiam, CO, GR , (quæ sunt inter se vt, DQ, MN), ergo cum punctus, B , positus sit in, F , erit, O , in, R , & DQ , extensa super, MN , & cum etiam, DO, MR , sint æquales punctus, D , erit in, M , sic autem ostendimus quoque punctum, Q , cadere in, N , & consequenter, XQ , cadere super, PN , & AD , super, EM , si ergo figura, $ABXC$, cadens super, $EFPG$, non congruit illi, esto quod ceciderit, si possibile est vt, $FVIG$, ita vt ambitus extra ambitum cadat, sumpto autem quocunque puncto, I , qui sit in ambitu figuræ, $VFPGI$, sed cadens non in ambitu figuræ, $EFPG$, per ipsum ducatur, $I Z$, parallelæ, EM , secans, MN , in, Z , ambitum figuræ, VPI , in, V, I , & ambitum figuræ, $EFPG$, in, T, S , erunt autem homologæ, VI, TS , & inter se æquales cum sint, vt incidentes, DQ, MN , quæ sunt æquales, necnon æquales reliquæ usq; ad incidentes, nãmpè, SZ, IZ , quod est absurdum, punctus enim, I , non est in S , non ergo cadet ambitus figuræ, $ABXC$, superpositæ ipsi, $EFPG$, vt dictum est, extra ambitum eiusdem figuræ, $EFPG$, igitur cadet super illius ambitum, & ipsæ figuræ erunt sibi inuicem congruentes, quod ostendendum erat.
- C. Defin. 10. A. Defin. 10.



C O R O L L A R I V M.

EX hoc insuper colligitur si quæ sunt quælibet planis similes ab æqualibus rectis lineis æquæ in eisdem locis descriptas inter se æquales esse, cum ita ad inuicem superponi possint, vt sibi congruant, velut in

in Prop. demonstratum est. Et vice versa si figurae sunt similes, & aequales, etiam homologae aequales esse, si enim inaequales essent, etiam ipsa figurae inaequales essent, quod est absurdum. Ulterius autem patet, si sint inuicem superpositae, ita ut similiter sint constitutae, ac duae quavis homologae inuicem fuerint congruentes, etiam ipsas figuras fore congruentes, alioquin sequerentur absurda superius demonstrata, cum quavis alia homologae necessitudo quoque sint aequales, quae enim congruerunt sunt aequales, & subinde etiam incidentes, & quavis alia homologae inuicem se sunt aequales.

THEOREMA XXIII. PROPOS. XXVI:

SI duobus parallelis quibuscumque planis inciderint duo plana se se intersecantia, primum nempe, & secundum; fuerint autem alia duo parallela quaecumque plana, quibus pariter incidant duo alia plana se se diuidentia, primum similiter, & secundum: Eorum autem cum parallelis planis communes sectiones angulos aequales comprehenderint, necnon primorum, ac secundorum planorum mutuae sectiones ad communes sectiones primorum planorum cum planis parallelis effectas angulos aequales constituerint, ipsa verò prima plana ad plana parallela aequè fuerint ad eandem partem inclinata: Eadem communes sectiones ad communes sectiones secundorum planorum cum planis parallelis effectas angulos pariter constituent aequales, necnon secunda plana erunt ad eandem plana parallela aequaliter ad eandem partem inclinata.

Sint duo parallela quaecumque plana, BD, HV , quibus incidat duo plana, HA , primum, AV , secundum se se secantia in recta, AG . Sint nunc alia duo plana quaecumque parallela, LQ , & Λ , quibus pariter incidant alia duo plana, LY , primum, & KA , secundum, se se pariter secantia in recta, KY , communes verò sectiones, $BA, AD; LK, KQ$, incidentium planorum cum planis parallelis contineant angulos aequales, sit nempe, BAD , angulus aequalis angulo, LKQ , (erit. r. & HGV , aequalis ipsi, & YLA ,) similiter ipsae, AG, KY , cum ipsis, GH, YK , angulos constituent aequales, & prima plana, BG, LY , ad plana parallela, $BD, HV; LQ, \Lambda$, sint aequè ad eandem partem inclinata. Dico angulos, AGV, KYV , aequales esse, necnon secunda plana, AV, KA , ad

Defin. 3.
Vnde c. El.
18. Vnde
cum El.

eadem parallela plana esse æqualiter ad eandem partem inclinata. Si igitur, AG, KY , essent dictis planis parallelis perpendiculares, manifestum est, quod anguli, AGV, KYA , essent æquales, idest recti, & plana, AV, KA , eidem planis parallelis erecta; sed non sint perpendiculares, & à punctis, A, K , demittantur ipsæ, AE, K

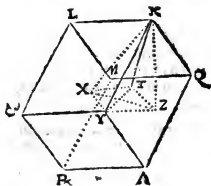
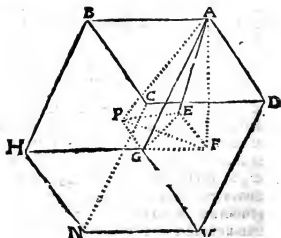
T , quæ eidem sint perpendiculares, incidant autem subiectis planis in punctis, E, T ; deinde à puncto, A , ad, HG, VG , productas, ducantur perpendiculares, AF , quidem ipsi

Vide' dicta lib. 7. annot. Prop. 3.

HG , & AP , ipsi, VG , incidentes in punctis, V, P , nisi forte, AG , esset alteri earum perpendicularis, ut contingere potest, & iungantur, EP, EG, EF ; similiter in alia figura cadant à puncto, K , perpendiculariter super ipsas, & Y, AY , productas, si opus sit, ipsæ, KZ, KX , & iun-

47. Primi
Eicm.

gantur similiter, TX, TY , & TZ . Quoniam ergo anguli, AG, KZY , sunt recti, idem quadratum, AG , erit æquale duobus quadratis, AF, FG , sicut quadratum, KY , æquale duobus, KZ, ZY , est autem etiam quadratum, AF , æquale duobus quadratis, AE, EF , quia angulus, AEF , rectus est, & quadratum, KZ , pariter æquale quadratis, KT, TZ , ergo quadratum, AG , idest duo
qua-



quadrata, $A E, E G$, (quia etiam, $A E G$, rectus est) æquabuntur tribus quadratis, $A E, E F, F G$, vnde, ablato communi quadrato, $A E$, quadratum, $G E$, æquabitur duobus quadratis, $G F, F E$; par ratione autem probabimus quadratum, $Y T$, æquari quadratis, $Y Z, Z T$, vnde anguli, $G F E, Y Z T$, recti erunt; & eodem modo probabimus esse rectos, $E P G, T X Y$, ergo anguli, $A F E, K Z T$, erunt anguli inclinationis primorum planorum, $B G, L Y$, cum subiectis planis, $H V$, & A , & idè inter se æquales: Similiter anguli, $A P E, K X T$, erunt inclinationes secundorum planorum, $A V, K A$, cum eisdem subiectis planis. Quia ergo anguli, $A F E, K Z T$, sunt æquales, & $A E F, K T Z$, recti, erunt triangula, $A F E, K Z T$, inter se, similia; vt etiam triangula, $A F G, K Z Y$, inter se; nam anguli, $A G F, K Y Z$, sunt quoque æquales, & $A F G, K Z Y$, recti; erit ergo, vt, $E F$, ad, $F A$, sic, $T Z$, ad, $Z K$, & vt, $A F$, ad, $F G$, sic, $K Z$, ad, $Z Y$, ergo ex æquali, vt, $E F$, ad, $F G$, ita erit, $T Z$, ad, $Z Y$, & sunt circa rectos, nempe æquales angulos, $G F E, Y Z T$, ergo triangula, $G F E, Y Z T$, pariter similia erunt, anguli igitur, $E G F, T Y Z$, adæquabuntur, totus autem, $P G F$, toti, $X Y Z$, æquatur, ergo reliquus, $E G P$, erit equalis reliquo, $T Y X$, & sunt recti, $E P G, T X Y$, vt probatum est, ergo erunt, $G P E, Y X T$, similia triangula, igitur, vt, $P G$, ad, $G E$, sic erit, $X Y$, ad, $Y T$, vt verò, $G E$, ad, $G F$, sic est, $Y T$, ad, $Y Z$, & vt, $G F$, ad, $G A$, sic, $Y Z$, ad, $Y K$, ergo ex æquali, $P G$, ad, $G A$, erit vt, $X Y$, ad, $Y K$, habemus ergo duo triangula, $A P G, K X Y$, habentia duos angulos, $A P G, K X Y$, æquales, sunt .n. recti, circa verò duos, $P G A, X Y K$, latera proportionalia, & reliquorum vtrumq; simul, $P A G, X K Y$, minorem recto, ergo erunt similia, & anguli, $P G A, X Y K$, æquales, vnde reliqui, $A G V, K Y A$, pariter æquales erunt, quod est vnum propositorum.

42. Primi
El. Def. 6.
vnde.
Elem.
Defin. 6.
Vnd. El.

6. Sexti
Elem.

7. Sexti
Elem.

6. Sexti
Elem.

Rursum, quia, $P E$, ad, $E F$, est vt, $X T$, ad, $T Z$; $E F$, autem ad, $E A$, vt, $T Z$, ad, $T K$, ergo ex æquali, $P E$; ad, $E A$, erit vt, $X T$, ad, $T K$, & sunt circa æquales angulos, $P E A, X T K$, latera proportionalia, ergo triangula, $A P E, K X T$, similia erunt, necnon anguli, $A P E, K X T$, inclinationis secundorum planorum, $A V, K A$, cum subiectis planis inter se æquales, & ad eandem partem quod etiam demonstrare propositum fuit.

THEOREMA XXIV. PROPOS. XXVII.

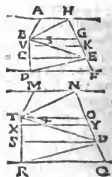
Posita definitione, quam affert Euclides lib. 6. El. de similibus figuris rectilineis, sequitur pro ipsis etiam de finitio generalis, quam de omnibus similibus figuris planis ipse attuli.

G

Sint

Prima
Def. Sex-
ti Elem.

Sint duæ utcumque figura rectilineæ, $A B D E H$, $M T R P N$; similes iuxta definitionem Euclidis, id est singulos habentes angulos æquales, A, M ; B, T ; D, R ; P, E ; H, N , & circa æquales angulos latera proportionalia. Dico eandem esse similes iuxta meam definitionem: Ducantur duæ utcumque oppositæ earum tangentes, quæ cum duobus ex lateribus homologis earundem angulos æquales ab eadem parte continent, fiat autem ex vna parte tangentes ipsæ, $A H$, $M N$, quæ cum ipsis, $H E$, $N P$, lateribus homologis angulos continent æquales, $A H G$, $M N O$, & sint ex alia parte tangentes ipsæ, $D F$, $R Q$, quæ cum ipsis, $H E$, $N P$, productis concurrant in punctis, F, Q , ducantur deinde a punctis angulorum, qui sunt, B, E ; $T P$, ductis tangentibus parallelæ, $B G$, $C E$, $T O$, $S P$, & iungantur, $B H$, $B E$, $T N$, $T P$. Quia ergo anguli, $M N Q$, $A H F$, sunt æquales, etiam anguli, $N Q R$, $H F D$, erunt æquales, & quia anguli, $N P R$, $H E D$, sunt quoque æquales, etiam anguli, $R P Q$, $D E F$, erunt æquales, & reliqui reliquis, unde trianguli, $R P Q$, $D E F$, erunt æquianguli, & ideo, $Q P$, ad, $P R$, erit vt, $F E$, ad, $E D$, est autem, $R P$, ad, $P N$, vt, $D E$, ad, $E H$, ergo, ex æquali, $Q P$, ad, $P N$, erit vt, $F E$, ad, $E H$, igitur, $N Q$, $H F$, sunt similiter ad eandem partem diuisæ in punctis, E, P , quia verò angulus, $N P S$, æquatur angulo, $N Q R$. $H F D$. i. $H E C$, & $N P R$, ipsi, $H E D$, ideo reliquus, $S P R$, æquabitur reliquo, $C E D$, est autem angulus, $T R P$, æqualis angulo, $B D E$, ergo trianguli, $P S R$, $E C D$, erunt æquianguli, & ideo, $C E$, ad, $E D$, erit vt, $S P$, ad, $P R$, & $E D$, ad, $E F$, erit vt, $R P$, ad, $P Q$; ergo ex æquali, & permutando, $C E$, ad, $S P$, erit vt, $E F$, ad, $P Q$. i. vt, $H F$, ad, $N Q$. Similiter quia anguli, $B D E$, $T R P$, sunt æquales, & circa eos latera sunt proportionalia, ideo trianguli, $B D E$, $T R P$, erunt æquianguli, unde anguli, $D B E$, $R T P$, & $B E D$, $T P R$, erunt æquales, sunt autem æquales ipsi, $C E D$, $S P R$, ergo reliqui, $B E C$, $T P S$, erunt æquales, & ideo trianguli, $B C E$, $T S P$, erunt æquianguli, & quia angulus, $B E F$, est æqualis ipsi, $T P Q$, reliquus, $B E H$, erit æqualis reliquo, $T P N$, est autem, $B G E$, æqualis ipsi, $T O P$, ergo trianguli, $B G E$, $T O P$, erunt æquianguli, ergo, $B G$, ad, $T O$, erit vt, $B E$, ad, $T P$, id est vt, $C E$, ad, $S P$, id est vt, $H F$, ad, $N Q$, permutando, & conuertendo, $H F$, ad, $G B$, erit vt, $N Q$, ad, $O T$, quia verò anguli, $H A B$, $N M T$, sunt æquales, & circa eodem la-



4. Sexti
Elem.

Ex Defn.
Eucl.

6. Sexti
Elem.

tera

tera proportionalia, idèò trian. g. $H A B$, $N M T$, sunt æquianguli, 6. Sexti
& anguli, $A H B$, $M N T$; $A E H$, $M T N$, inter se æquales, ergo Elem.
cum anguli, $A H G$, $M N O$, sint æquales, reliqui, $b h c$, $T N$
 O , erunt æquales, sunt etiam æquales anguli, $H G B$, $N O T$, ergo
trianguli, $H B G$, $N T O$, sunt æquianguli, ergo, $b c$, ad, $c h$,
erit vt, $T O$, ad, $O N$, erat autem, $F H$, ad, $G B$, vt, $Q N$, ad, O
 T , ergo ex æquali, $F H$, ad, $H G$, erit vt, $Q N$, ad, $N O$, sunt gi-
tur ipsæ, $H F$, $N Q$, similiter diuisæ, & ad eandem partem in pun-
ctis, G , O , & ipsæ diuidentes, $B G$, $T O$, sunt vt ipsæ, $H F$, $N Q$.

Ducantur nunc inter dictas oppositas tangentes eudem parallelæ
duæ utcuque, $V K$, λY , inter circuitum figurarum iam proposi-
tarum, & rectas, $H F$, $N Q$, comprehendente, similiter ad eandem par-
tem diuidentes ipsas, $H F$, $N Q$, in punctis, K , Y , secanteque ip-
sas, $B E$, $T P$, in punctis, 3 , 4 , est ergo, $F K$, ad, $Q Y$, permutan-
do, vt, $H F$, ad, $Q N$, idèst vt, $F E$, ad, $Q P$, ergo, $F K$, ad, Q
 Y , erit vt, $F E$, ad, $Q P$, & reliqua, $E K$, ad, tenquam, $F Y$, vt, F
 K , ad, $Q Y$, idèst vt, $F H$, ad, $Q N$; Similiter ostendimus, vt, F
 H , ad, $Q N$, sic esse, $G K$, ad, $O Y$, ergo, $G K$, ad, $O Y$, erit vt,
 $K E$, ad, $Y P$, & permutando, $G K$, ad, $K E$, erit vt, $O Y$, ad, Y
 P , componendoque, $G E$, ad, $E K$, erit vt, $O P$, ad, $P Y$, est verò,
vt, $G E$, ad, $E K$, ita, $B G$, ad, $3 K$, & vt, $O P$, ad, $P Y$, ita, T
 O , ad, $Y 4$, ergo, $B G$, ad, $3 K$, erit vt, $T O$, ad, $Y 4$, & permutan-
tando, $B G$, ad, $T O$, erit vt, $3 K$, ad, $4 Y$, est verò vt, $B G$, ad, T
 O , ita, $H F$, ad, $N Q$, ergo, $3 K$, ad, $4 Y$, erit vt, $H F$, ad, $N Q$,
similiter, quia ipsæ, $V K$, λY , diuidunt similiter ad eandem partem
ipsas, $B C$, $T S$, in punctis, V , X , ac diuiduntur ipsæ, $G E$, $O P$, in
punctis, K , Y , idèò eodem modo ostendimus ipsas, $V 3$, $\lambda 4$, esse
vt ipsas, $C E$, $3 P$, idèst vt ipsas, $H F$, $N Q$, erant autem, $3 K$, 4
 X , vt ipsæ, $H F$, $N Q$, ergo totæ, $V K$, λY , erunt vt ipsæ, $H F$,
 $N Q$, habemus igitur figuras, $A D E$, $M R P$, in quibus duæ sunt
oppositæ tangentes, $A H$, $D F$, $M N$, $R Q$, quibus inciderunt ip-
sæ, $H F$, $N Q$, ad eundem angulum ex eadem parte, inuentum est
autem eas, quæ inter dictas, $H F$, $N Q$, & circuitum figurarum ei-
sdem tangentibus utcumq; ducuntur æquidistantes, & secant dictas,
 $H F$, $N Q$, similiter ad eandem partem, eodem ordine sumptas, esse
vt ipsas, $H F$, $N Q$, ergo figuræ, $A D E$, $M R P$, quæ erant simi-
les iuxta definitionem Euclidis, erunt etiam similes iuxta definitio-
nem meam, & erunt dictæ tangentes regulæ homologarum earum-
dem, & ipsarum, ac dictarum similium figurarum incidentes ipsæ, H
 F , $N Q$, quod erat ostendendum. Defin. 100
huius.

COROLLARIUM.

Quia verò oppositæ tangentés, AH , DF , MN , RQ , ductæ sunt utcumque, angulos tamen æquales ad eandem partem cum homologis lateribus continentés, idèò quascumq; duxerimus oppositas tangentés in figuris rectilineis similibus iuxta Euclidem, dummodo faciunt angulos æquales ad eandem partem cum lateribus homologis, eandem esse regulas homologarum similium figurarum poterit probari.

THEOREMA XXV. PROPOS. XXVIII.

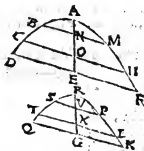
Posita infra scripta definitione similium portionum sectionum conii, illi adiuncti, quod infra dicitur, sequitur pro ipsis etiam mea definitio generalis similium planarum figurarum. Hoc autem dico pro spatijs sub ipsis sectionibus, & rectis lineis contentis, non autem pro ipsis tanquam lineis, licet crediderim Apolloniũ ipsarum similium sectionum tanquam linearum, non autem figurarum, quæ sunt ab ipsis, similitudinem attendisse, ego verò ipsam recipio tanquam ipsarum figurarum similitudini congruam, dum illi adiungitur, quod in ipsa Propos. explicatur.

DEFINITIO.

Similes portiones sectionum conii sunt, in quarum singulis ductis lineis basi parallelis numero æqualibus, sunt ipsæ parallelæ, & bases ad abscissas diametrorum partes sumptas a verticibus, in ijdem rationibus, tum abscissæ ipsæ ad abscissas: Apollonius lib. 6. Conicorum, ut refert Eutocius.

Sint similes portiones sectionum conii, DAP , QRK , in basibus, DF , QK , quarum diametri sint ipsæ, AE , RG , secentur autem similiter ipsæ diametri in punctis, N , O ; V , X ; & sit, DF , ad, EA , ut, QK , ad, GR , & CH , ad, OA , ut, TL , ad, XR , & PM , ad, NA , ut, SP , ad, VR ; has igitur Apollonius in suprascripta definitione similes vocat, mihi autem hoc opus est illi adiungere. scilicet quod anguli basibus, & diametris, ad eandem partem contenti sint æquales, ut angulus, AED , ipsi, RGQ , si. ut. hoc non. ponatur posse contingere esse bases, DF , QK , æquales, & ipsas, AE , RG , in quo casu tot figuras similes, & æquales, ex. gr. ipsi, ADF ,
pos-

possemus habere, quot sunt variationes inclinationum diametrorum ad bases, quam tamen variationem per definitionem supradictam excludere necessarium esse existimaui. Supposito igitur, quod tali definitioni hoc adiungatur, dico eam cum mea concordare, si pro ipsis sectionibus tanquam figuris intelligatur. Ductis enim per vertex, A , R , basibus, DF , QK , parallelis, illæ tangent dictas portiones, & inter easdem ductas habebimus ipsas, AE , RG , illis ad eundem angulum incidentes ex eadem parte, quibus similiter ad eandem partem diuisis, ut in punctis, N , O ; V , X ; & per easdem ductis ipsis tangentibus parallelis, BM , CH , SP , TL , inuenimus eas, quæ inter ipsas, AE , RG , & circuitum figurarum, ADF , RQK , ad eandem partem continentur, & diuidunt ipsas similiter ad eandem partem, eodem ordine sumptas, esse in proportione ipsarum, AE , RG , nam quia, DF , ad, EA , est ut, GK , ad, GR , permutando, DF , ad, QK , erit ut, EA , ad, GR , & quia ipsæ, AE , RG , sunt diametri, ad quas ordinatim applicantur dictæ parallelæ, idè ab eisdem bifariam diuidentur, ergo, & DE , ad, QG , & EF , ad, GK , erit ut, EA , ad GR , eodem modo ostendimus tum, CO , ad, TX , tum, OH , ad, XL , esse ut, OA , ad, XR i. ut, EA , ad, GR , & sic, BN , ad, SV , & NM , ad, VP , esse ut, NA , ad, VR i. ut, EA , ad, GR , sunt igitur figure, ADF , RQK , similes iuxta meam definitionem; earum vero, & tangentium oppositarum (quarum ducæ ex vna parte sunt ipsæ, DF , QK ,) incidentes sunt ipsæ, AE , RG .



Defin. 10.

SCHOLIUM.

Afert Commandinus aliam definitionem similium hyperbolarum, scilicet similes esse, quarum coniuncta diametri inter se, vel quarum figura latera eandem proportionem habent, quam David Rinaltus in Com. in Arch. lib. de Conoidib. & Sphæroidibus ad Defin. 18. ostendit concordare cum supradicta Apollonii, quam videat; qui voluerit: Hæc igitur eodem modo, quo illæ Apollonii, cum mea pariter concordabit (sumpta tamen hyperbola tanquam figura) unde hæc quoque hypothesi si opus fuerit, pariter utemur ad passiones inde dependentes demonstrandas.

LEM-

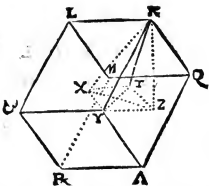
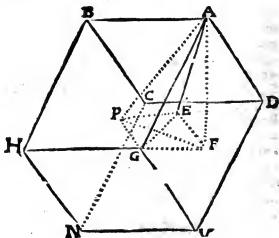
L E M M A I.

SI sint duæ similes solidæ figuræ iuxta definit. 9. Vndec. Elem. & in earum altera duæ assumantur in ambitu quæcumque figuræ coincidentes, illæ erunt ad inuicem æquè ad eandem partem inclinatæ, ac aliæ duæ, quæ in reliqua solida figura eidem similes esse supponuntur.

Sint similes solidæ figuræ, AN, KR , in earum autem altera, AN , sumantur duæ quæcumq; figuræ inuicem coincidentes, AV, VH , quibus in reliqua similes sint, KA , quidem, AV , & A & ipsi, HV : Dico vtraique, AV, VH , æquè ad inuicem, & ad eandem partem esse inclinatas, ac sunt ipsæ, KA , & A &

11. Vnde-
simi El.

Vel ergo, AG, KY , sunt subiectis planis perpendicularares, & tunc, AV, KA , erunt ipsis, HV , & A , erecta, vel nõ, & tunc demittantur à punctis, A, K , subiectis planis perpendicularares, AE, KI , & super ipsas, HG, VG , productas (si opus sit, & nisi, AG, KY , sint vel ipsis, HG , & Y , vel ipsis, GV, YA , perpendicularares) similiter ad angulos rectos cadant;



AP ,

AP, KX, quidem ipsis, VG, AY, & AF, KZ, ipsis, HG, & Y, perpendicularares, iunganturque, PE, XT, PF, XZ, & F, E, ZT. Quoniam ergo, APG, est angulus rectus, erit quadratum, AG, æquale quadratis, GP, PA, quadratum verò, PA, æquatur duobus quadratis, PE, EA, propter angulum rectum, AEP, ergo quadratum, AG, hoc est duo quadrata, GE, EA, æquabuntur tribus quadratis, GP, PE, EA, & ablato communi quadrato, EA, quadratum, GE, æquabitur quadratis, GP, PE, ergo, EP, erit perpendicularis ipsi, PV, cui etiam est perpendiculararis, AP, ergo, APE, erit inclinatio planorum, AV, VH. Eodem modo ostendimus, KXT, esse inclinationem planorum, KA, A&, & angulos, EFG, FZY, esse rectos. Quoniam verò angulus, AGV, æquatur ipsi, KYA, (iunt. n. figuræ, AV, KA, similes ex hypotefi) etiam, AGP, æquabitur, KYX, & APG, KXY, recti iunt, ergo triangula, APG, KXY, similia erunt. Eodem modo probabimus etiam triangula, AGF, KYZ, esse similia, ergo, PG, ad, GA, erit vt, XY, ad, YK, & GA, ad, GF, vt, YK, ad, YZ, ergo ex æquali, PG, ad, GF, erit vt, XY, ad, YZ, & sunt latera proportionalia circa æquales angulos, PGF, XYZ, (iunt. n. æquales ipsi, qui sunt ad verticem, nempe, HGV, & YA, qui adæquantur, cum sint similia figurarum, HGV, & YA,) ergo triangula, PGF, XYZ, erunt similia, & anguli, GPF, YXZ, vt & GFF, YZK, inter se æquales, ergo ipsi, FPE, ZXT; PFE, ZXT, inter se quoque erunt æquales, cum sint residui rectorum, GPE, GFE, YXZ, YZG; ergo triangula, PEF, XTZ, pariter similia erunt. Erit ergo, AP, ad, PG, vt, KX, ad, XY; PG, ad, PF, vt, XY, ad, XZ; & PE, ad, PE, vt, XZ, ad, XT, ergo ex æquali, AP, ad, PE, erit vt, KX, ad, XT, & sunt anguli, AEP, KTX, recti, ergo triangula, APE, KXT, similia erunt, & anguli, APE, KXT, æquales, qui sunt inclinationes planorum, AV, KA, ad plana, VH, A&, ad eandem partem, quod ostendendum erat.

47. Primi Elem.

Defin. 3. Vndec. Elem.

48. Primi Elem.

Defin. 6. Vndec. Elem.

6. Sexti Elem.

7. Sexti Elem.

LEMMATA II.

IN eadem antecedentibus hura si supponamus propositas esse duas similes quacunque rectilineas figuras, AV, KA, inter se, necnon, HV, & A, convenientes in homologis lateribus vtriusque communibus, GV, YA, sint autem homologæ inter se, AG, KY; HG & Y; & ipsæ figuræ æquæ ad eandem partem inuicem inclinatæ. Dico angulos, AGH, KY&, æquales esse, & circa eodem latera proportionalia, quod etiam de angulis, DVN, QAB, pariter verum esse ostendemus.

flux. def. 1. Sexti EL

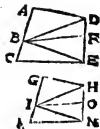
Hoc

Hoc autem ex Propol. 26. huius facile comprehendemus, sunt. n. (ijdem vt ibi constructis) duo opposita plana parallela tangencia figurarum, AV, KA , ipsa, BD, HV ; $LQ, \& A$, quibus incidunt plana figurarum similium, AV, KA , eque ad eandem partem inclinata, quæ sint nobis tanquam prima, ijdem autem incidunt etiam secunda plana prima diuidentia, nempe plana, AGH, KYT , anguli autem, $HGV, \& YA$, sunt æquales, qui nempe continentur communibus sectionibus primorum, & secundorum planorum cum planis, $HV, \& A$, quæ sunt duo parallelorum planorum, similiter anguli, AGV, KYA , (contenti communibus sectionibus primorum, & secundorum planorum, & communibus sectionib. primorum planorum, & ipsorum, $HV, \& A$,) sunt æquales, sunt. n. similium figurarum, AV, KA , ergo etiam anguli, AGH, KY , & æquales erunt, vt in Propol. 26. iam ostensum est. Cum autem figure, AV, KA , sint similes, & AG, KY , latera homologa, erit, $AG, ad, GV, vt, KY, ad, YA$, ostendemus autem eadem ratione, $VG, ad, GH, eise vt, AY, ad, Y$, & ergo ex equali, $AG, ad, GH, erit vt, KY, ad, Y$. Eodem modo probabimus angulos, DVN, QAR , æquales esse (sive plana, $AH, DN; K, Q$, sint parallela, sive non, hoc. n. nihil refert) & circa eos latera esse proportionalia, quod ostendere opus erat.

L E M M A I I I.

SI in similibus rectilincis figuris, iuxta Euclidem, ducantur rectæ lineæ quęcumque, earundem latera homologa similiter ad eandem partem diuidentes, ipse diuident easdem in similes figuras, similes autem erunt, quę ad eandem partem diuidentium linearum constituentur, & ipsæ secantes earundem erunt homologa latera.

Sint similes rectilincæ figuræ iuxta Euclidem, $ACED, GMNH$, quibus incidant rectæ, BF, IO , secantes latera homologa, AC, GM ; necnon, DE, HN , similiter ad eandem partem, vt, AC, GM , in punctis, B, I , & DE, HN , in punctis, F, O . Dico figuras ab eisdem constitutas ad eandem partem, nempe, $BADE, IGH O$; $BCFE, IMNO$, inter se similes esse. Ducantur à punctis, B, I , ad angulos oppositos rectæ lineæ, BD, BE, IH, IN , vt si figuræ sint quadrilateræ, vel multilateræ, in triangula disceparentur. Quoniam ergo, AC, GM , similiter diuiduntur in, B, I , erit, $BA, ad, IG, vt, AC, ad, GM$,

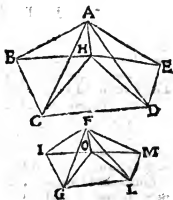


GM, idest, vt, AD, ad, GH, ergo permutando, BA, ad, AD, 6. Sexti
 erit vt, IG, ad, GH, & anguli, BAD, IGH, sunt æquales, er
 Elem.
 go, BAD, IGH, erunt triangula similia, ergo anguli, ADB, G
 HI, æquales erunt, sunt autem æquales etiam, ADF, GHO, er
 go reliqui, BDF, IHO, erunt æquales, est verò, BD, ad, DA,
 vt, IH, ad, HG, &, AD, ad, DF, vt, GH, ad, HO, ergo ex
 æquali, BD, ad, DF, est vt, IH, ad, HO, ergo triangula, BD
 F, IHO, pariter similia erunt, & anguli, DFB, HOI, inter se,
 necnon, DBF, HIO, inter se æquales, ergo anguli, ABF, GIO,
 ADF, GHO, erunt etiam æquales, & figuræ, ABFD, GIOH,
 æquiangulæ, & cum, BA, ad, DF, FB, binæ sint in eadem ratio
 ne cum, IG, GH, HO, OI, patet, quod etiam circa æquales an
 gulos sunt latera proportionalia, ergo ipsæ figuræ, BADF, IG
 HO, similes erunt. Eodem autem modo ostendemus similes esse, B
 CEF, IMNO, patet autem ipsas, BF, IO, esse earum latera ho
 mologa, quod erat demonstrandum.

LEMMA IV.

SI in similibus solidis planis contentis iuxta def. 9. vndec. Elem.
 quatuor quælibet puncta sumantur in vnoquoq; eorundem (non
 tamen in eodem plano constituta) ad quæ anguli solidi æquales ter
 minantur, illaq; iungatur rectis lineis, sicut similes pyramides trian
 Defin. 7.
 S xti Fl.
 gulate comprehensæ sub triangulis, iisdem rectis lineis iungentibus
 contentis.

Sint similia solida, AHCD, FO
 GL, iuxta def. 9. vndec. Elem. & in
 ijs accepta quatuor quæcumq; pun
 cta, nempe, A, H, C, D, in vno,
 &, F, O, G, L, in alio solido, quæ
 non sint in eodem plano, sed ad an
 gulos æquales constituta, iungantur
 quæ rectis lineis, AH, AC, CD, C
 H, HD; FO, FG, FL, OG, G
 L, LO, siue hæc iungentia sint ipso
 rum similibus solidorum latera. Di
 co pyramides, AHCD, FOGL,
 similes esse. Vel ergo planas py
 ramides continentia sunt in ambitu



solidorum, vt ex.gr. CHD, GOL, & tunc erunt similia, ex ipsa de
 finitione, vel non sunt in ambitu, tunc autem probandum est nihi
 lominus esse similia, vt non sint in ambitu ipsa triangula, ACH, F

H GO,

5. Sexti
Elem.

GO, sint verò in ambitu triangula, ABC, FIG; ABH, FIO, HBC, OIG, ergo tria hæc tribus iam dictis similia erunt, ergo & bases, ACH, FGO, similes erunt, nam cum sit, AC, ad, CB, vt, FG, ad, GI; BC, ad, CH, vt, IG, ad, GO, erit ex æquali, AC, ad, CH, vt, FG, ad, GO, eadem ratione ostendemus, CH, ad, HA, esse vt, GO, ad, OF, ex quo habebitur ex æquali, CA, ad, AH, esse vt, GF, ad, FO, ergo triangula, ACH, FGO, similia erunt. Eodem modo probabimus triangula, AHD, FLO, ACD, FGL, esse similia, ex quo concludemus iptas pyramides similes esse. Quod si tria triangula ad, B, I, terminantia omnia non sint in ambitu, ostendemus tamen illa esse similia, erunt. n. vel bases pyramidum, quarum tria triangula verticalia erunt in ambitu, vel saltem aliarum pyramidum, quarum triangula similia esse probabuntur, quia erunt bases pyramidum tria triangula verticalia in ambitu habentium, ad hæc. n. tandem deuenire necesse erit: Igitur ostensum est, quod proponebatur.

C O R O L L A R I V M.

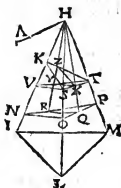
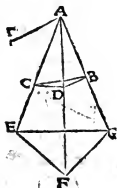
Quia verò in pyramidibus triangulatis, BACH, IFGO, existentibus similibus illarum triangulis verticalibus, bases, ACH, FGO, necessarîo similes esse ostensa sunt, idè ex hoc colligimus si in duabus pyramidibus triangulatis tria verticalia triangula tribus verticalibus triangulis similia sint, etiam bases similes esse.

L E M M A V.

SI duo similia triangula fuerint subiectis planis æquè ad eandem partem inclinata, ita vt communes cum illis sectiones sint eorum latera homologa, quæ tanquam bases assumantur; ab eorum autem verticibus rectæ lineæ in sublimi fuerint constitutæ, angulos æquales cum eorum lateribus homologis continentes, illæ erunt subiectis planis æqualiter inclinatæ, vel eisdem ambo parallelæ; si autem fuerint inclinatæ, & vsque ad subiecta plana producantur, iunganturq; pucta occursum cum extremis basium dictorum triangulorum, pariter hinc constitutæ pyramides similes erunt.

Sint similia triangula, ABD, HPO, subiectis planis æquè inclinata, in basibus, BD, PO, à quorum verticibus, A, H, rectæ lineæ, AC, HN, in sublimi constitutæ contineant cum homologis eorum lateribus angulos æquales, sint nempe anguli, CAB, NHP, necnon, CAD, VHO, inter se æquales. Dico ipsas, AC, HN, subiectis planis esse æqualiter inclinatas, vel eisdem ambo parallelas,

lelas, ac (si sint inclinæ, incidantque ipsis in punctis, C, N, iunganturque, CB, CD, NP, NO,) pyramides, ACDB, HNO P, similes esse. Sumatur ergo in, AD, etiam quantumvis potentia vbiicumq; punctum, F, & accipiatur in, HO, producta, si opus sit, HL, æqualis, AF, & indefinitè extensis lineis, AC, AB, HN, HP, ducantur in planis, FAC, FAG, LHN, LHP, a punctis, F, L, ipsis, AF, HL, perpendiculares, FE, FG, LI, LM, occurrentes ipsis, AE, AG, HI, HM, in punctis, E, G, I, M, & iungantur, EG, IM. Quoniam ergo duo anguli, AFG, HLM, recti, &, FAG, LHM, sunt æquales, & latera, AF, HL, æqualia, erunt etiam, FG, LM, GA, MH, æqualia; eodem modo ostendemus æqualia esse, F



Vid: dicta lib. 7 Annot. Prop. pol. 3.

26. Primi Elem.

E, LI, EA, IH, vnde cum sint æquales, EA, IH, AG, HM, & anguli, EAG, IHM, pariter æquales, etiam bases, EG, IM, æquales erunt, & pyramides, A EFG, HILM, similes, & æquales ad invicem existent. Suspendatur nunc pyramis, A EFG, & ponatur punctum, F, in, L, demittaturque, FG, super, LM, cui congruet, sed & triangulo, EFG, cadente super, ILM, punctum, F, erit in, I, ac latus, AF, in, HL, alioquin duæ eidem plano, ILM, perpendiculares essent eductæ ab eodem puncto, L, quod est absurdum (sunt autem, AF, HL, perpendiculares planis, EFG, ILM, hoc est solo plano, ILM, cum superponuntur, ex eo, quod duabus, IL, IM, sint perpendiculares in puncto, L,) ergo, FA, cadet super, LH, & punctum, A, in, H, vnde etiam, EA, cadet in, IH, &, AG, in, HM, punctum, B, verò cito, quod sit in, T, D, in, S, &, C, in, V, erit etiam, DB, congruens ipsi, ST, CD, VS, &, CB, ipsi, VT, & quia angulus, ABD, æquatur ipsi, HPO, ABD, autem est etiam æqualis, HTS, ergo, HTS, HPO, sunt æquales, &, ST, parallela, OP. Dico etiam triangulum, VST, æquidistare ipsi, NOP, si. n. hoc non sit, quia, ST, est parallela ipsi, OP, poterit per, SI, duci planum ipsi, NOP, parallelum, ducatur, & producat in pyramide triangulum, KST, acta autem à puncto, H, ipsi, OP, perpendiculari, quæ sit, HQ, secante, ST,

4. Primi Elem.

Defin. 10. vndec. El.

7. Pri. El.

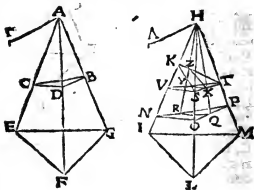
13. Vnd. Elem.

4. Vnd. El.

4. Primi Elem.

16. Vnd.
Elem.20. Vnd.
Elem.14. Vndec.
Elem.16. Vnd.
Elem.33. Vnd.
Elem.

in, X , ducatur in plano, $NO P$, recta, QR , à puncto, Q , perpendicularis ipsi, OP , & iungatur, HR , triangulumque, HRQ , fecet duo triangula, VST , KST , in rectis, YX , ZX . Quia ergo triangula, VST , $NO P$, sunt parallela, erunt etiam ipse, ZX , RQ , parallelæ, sed & ST , OP , sunt parallelæ, ergo anguli, ZXS , RQO , erunt æquales, rectus ergo est etiam ipse, ZXS , sed etiam, SXH , rectus est, ergo, SX , est duabus, ZX , XH , perpendicularis, & subinde plano per ipsas transeunt, & consequenter, SXY , est rectus, vnde, HXZ , erit inclinatio planorum, HST , KST , & HXY , inclinatio planorum, HST , SVT , hæc autem est æqualis inclinationi planorum, HOP , $NO P$, ex hypotefi, idest angulo, HQR , idest angulo, HXZ , ergo angulus, HXY , qui est totum, est æqualis angulo, HXZ , eiuſdem parti, quod est absurdum, ergo absurdum etiam est dicere triangulum, VST , non æquidistare ipsi, $NO P$, æquidistat ergo, & ipsæ, VS , VT , sunt etiam parallelæ ipsis, NO , NP , & triangula, VHS , ipsi, NHO , VHT , ipsi, NHP , necnon, VST , ipsi, $NO P$, sunt similia, ergo pyramides, $HVST$, $HNO P$, sunt similes, est autem pyramis, $HVST$, similis, immo & æqualis, ipsi, $ACDB$, ergo pyramides, $ACDB$, $HNO P$, inter se similes erunt, & anguli, ACB , HVT , ACD , HVS , inter se æquales, ergo, AC , HV , rectæ lineæ stantes in sublimi, & cum ipsis, CD , CB , VS , VT , angulos æquales continentes (à quibus etiam contenti anguli, DCB , SVT , sunt æquales) erunt ad plana triangulorum, CDB , $NO P$, æqualiter inclinata, & sunt ipsæ pyramides, $ACDB$, $HNO P$, similes, vt propositum fuit demonstrare.



Si verò rectæ lineæ angulos æquales cum ipsis, DA , AB , OH , HP , continentes essent ipsæ, AI , HL , quarum, HL , esset parallela plano, VST , probaremus etiam, IA , esse parallelam plano, CDB , alioquin si cum ipso producta concurreret, etiam, HL , ex supra ostensis, producta concurreret cum plano trianguli, VST . Vel præintellectis duabus iam datis, AC , HN , & supposita superiori

con-

construotione, ostenderemus, vt supra, tria latera, ΓA , ΛH ; $A D$, $H O$; $A B$, $H P$; esse ad inuicem superposita, vide si, ΛH , æquidistat plano, $N O P$, etiam necesse esse concluderetur, ΛH , seu, ΓA , in ea constitutam, æquidistare plano, $N O P$, vel ipsi, $V S T$, seu, ΓA , ipsi, $C D B$, quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

EX hoc Lemmate colligitur similitum solidorum, iuxta Euclidis definitionem, latera homologa quæcumque, vel (duabus in ambitu quibuscumque figuris similibus assumptis) iacere in plano similitum distarum figurarum, aut illis æquidistare, vel æqualiter eisdem inclinari; Vt in figura Lemmatis 4. ex. gr. $C D$, $G L$, (assumptis similibus figuris, $H C D$, $O G L$,) iacent in earum plano, $B A$, $I F$, autem vel ambo illi æquidistant, vel eisdem sunt æqualiter inclinata, nam iunctis, $A C$, $A H$, $F G$, $F O$, nisi hæc sint latera dictorum solidorum, fiunt anguli, $B A H$, $I F O$, $B A C$, $I F G$, æquales, & triangula, $A C H$, $F G O$, similia, nam pyramides, $A B C H$, $F I G O$, sunt inter se similes, ipsæ verò triangula, $A C H$, $F G O$, æquæ ad eandem partem inclinantur ipsi, $H C D$, $G L O$, cum eisdem, $A C H D$, $F G L O$, pyramides sint similes ex eodem Lemmate 4. vnde vel, $A B$, $F I$, æquidistant basibus, $C H D$, $G O L$, vel sunt eisdem æqualiter inclinata, idem de cæteris homologis quibuscumque lateribus, quibuslibet similibus figuris in ambitu assumptis comparatis, pariter intelligendum erit.

Lemma 4.

Lemma 1.

LEMMA VI.

SI in similibus solidis iuxta Euclidem ducantur plana duabus quibuscumque similibus figuris in eorum ambitu assumptis parallela, quæ vt eorum bases accipiantur; diuidant autem ducta plana eorum altitudines, respectu dictarum basium captas, similiter ad eandem partem, quæcumque latera homologa ab eisdem secabuntur, similiter ad eandem partem diuidentur.

Sint in similibus solidis iuxta Euclidis definitionem. 9. Vndec. Elementæ assumptæ in ambitu duæ similes figure tanquam bases, ex. gr. triangula similia, $A D B$, $M K N$, sint verò de ambitu etiam descripta triangula similia, $A H I$, $M S Q$; $A H D$, $M S K$; & $I H D$, $Q S K$; quibus etiam adiungantur latera homologa, $I F$, $Q P$, ad vertices, F , P , respectu dictarum basium captos, pertinentia, reliquis dimissis figuris eorum ambitum complementibus, ne nimia fieret Schematis confusio, sint autem à verticibus, F , P , demissæ altitudines respectu basium, $A D B$, $M K N$, ipsæ, $F C$, $P O$, planis basium in

pun.

punctis, P, O, occurrentes, ductis autem duobus planis quomodo-
cumque basibus parallelis, & secantibus altitudines, F C, P O, simi-
liter ad eandem partem in punctis, A T, eadem secant latera homo-
loga ex. gr. I H, Q S, in punctis, Π Δ. Dico in eisdem secari simi-
liter ad eandem partem. Producantur ergo, H I, S Q, hinc inde,
ita ut (nisi hoc ipsis contingat abique eo, quod producantur) ad pla-
na basium, D A B, K M N, & eisdem æquidistantia plana per ver-
tices, F, P, ducta, terminentur, ut in punctis, L, T, G, R, à pun-
ctis verò, G, R, demittantur ad plana dictarum basium perpendicu-
lares, G E, R X, illis incidentes in, E, X, & iungantur, L, E, T X.
Similiter à verticibus, F, P, ad puncta basium, B, N, ducantur, F
B, P N, & iungantur, B C, N O. Quoniam ergo latera homo-
loga, H I, S Q, continentur cum homologis lateribus similium trian-
gulorum, A I D, M Q K, ad eandem partem basibus, D A B, K M
N, inclinatorum (quia, I A D B, Q M N K, essent similes pyrami-
des) angulos æquales, & producta incident in plana dictarum basium

Ex Lem.

4.

in, L, T, erunt eisdem æqualiter inclinata, ergo anguli, G L E, R
T X, erunt æquales,

& G E L, R X T,

sunt recti, ergo trian-

gula, G L E, R T

X, similia erunt, ergo,

G L, ad, R T,

erit ut, G E, ad, R

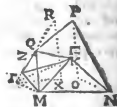
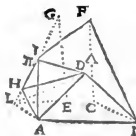
X, id est ut, F C, ad

P O. Viterius si iun-

geremus, F A, F D,

P M, P K, fient

similes pyramides,



Ex Lem.

4.

F D A B, P K M N, unde pateret, F B, P N, esse ad plana basium,

D A B, K M N, similiter inclinata, & subinde angulos, F B C, P

N O, esse æquales, & cum sint recti, F C B, P N O, triangula, F B

C, P N O, esse æquiangula, & ut, F C, ad, P O, ita esse, F B, ad,

P N, etiam manifestum esset, sed ut, F C, ad, P O, ita est, G L, ad,

R T, & ut, F B, ad, P N, ita, P M, ad, P K, & ita quodcumque

latus in solido, F H B, ad, P M, ita, P N, ad, P S, in solido, P S N,

id est ita, I H, ad, O C, ita, H I, ad, S Q,

19. Quin.

Elem.

& ita compositum, P N O, est compositum ex residuis,

T S, O P, & ita, P N O, æquiangula similium pyra-

Ex Lem.

5.

midum, P M, ad, S M, vel ut, H I,

ad, P N, ita, P M, ad, P K, & ita, P N, ad, P S, & reliquam,

id est, P M, ad, P K, ita, P N, ad, P S, & reliquam,

id est, P M, ad, P K, ita, P N, ad, P S, & reliquam,

id est, P M, ad, P K, ita, P N, ad, P S, & reliquam,

id est, P M, ad, P K, ita, P N, ad, P S, & reliquam,

id est, P M, ad, P K, ita, P N, ad, P S, & reliquam,

id est, P M, ad, P K, ita, P N, ad, P S, & reliquam,

id est, P M, ad, P K, ita, P N, ad, P S, & reliquam,

L, ad, R T, vel vt, G II, ad, R Z, sunt enim & ipsæ, G L, R T, similiter ad eandem partem sectę in punctis, II, Z, nam similiter secantur ac, F C, P O, in punctis, A, I, ergo etiam reliqua, I II, ad, Q Z, erit vt tota, G II, ad totam, R Z, idest vt, F C, ad, P O. Eodem modo ostendemus, II H, ad, Z S, esse vt, F C, ad, P O, ergo, I II, ad, Q Z, erit vt, II H, ad, Z S, & permutando, I II, ad, II H, erit vt, Q Z, ad, Z S, sunt ergo latera homologa, I H, Q S, similiter ad eandem partem secta a præfatis planis, quod eodem modo de quibuscumq; homologis lateribus, quæ contingat dictis planis secari, pariter ostendemus, hoc verò demonstrare propositum fuit.

C O R O L L A R I V M.

Ex hoc autem Lemmate insuper habetur nedum latera homologa similitum solidorum, sed etiam, si illa producantur vsq; ad opposita tangenti plana, eorum residua, vel ipsa tota, esse vt eorum dictas altitudines.

THEOREMA XXVI. PROPOS. XXIX:

SI in duobus similibus solidis iuxta defin. 9. vndec. Elem. accipiantur, ac in eorundem ambitu, duæ quæcumq; similes figurę planę tanquam bases, quibus parallela ducantur quæcumq; plana eadem secantia, necnon eorum altitudines, respectu dictarum basium assumptas, similiter ad eandem partem diuidentia. Productæ iisdem in solidis figurę similes erunt iuxta definitionem 10. huius, & omnium homologæ duabus quibusdam regulis æquidistant.

Sint similia solida iuxta defin. 9. vndec. Elem. ipsa, A E F S O G O, T I & p f 8 s, in eorum autem ambitu capiantur similes quæcumque figurę planę, O G F S, f 8 & p, quibus parallela ducantur duo quæcumque plana eadem secantia, necnon & altitudines respectu dictarum basium assumptas similiter ad eandem partem diuidentia, ac in ipsis solidis figuras, L H M P, Y V Z d, producentia. Dico has esse similes figuras planas iuxta defin. 10. huius, omniumque sic productarum in dictis solidis homologas duabus quibusdam regulis, vt ex. gr. ipsis, O S, f p, æquidistare. Igitur figurarum ambientium dicta solida duæ aliæ similes quæcumq; capiantur cum basibus concurrentes, vt ex. gr. o O S, s f p, similia triangula, ducantur autem præfatis basibus opposita tangenti plana, A C, T R, secantia producta

plana figurarum, oOS , $sp f$, in rectis, BC , QR , quibus occurrant, Oo , fs , productæ vt in punctis, B , Q , & iungantur, SB , pQ , esto autem, quod plana figurarum, $LHMP$, $YVZd$, diuideriat plana figurarum, oOS , $sp f$, productæ in rectis, KN , ug , quæ ab ipsis, BS , Qp , BO , Qf , secantur in, I , X , Ku , & iungantur, LK , PI , Yu , dX . Quoniam ergo plana figurarum, $HMP L$, V , ZdY , prædictas altitudines similiter ad eandem partem diuidentia, secant latera homologa, ao , Ts , similiter ad eandem partem in punctis, L , Y , vt etiam, AG , $T8$, in, H , V , erunt figuræ, ALH , TY

Ex Lem.
ant.

Ex Lem.
3.

V , ad eandem partem secantium, HL , VY , constitutæ inter se similes, & earum latera homologa ipsæ, HL , VY ; eodem modo ostendemus similes esse ipsas, $EALP$, IT Yd , & earum latera homologa ipsas, $L P$, Yd , sunt autem figuræ, $A EPL$, ALH , inuicem ad eandem partem æquè inclinatæ, ac ipsæ, Tld

Ex Lem.
1.

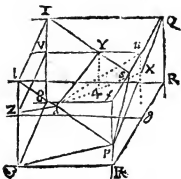
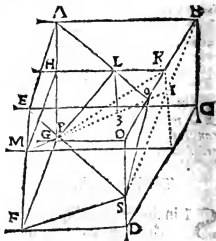
Ex Lem.
2.

Y , TYV , cum sint in planis similium figurarum, $AESo$, $Tlps$, $AGoo$, $T8fs$, quæ sunt inuicem ad eandem partem æquè inclinatæ, ergo anguli, $HL P$, VYd , homologis lateribus contenti erunt æquales, & circa eosdem latera erunt proportionalia. Eodem modo ostendemus cæteros angulos, LPM , YdZ , inter se, necnon, PMH , dZV , ac, MHL , ZVY , æquales esse, & circa æquales angulos latera existere proportionalia,

Defin. 7.
Sex. El.

ergo figuræ, $LHMP$, $YVZd$, similes erunt iuxta Euclidem, ergo etiam similes erunt iuxta defin. 10. huius.

Reliquum est, vt demonstremus earum homologas duabus assumptis



ptis regulis, OS, sp, omnes equidistare: Et quidem si plana secent
 figuras, o OS, sfp, hoc manifestum est, etenim productę lineę ip-
 sis basibus, OS, sp, erunt parallelę, & latera homologa similium
 figurarum ex traiectis planis in solidis productarum. Si verò plana
 parallela secent duas figuras ipsis, o OS, sfp, continuatas, uti fa-
 ciunt plana figurarum, H M P L, V Z d Y, quę etiam secant plana
 figurarum, o OS, sfp, producta in rectis, K N, u g, ostendemus
 ipsas, K N, u g, esse regulas homologarum similium figurarum, L
 H M P, V Z d Y, iunctis, P K, d u. Quia enim, O o, fs, sunt ip-
 sorum similium solidorum latera homologa, producta, ac terminata
 ad basium plana, & oppositorum tangentium, in punctis, O, B; f,
 Q, ideò, B O, Qf, sunt similiter ad eandem partem sectę in, o, s,
 & nedum, O o, fs, sed etiam, o B, s Q, sunt vt eorum altitudines
 sumptę respectu dictarum basium, sed sic etiam sunt ipsę, o S, sp,
 latera homologa, ergo, B o, ad, o S, est vt, Q s, ad, sp, & angu-
 los æquales, B o S, Q s p, complectuntur latera proportionalia, er-
 go triangula, B o S, Q s p, sunt similia, cum verò sint in planis trian-
 gulorum, o OS, sfp, sunt etiam similibus figuris, L P S o, Y d p s,
 eque ad eandem partem inclinata, quibus communia sunt homolo-
 ga latera, o S, sp, ergo anguli, K o L, u s Y, inter se, necnon, P S
 I, d p X, æquales erunt; cum verò, B S, Q p, sint vt dictę altitudi-
 nes, & sic etiam, I S, X p, necnon, P S, d p, (etenim, B S, Q p, in,
 I, X, & E S, I p, similiter secantur, & ad eandem partem, in pun-
 ctis, P, d,) erit, I S, ad, S P, vt, X p, ad, p d, & circumstant an-
 gulos æquales, I S P, X p d, ergo triangula, I S P, X p d, sunt simi-
 lia. Eodem modo ostendemus similia esse triangula, L o K, Y s u.
 Vterius, quia est, K o, ad, o S, vt, u s, ad, sp, & o S, ad, S I,
 vt, sp, ad, p X, & anguli, K o S, u s p, necnon, o S I, s p X, sunt
 æquales, ideò trapezia, K o S I, u s p X, erunt similia, sed etiam fi-
 gurę, L P S o, Y d p s, sunt similes, est autem, K L, ad, L o, vt,
 u Y, ad, Y s, &, o L, ad, L P, vt, s Y, ad, Y d, ergo, K L, ad, L
 P, erit vt, u Y, ad, Y d, eodem modo autem ostendemus, L P, P I,
 I K, K L, binas esse in eadem proportione cum ipsis, Y d, d X, X u,
 u Y. Manifestum est autem si iungeremus, A O, T f, A S, T p, quod
 fierent similes pyramides triangulatę ipsę, A O o S, T f s p, simili-
 bus n. triangulis comprehenderentur, vt meditati compertum fiet,
 ideò plana, A o O, T s f, idest triangula similia, L K o, Y u s, sunt
 æque ad eandem partem ipsis similibus figuris, L P S o, Y d p s, in-
 clinata, cum quibus coincidunt in lateribus homologis, L o, Y s,
 ergo anguli, K L P, u Y d, erunt æquales, quibus circumstant latera
 proportionalia, vt probatum est, ergo triangula, K L P, u Y d, si-
 milia erunt, & erit, K P, ad, P L, vt, u d, ad, d Y, est verò, P L,
 ad,

Elicitur
ex Corol.
Lcm.6.

6.Scx.El.

Ex Lem.
1.

Corollar.
Lcm.8.
Corol.26
huius.

6.Scx.El.

Ex Lem.

4.

Ex Lem.

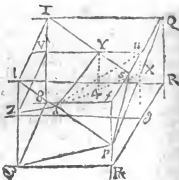
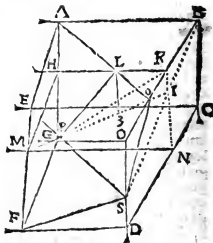
1.

Ex Lem.

2.

ad, PI, vt, dY, ad, dX, ergo ex æquali, KP, ad, PI, erit vt, u
 d, ad, dX, est autem, PI, ad, lK, vt, dX, ad, Xu, ergo trian-
 gula quoque, PKI, duX, pariter similia erunt, vnde anguli, LP
 I, YdX; P I K, dXu, & lKL, XuY, æquales erunt. Ducantur
 nunc in planis figurarum, LHMP, YVZd, a punctis, L, Y, pa-
 rallelæ, KN, ug, ipsæ, L3,
 Y4. Cum igitur anguli, LK
 I, YuX, sint æquales, etiam,
 KL3, uY4, æquales erunt,
 sed & KLP, uYd, sunt æ-
 quales, ergo residui quoque, 3
 LP, 4 Yd, erunt æquales, vn-
 de cum ipsæ, L3, Y4, con-
 tineant cum lateribus homo-
 logis, LP, Yd, ad eandem
 partem angulos æquales, e-
 runt regulæ homologarum simi-
 liliam figurarum, LHMP,
 YVZd, vnde etiam ipsæ, K
 N, ug, vel ipsæ, OS, fp, e-
 runt regulæ homologarum
 earundem, sunt. n. OS, KN,
 parallelæ, vt etiam, ug, fp,
 vnde omnes homologæ simi-
 liliam figurarum, LHMP, Y
 VZd, ipsi regulis, OS, fp,
 æquidistant, quod & de cæ-
 teris eodem modo ostende-
 tur, dum sectio fiet in figuris,
 AESO, Tlps. Quod si fi-
 guris, AESO, Tlps, aliæ
 figuræ planæ continuarentur
 citra cõtactum planorum ba-
 sibus oppositorum, cum his
 in lateribus homologis, AE,
 Tl, conuenientes, quibus ef-
 ferret inclinacõe, parum dissimili
 methode, producentes, OB,
 fQ, vsq; ad tangentia plana, & occursum puncta cum ipsis, S, p;
 iungentes, necnon extrema laterum homologorum, qualia fuerunt,
 LP, Yd, cum extremis rectorum in triangulis (qualia fuerunt, BO
 S, Qfp,) productarum, pariter iungentes, vt fecimus cum ipsis, KI,
 uX,

Corol. 27
 huius.



u X, offenderemus figuras his ductis comprehensas, quales fuerunt; L P I K, Y d X u, esse similes, ex quo propositum quoque nostrum haberemus. Similiter si anguli solidi, Q, f, pluribus, quam tribus angulis planis contineantur, currit tamen demonstratio, cum triangula, G O o, 8 f s, licet non sint in ambitu solidorum sint tamen similia, & eque ad eandem partem inclinata figuris, cum quibus concurrunt, etenim ex. gr. pyramides, S G O o, p 8 f s, si eorum latera iungerentur, similes essent, quapropter ipsius demonstrationis vis non eneruatur. Similiter si, o O S, s f p, non essent triangula, sed aliæ quæcumque figuræ similes, pro, o s, s p, acceptis lateribus ipsis, O o, f s, adiuncta, o s, conterminantibus, & planis ad hæc latera pariter terminantibus, eodem modo demonstratio abiolueretur: hæc omnia autem singillatim prosequi nimis longum, ac schematicis rem aperire, res tricus plena esset, quapropter Lectoris indutria hoc relinquo, si enim ea rectè perceperit, quæ superius explicata sunt, circa huius veritatem minime hæsitabit, infinita autem similitum solidorum planis contentorum varietas efficit, vt agrè ipsius demonstrationis vniuersalitatem oculis subijcere possim, quod Lector æqui, bonique faciat, hæc verò ostendenda proponebantur.

Ex Lem.
4. 3. 1.

THEOREMA XXVII. PROPOS. XXX:

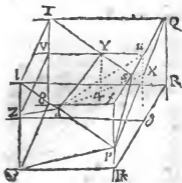
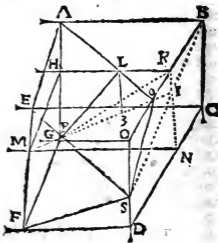
Posita definit. 9. vndec. Elem. similitum solidarum figurarum, sequitur, & mea definitio generalis similitum solidorum.

Assumptis denuo antec. Propos. figuris, sint adhuc similia solida iuxta Euclidem ipsa, A G S, T 8 p. Dico eadem esse etiam similia iuxta definit. 11. huius, quam de similibus solidis generaliter attuli. Sint autem ducta eadem opposita tangentia plana, vt ibi, ita vt duæ similes figuræ, G F S O, f 8 & p, sint plana contactuum ex vna parte, ex alia verò sint plana tangentia, A C, T R, captis autem alijs duabus similibus figuris cum basibus concurrentibus, ipsis nempe, O S o, f p s, illarum plana extendantur, ita vt secent opposita tangentia plana, in rectis nempe, B C, O D; Q R, f R; extensis autem vltcrius planis, G O o, 8 f s, quæ nunc sint in ambitibus solidorum ipsa secent opposita tangentia plana in rectis, A B, T Q; G O, 8 f, & plana figurarum, O S O, f p s, producta in rectis, B O, Q f, secentur verò hæc solida duobus planis oppositis tangentibus parallelis vt-cunque, & sint illa eadem, quæ in solidis produserunt figuras, L H M P, Y V Z d, istæ ergo similes erunt, & earum homologæ, si pro

Juxta def. 10. huius. regulis assumamus iterum ipsas, OS , fp , eisdem quoque æquidistant, ergo in eisdem figuris habebimus etiam homologas alias æquidistantes regulis quibuscumque cum ipsis, OS , fp , angulos æquales ad eandem partem continentibus, cum ergo ipsæ, GO , $8f$, angulos æquales cum ipsis, OS , fp , ad eandem partem contineant, idè omnium homologæ pariter duabus, GO , $8f$, tanquam novis regulis æquidistant, istis autem, quæ tangunt ex vna parte figuras, $GFSO$, 8 & pf , ducantur ex alia parte oppositæ tangentes, FD , & R , ita vt incidant duæ, GO , FD , plano, BD , in punctis, O , D , & duæ, $8f$, & R , plano, QR , in punctis, f , R , sint autem iunctæ, OD , fR . Similiter figurarum, $H M P L$, $V Z d Y$, sint ductæ oppositæ tangentes præfatis regulis, GO , $8f$, parallelæ, planis, BD , QR , occurrentes in punctis, K , N ; u g, iungantur autem, KN , u g, & ita cæterarum sic producibilium figurarum intelligantur ductæ oppositæ tangentes ipsis, GO , $8f$, parallelæ, & productæ vique ad plana, BD , QR , punctaq; occursum iuncta rectis lineis, per quarum omnium extrema transeant lineæ, BO , CD , Qf , $R R$. Cum ergo, GO , $8f$, sint homologarum regulæ, ac oppositæ tangentes figurarum similium, $OGFS$, $f8$ & p , incidant autem illis ad eundem angulum ex eadem parte, OD , fR , & sit, GO , ad , $f8$, vt, O

44. huius.

D , ad , fR , idè, OD , fR , erunt incidentes similium figurarum, $OGFS$, $f8$ & p , & oppositarum tangentium, GO , FD , $8f$, & R . Similiter in figuris, $H M P L$, $V Z d Y$, ostendemus esse ipsarum inci-



incidentes, ac oppositarum tangentium, HK, MN, Vu, Zg , ipsas, KN, ug , si .n. iungeremus, MK, Zu , probaretur, MH , ad, HK , esse vt, ZV , ad, Vu , (sunt .n. similes figuræ, $H M P L, V Z d Y$, necnon, $LPK, Y du$, circumstant autem latera proportionalia angulos æquales, MHK, ZVu , & idè ostenderemus triangula, MHK, ZVu , esse similia, vnde pateret angulos, HKM, VuZ , esse æquales, sed etiam, $HKN, Vu g$, sunt æquales, ergo 6. Sex. 21; pateret angulos, $MKN, Zu g$, esse æquales, sunt autem etiam æquales, MNK, Zgu , ergo triangula, $MKN, Zu g$, essent æquiangula, vnde, MN , ad, Zg , eiset vt, KN , ad, ug , incident autem, KN , ug , oppositis tangentibus, HK, MN, Vu, Zg , ad eundem angulum ex eadem parte, ergo ipsarum tangentium, ac figurarum sunt incidentes, KN, ug , cum verò, KN , ad, ug , sit vt, MK , ad, Zu , idest vt, MH , ad, ZV , vel vt quoduis solidorum latus homologum ad quoduis latus homologum, idest vt, GO , ad, gf , idest vt, OD , ad, fR ; OD , autem ad, fR , sit vt, BO , ad, Qf , idè, KN , ad, ug , erit vt, BO , ad, Qf , & diuidunt similiter ad eandem partem ipsas, BO, Qf , in punctis, Ku , quæ incident ipsi, BC, OD, Qf, Rf , ad eundem angulum ex eadem parte, sunt .n. anguli, $BO D, Qf R$, æquales, quod & de cæteris incidentibus probabitur, ergo figuræ, $BO D C, Qf R R$, quæ capiunt omnes dictas incidentes, sunt similes, & arum homologæ ipsæ incidentes, quarum omnium regulæ sunt, OD, fR , & sunt ipsæ figuræ, BD, QR , æquæ ad eandem partem ipsis basibus inclinatæ, cum sint in planis figurarum, oOS, sfp , ergo dicta solida sunt etiam similia iuxta definitionem 11. huius. Quod si plana, GOo, gfs , non essent in ambitu similiarum dictorum solidorum, facillè tamen ostenderemus portiones solidorum ultra eadem plana existentes esse similes, ac ipsarum, & oppositorum tangentium planorum iam dictorum incidentes reperiri in planis figurarum, BD, QR , cum eisdem integrantes figuras incidentes integrorum similiarum solidorum, ac dictorum oppositorum tangentium, quod speculanti facillè innotescet, hoc autem erat ostendendum.

Defin. 10. huius.

Lem. 1.

L E M M A.

Circuli omnes, necnon semicirculi sunt similes iuxta meam definitionem similiarum planarum figurarum, & eorum, & tangentium oppositarum, quæ ab extremitatibus diametrorum ducantur, incidentes sunt ipsi diametri.

Sint circuli, $ABCD, ONQ$, quorum diametri, AC, OQ , per quorum extrema ducantur tangentes, FA, GC, HO, LQ . Dico hos

hos

hos circulos esse similes iuxta meam definitionem similium planarum figurarum, & eorum, & ductarum oppositarum tangentium incidentes esse ipsas diametros, AC , OQ , quæ etiam de semicirculis verificantur. Diametri ergo, AC , OQ , diuidantur similiter ad eandem partem in punctis, E , M , à quibus vsque ad circumferentiam ducantur ipsæ, EB , MN , parallelæ dictis tangentibus, quæ cum ad angulos rectos diametros diuidant, etiam ipsæ, BE , NM , erunt illis perpendiculares, igitur quadratum,

BE , erit æquale rectangulo, AEC , sicuti quadratum, NM , æquale rectangulo, OMQ , rectangulum autem, AEC , ad quadratum, EC , est vt, AE , ad, EC , idest vt, OM , ad, MQ , idest vt rectangulum, OMQ , ad quadratum, MQ , idest vt quadratum, NM , ad quadratum, MQ , ergo quadratum, BE , ad quadratum, EC , est vt quadratum, NM , ad quadratum, MQ , (quæ autem hic supponuntur, vel petantur ex

7. Scx. El.

8. Lib. 2. sequen. vel 20. Scx. El.

Eucl. lib. Elem. vel ex sequenti meo lib. in quo, quæ hic assumuntur independenter ab hoc Lemmate demonstratur) ergo, BE , ad, EC , erit vt, NM , ad, MQ , permutando, BE , ad, NM , erit vt, EC , ad, MQ , vel vt, AC , ad, OQ , igitur, quæ æquidistant

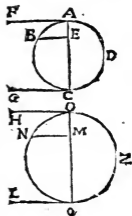
ipsis tangentibus, FA , HO , & similiter ad eandem partem vtrumque diuidunt ipsas, AC , OQ , & circuitus semicirculorum, ABC , ONQ , ad eandem partem, eodem ordine sumptæ, sunt vt ipsæ, AC , OQ , quæ dictis tangentibus incident ad eundem angulum ex eadem parte, quæ ideo sunt earum incidentes, ergo semicirculi, ABC , ONQ , sunt figuræ planæ similes iuxta meam definitionem, quarum & oppositarum tangentium, quæ ab extremitate diametrorum ducuntur, incidentes sunt ipsi diametri; sic etiam patebit semicirculos, ADC , OZQ , necnon circulos, AC , OQ , esse similes, iuxta eandem definitionem; quod ostendendum erat.

Defin. io.

THEOREMA XXVIII. PROPOS. XXXI.

Postis infra scriptis definitionibus similium cylindrorum, & conorum, sequitur definitio generalis, quam de similibus solidis ipse attuli.

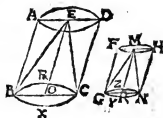
DE-



DEFINITIO.

Similes conī, & cylindri sunt, quorum & axes, & basium diametri eandem inter se proportionem habent. Euclid. lib. 11. Elem. defin. 24.

Verum, quia supradicta definitio non est nisi cylindrorum, & conorum rectorum, ideo aliam, quæ affertur à Commandino tum de rectis, tum etiam de scalenis illi subiungo, quam sufficere ostendere cum mea supradicta concordare, nam hæc Commandini eam, quam Euclides attulit, inuoluit.



DEFINITIO.

Similes conī, & cylindri, siue recti, siue scaleni sunt, quando per axes ductis planis ad rectos angulos basibus, communes sectiones eorum, & basium cum axibus æquales angulos continentes, eandem inter se, quam axes, proportionem habent: Commandinus loco definitionis supra citatæ.

Sint conī, BEC , GMN , & cylindri, AC , FN , similes iuxta proximam definitionem. Dico eosdem esse similes iuxta meam supradictam. Ut autem in simul pro conis, & cylindris fiat demonstratio, supponantur conī, & cylindri iam dicti esse in eisdem basibus, & circa eosdem axes; ducantur ergo in ipsis plana per axes, qui sint, EO , MR , quoniam ergo latera cylindrorum sunt suis axibus parallela, ideo dicta plana transibunt per latera cylindrorum, siue cylindricorum, AC , FN , & per latera conorum, siue conicorum, BEC , MGN , quia per eorum vertices intra ipsos ducuntur, sint autem dicta plana ea, quæ sint ad rectos angulos basibus, quorum & basium communes sectiones, quæ sint, BC , GN , cum axibus æquales angulos continentes eandem inter se, quam axes proportionem habeant, ut fert definitio, sicut igitur in cylindricis parallelogramma, ut, AC , FN , & in conicis triangula, ut, BEC , GMN , & quia anguli, BOE , GRM , sunt æquales, ideo etiam ipsi, BCD , GNH , sunt æquales, & est, BC , ad, CD , ut, GN , ad, NH , ideo parallelogramma, AC , FN , & triangula, BEC , GMN , erunt similia iuxta definitionem Euclidis, & ideo etiam iuxta meam, & quia ipsæ, AD , BC , FH , GN , tangunt figuras, AC , FN , qui-

Defin. 11.

Ex. def. 3; & 4. Cor.

Ex Cor. 5; & ex 16. huius.

87. huius.

quibus incidunt ad eundem angulum ex eadem parte, EO , MR , & quæ diuidunt ipsas, EO ; MR , similiter ad eandem partem existentes parallelæ ipsis, BC , GN , sunt vt ipsæ, EO , MR , ad eandem partem eodem ordine inter ipsas, & circuitum dictarum figurarum compræhensæ, quia quæ sunt ex vna parte sunt æquales ipsis, BQ , GR , & quæ ex alia ipsis, OC , RN , in triangulis autem sunt, vt ipsæ, BO , GR , vel, OC , RN , .i. vt, OE , RM , & idem, earum incidentes, & oppositarum tangentium dictarum erunt ipsæ, EO , MR , quæ tangentes sunt regulæ homologarum similium figurarum, AC , FN , vel, BC , MGN . Vtcrius, quia, BXC , GYN , sunt semicirculi, erunt figuræ planæ similes iuxta meam definitionem, quarum & tangentium, quæ per extrema, BC , GN , ducuntur erunt incidentes ipsi diametri, BC , GN , vt probatum fuit, veluti idem patet de semicirculis, BRC , GZN , & de quibuscumq; alijs, quæ diuidunt ipsas, EO , MR , similiter ad eandem partem, & consequenter diuidunt etiam altitudines eorûdem respectu basium sumptas similiter ad eandem partem, & de ijs, quæ per extrema, E , M , ducuntur, habemus igitur cylindros, AC , FN , siue conos, BC , GMN , quorum ducta sunt plana opposita tangentia dictorum solidorum homologis figuris parallelæ, quæ sunt plana, $BRCX$, AD ; $GYNZ$, FH , quibus inciderunt duo plana ad æquales angulos ex eadem parte, illa nempe, in quibus sunt ipsa parallelogramma, AC , FN , vel triangula, BC , quia sunt recta ad bases .i. ad dicta tangentia, ipsæ autem figuræ .i. parallelogramma, vel triangula inuenta sunt esse similia, quarum homologarum regulæ oppositæ tangentes, AD , BC ; FH , GN , quarum sunt incidentes, EO , MR , earum autem lineæ homologæ, sumptæ regulis dictis tangentibus, repertæ sunt esse incidentes figurarum planarum similium, quæ diuidunt altitudines dictorum solidorum iam dictas similiter ad eandem partem, & oppositarum tangentium, quæ omnes ijs, quæ ducuntur per extrema, BC , GN , tangentes circulos, $BRCX$, $GYNZ$, sunt equidistantes, vt facillè consideranti patebit, ergo cylindri, AC , FN , vel conii, BC , GMN , sunt similes iuxta meam definitionem generalem similium solidorum, quod ostendere opus erat.

THEOREMA XXIX. PROPOS. XXXII.

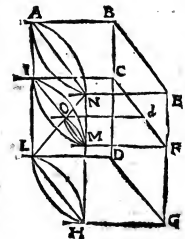
Definitio mea similium conicorum, & cylindricorum concordat cum definitione generali similium solidorum.

Sint

Sint cylindrici quicumque, AH, KY ; seu conici in iisdem basibus, & altitudinibus (vt vna vice vtriuq; demonstrationem aboltantur) NLH, VXY , similes iuxta definit. 7. huius. Dico eorum, etiam esse similes iuxta definit. 11. Quoniam ergo utraque prædicta solida Defn. 7. sunt similia, erunt bases, LH, XY , similes, ducantur earum oppositæ tangentes, quæ sint homologarum regulæ, ipsæ, $LD, HG, \lambda f$, Coroll. 1. Yl , quarum, & prædictarum simi-

lium figurarum incidentes sint ipsæ, DG, fl , quæ etiam pro regulis aliarum homologarum sumi poterunt, sint ergo duæ quæcumque homologæ parallelæ incidentibus, DG, fl , ipsæ, LH, XY , si ergo per has, & latera cylindricorum, vel conicorum iam dictorum extendantur plana, ab ijs producentur in cylindricis similia parallelogramma, & in conicis similia triangula, quæ etiam erunt ad bases æquæ ad eandem partem inclinata. Extendantur ergo per oppositas tangentes, $LD, HG; Xf, Yl$, plana tangentia tam cylindricos, quam conicos iam dictos, & hæc simul cum planis basium indefinitè producantur ad partes incidentium, DG, fl , & tandem per, DG, fl , cum sint parallelæ, extendantur plana ipsi, AH, KY , parallela secantia iam producta plana in rectis, $DG, GE, EB, BD, DE, fl, l$ & Z, Zf, f &, erunt ergo parallelepipedum, AG, Kl , & prismata, $LNGD, XVlf$, ergo erit parallelogrammum, BG , simile ipsi, AH , & Zl , simile, KY , quæ cum sint inter se similia, etiam, BG, Zl , erunt similia, sic etiam ostendemus triangula, EDG , & fl , esse similia, sub intellige iuxta definitionem Euclidis, ergo erunt etiam similia iuxta defin. 10. Ducantur duo plana oppositis tangenti-

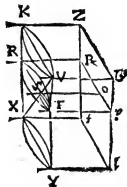
bus intermedia, ac parallelæ, altitudines dictorum solidorum respectu basium, LH, XY , sumptas, similiter ad eandem partem diuidentia,



B. Def. 10.

Coroll.
23.

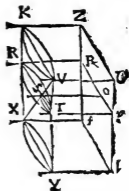
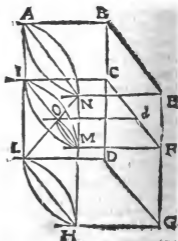
Defin. 7.

Defin. 11.
vndcc. El.24. Vnd.
hlem.

K

quæ

- quæ in cylindricis producant figuras, IM, RT , in conicis verò, OM, ST , fecent verò plana tangentia in rectis, $IC, MF, Od; rR$,
 16. Vnd. Tp, So , istæ ergo erunt ad inuicem parallelæ, & tangent figuras,
 Elem. $IM; RT, OM, ST$, eadem verò plana fecent plana, BG, Zl , in
 Corol. 9. rectis, CF, Rp . Quod ergo figuræ,
 Corol. 18. IM, RT , vel, OM, ST , sint similes
 22. Et 19. basibus, & iisdem similiter positæ
 huius. iam ostensum fuit, ex quo fit, vt &
 ipsarum, & quarumcunq; sic in præ-
 fatis solidis producibilium similium
 figurarum homologæ duabus qui-
 busdam regulis, vt ex.gr. ipsis, $DG,$
 Yl , semper æquidistant. Reliquum
 est autem, vt probemus, CF, Rp .
 vel, dF, op , esse prædictarum in-
 cidentes. Cum ergo duæ, IC, CF ,
 10. Vnd. duabus, LD, DG , æquidistant anguli,
 Elem. ICF, LDG , æquales erunt,
 sic etiam probabitur esse æquales,
 $R Rp, Xfl$, cum verò, IC , sit etiam
 æqualis, LD , & $R Rp$, ipsi,
 Xf , necnon, CF , ipsi, DG , &
 $R Rp$, ipsi, fl , erit, IC , ad, $R Rp$, vt,
 CF , ad, $R Rp$, & incidunt ipsis, IC ,
 $MF, R Rp, Tp$, ad eundem angulum
 ex eadem parte, ergo, CF, Rp ,
 erunt incidentes similium figura-
 rum, IM, RT , & oppositarum tan-
 gentium, $IC, MF; R Rp, Tp$, eadem
 24. huius. ratione demonstrabimus, $dF,$
 op , esse incidentes similium figura-
 rum, OM, ST , & oppositarum tan-
 gentium, $Od, MF; So, Tp$, est
 autem, dF, ad, op , vt, $dE, ad,$
 $o&$, scilicet, vt, $dE, ad, f&$, nam,
 $dE, f&$, sunt similiter ad eandem
 17. Vnd. partem diuisæ in punctis, do , (ete-
 Elem. nim altitudines dictorum solidorum per plana, IF, Rp , similiter ad
 eandem partem diuiduntur) ergo, dF, op , æquidistantes oppositis
 tangentibus, $BE, DG, Z&, fl$, sunt homologæ figurarum simili-
 um, EDG , & fl , quarum & oppositarum tangentium incidentes
 erunt ipsæ, ED , & $f&$. Eodem modo ostendemus, CF, Rp , esse
 ho-



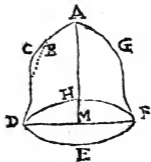
homologas similium figurarum, $B G$, $Z I$, quarum & oppositarum tangentium, $B E$, $D G$, $Z \&$, $f l$, incidentes sunt ipsæ, $B D$, $Z f$, hæc autem etiam in ceteris traiectis planis, vt dictum est contingere ostendemus, ergo, $B G$, $Z I$, $E D G$, & $f l$, erunt figurę incidentes similium cylindricorum, seu conicorum iam dictorum, & oppositorum tangentium planorum, $A E$, $L G$, $K \&$, $X L$, ergo in his solidis adfunt omnes conditiones defin. 11. vt recolenti eadem patefiet, igitur erunt iuxta eandem pariter similia. Aduerte autem, quod supposui planum, $N G$, tangere tam cylindricum, quam conicum, vt etiam, $V I$, ne figura nimis confunderetur, & vt fierent latera, $E G$, & I , communia parallelogrammis, $B G$, $Z I$, & triangulis, $D E G$, $f \& l$, valebit tamen eadem demonstratio etiam si plana ducta per, $H G$, $Y I$, tangentia cylindricos, diuersa sint à planis per easdem, $H G$, $Y I$, transeuntibus, ac tangentibus ipsos conicos, sicut enim semper similia triangula, $E D G$, & $f l$, etiam si non adiacent lateribus, $E G$, & I , vt consideranti facillè patebit, hæc autem nobis ostendenda erant.

THEOREMA XXX. PROPOS. XXXIII.

SI solidum rotundum secetur plano per axem, producta in eo figura erit, quæ per reuolutionem ipsum genuit.

Sit solidum rotundum, cuius axis, $A M$, basis circulus, $H D E F$, hoc autem plano per axem, $A M$, ducto secetur, quod in eo producat figuram, $A C D F G$. Dico hanc esse eam, quæ per reuolutionem ipsum solidum genuit. Defin. 6.

Intelligatur reuolui circa, $A M$, figura, quę dictum solidum genuit, donec reperiatu posita in plano figurę, $A C D F G$, igitur vel harum figurarum perimetri congruunt, vel non, si sic ex illis facta erit vna figura, ea nempe, quæ per reuolutionem generat dictum solidum, si verò non congruant, aliquis punctus alterius ambituum dictarum figurarum non reperietur in reliquę ambitu, sit is punctus, B , qui reperietur in ambitu figurę, quæ per reuolutionem dictum solidum descripsit, quæ sit ipsa, $A B D F G$, & non in ambitu figurę, $A C D F G$, cuius ambitus est communis sectio plani ducti per axem, & su-



perficiei dictum solidum ambientis, quia g. tur, B, non est in communi sectione iam dicta, & est in plano figuræ, A C D F G, igitur erit intra, vel extra superficiem ambientem dictum solidum, est autem in ambitu figuræ, quæ tali ambitu dictam superficiem describit, ergo erit in ipsa superficie ambiente, & non erit, quod est absurdum, non igitur aliquis punctus ambitus figuræ, quæ dictam solidum per reuolutionem generat est extra ambitum figuræ, A C D F G, igitur isti ambitus, & consequenter ipsæ figuræ sibi inuicem congruunt, & fit vna figura, ea scilicet, quæ per reuolutionem dictum solidum rotundum generat, quod erat demonstrandum.

THEOREMA XXXI. PROPOS. XXXIV.

SI solidum rotundum secetur plano ad axem recto, fiet con-
cepta in ipso figura circulus, cuius centrum erit in axe.

Sit solidum rotundum, cuius axis, A C, & figura, quæ ipsum per reuolutionem genuit ipsa, A B C D, secetur autem plano ad axem recto, ex quo in ipso producatum figura, M B N D. Dico hanc esse circulum, cuius centrum erit in axe, vt, E, sit autem communis sectio plani recti ad axem, & figuræ, A B C D, recta, B D, quia ergo

Defin. 6.

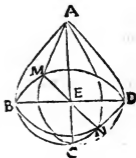
figura, A B C D, est circa axem, ipsa autem, B D, quæ rectè axem secat, vna est ex ordinatim ad ipsam axem applicatis, idè ab ea bifariam diuiditur in puncto, E, ducatur nunc aliud planum per axem, quod in dicto solido producat figuram, A M C N, quæ secet figuram, M B N D, in recta, M N, erit ergo hæc figura eadem ei, quæ per reuolutionem dictam genuit solidum, & idè erit figura circa axem, ad quam ordinatim applicatur, M N, cum ipsa rectè axem, A C, diuidat, ergo, M N, bifariam diuiditur in, E, eodem pacto quascumq; alias communes sectiones figurarum per axem, A C, transeuntium, & figuræ, B N D M, ostendimus bifariam diuidi in, E.

Ex antec.

Vt, E, sit autem communis sectio plani recti ad axem, & figuræ, A B C D, recta, B D, quia ergo figura, A B C D, est circa axem, ipsa autem, B D, quæ rectè axem secat, vna est ex ordinatim ad ipsam axem applicatis, idè ab ea bifariam diuiditur in puncto, E, ducatur nunc aliud planum per axem, quod in dicto solido producat figuram, A M C N, quæ secet figuram, M B N D, in recta, M N, erit ergo hæc figura eadem ei, quæ per reuolutionem dictam genuit solidum, & idè erit figura circa axem, ad quam ordinatim applicatur, M N, cum ipsa rectè axem, A C, diuidat, ergo, M N, bifariam diuiditur in, E, eodem pacto quascumq; alias communes sectiones figurarum per axem, A C, transeuntium, & figuræ, B N D M, ostendimus bifariam diuidi in, E.

Vt, E, sit autem communis sectio plani recti ad axem, & figuræ, A B C D, recta, B D, quia ergo figura, A B C D, est circa axem, ipsa autem, B D, quæ rectè axem secat, vna est ex ordinatim ad ipsam axem applicatis, idè ab ea bifariam diuiditur in puncto, E, ducatur nunc aliud planum per axem, quod in dicto solido producat figuram, A M C N, quæ secet figuram, M B N D, in recta, M N, erit ergo hæc figura eadem ei, quæ per reuolutionem dictam genuit solidum, & idè erit figura circa axem, ad quam ordinatim applicatur, M N, cum ipsa rectè axem, A C, diuidat, ergo, M N, bifariam diuiditur in, E, eodem pacto quascumq; alias communes sectiones figurarum per axem, A C, transeuntium, & figuræ, B N D M, ostendimus bifariam diuidi in, E.

Defin. 6.



E, E

E, ED, erunt æquales, eodem pacto ostendemus quascumque ductas à puncto, E, ad lineam ambientem, MBND, esse æquales culibet ipsarum, BE, EN, ED, EM, ergo figura, MBND, erit circulus, cuius centrum, E, in axe reperitur, quod erat ostendum.

COROLLARIUM.

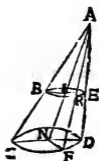
Colligimus autem ipsas, BD, MN, communes sectiones figurarum per axem dactarum, & circularum, qui per sectionem dicti solidi per plani ad axem recti in eo producantur, esse eorum diametros, cum per centrum transeant.

THEOREMA XXXII. PROPOS. XXXV.

SI quicunq; conus secetur plano basi æquidistante coniecta in cono figura erit circulus centrum in axe habens.

Si conus sit rectus patet hoc ex antecedenti Propos. cæterum si sit scalenus, qualis sit conus, ACFD, qui secetur plano basi, CFD, æquidistante, quod in eo producat figuram, BRE. Dico ipsam esse circulum, centrum in axe habentem. Secetur ergo plano per axem, quod in eo producat triangulum, ACD, cuius & circuli, CFD, communis sectio sit, CD, quæ erit diameter dicti circuli; eius autem & figuræ, BRE, communis sectio, BE; sunt igitur trianguli, ABI, ACN, similes, quia, BI, æquidistant ipsi, CN, ergo, CN, ad, NA, erit vt, BI, ad, IA, eodem modo ostendemus, AN, ad, ND, esse vt, BI, ad, IE, ergo, ex æquo, CN, ad, ND, erit vt, BI, ad, IE, sed, CN, est æqualis, ND, ergo &, BI, ipsi, IE. Ducatur nunc aliud planum per axem, quod producat triangulum, ANF, quodq; secet figuram, BRE, in, IR, fient ergo trianguli, AIR, ANF, æquianguli, ergo, FN, NA, NC, erunt lineæ in eadem proportione cum ipsis, RI, IA, IB, ergo, ex æquo, FN, ad, NC, erit vt, RI, ad, IB, sed, FN, est æqualis ipsi, NC, ergo, RI, erit æqualis ipsi, IB, eodem modo ostendemus quacumque ductas à puncto, I, ad lineam ambientem, BRE, esse æquales ipsi, BI, ergo figura, BRE, erit circulus, cuius centrum, I, quod ostendere oportebat.

16. huius.
4. Sex. El.



COROLLARIUM.

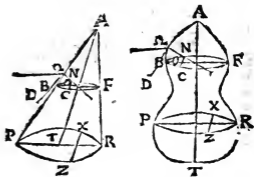
Hinc patet ipsam, BE , communem sectionem trianguli per axem ducti, & circuli, $BR E$, esse eiusdem diametrum, cum per eius centrum transeat.

THEOREMA XXXIII. PROPOS. XXXVI.

SI solidum rotundum, vel conus scalenus secetur plano per axem, deinde secetur solidum rotundum (nisi basim habeat, quæ circulus erit) plano ad axem recto circum producente, in cuius plano, & illius, qui est conici basis perpendicularis ducta sit basi figuræ per axem ductæ; deinde sumpto puncto in ambitu figuræ per axem, per illum æquidistans dictæ perpendiculari ducta fuerit recta linea, hæc tanget dicta solida, at si sumptus punctus sit extra talem ambitum, sed in superficie ambiente dicta solida, quæ per ipsum ducitur eadem æquidistans intra dicta solida cadet, & producta vsque ad superficiem ambientem à figura ducta per axem bifariam dividetur.

Sit solidum rotundum, $ABTF$, vel conus scalenus, APR , in basi circulo, $PXRZ$, quorum axis, AT , & si solidum rotundum non habeat basim, secetur plano recto ad axem, quod in eo producat circum, $PXRZ$, secentur autem ambo planis per axem, quæ producant in solido rotundo figuram, $APTF$, & in cono triangulum, APR , deinde in plano circuli, $PZR X$, ducatur ipsi, PR , communi sectioni dicti circuli, &

figuræ per axem, perpendicularis, ZX , & sumpto puncto in ambitu figuræ per axem, ut, z , per ipsum ducatur recta linea parallela ipsi, ZX .

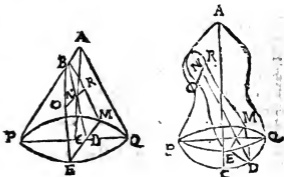


ZX. Dico hanc tangere dicta solida, si enim non tangit secet, veluti, $D \perp N$, in puncto, N , igitur punctus .n. erit extra planum figuræ per axem, nam ipsa, $D \perp N$, est parallela ipsi, ZX , quæ est ad rectos angulos figuræ per axem transcuntis, & ideo etiam, $D \perp N$, est illi ad rectos angulos, occurrit autem illi in puncto, 2 , ergo non occurreret illi in alio puncto, ergo, N , est extra planum figuræ per axem, ducatur per, N , planum æquidistans plano, $PXRZ$, circuli, quod producat circulum, $BNFC$, & sit, BF , communis sectio ipsius circuli, & figuræ per axem, quæ erit ipsius circuli diameter, & N , non erit aliquis punctorum, BF , ergo si ab, N , duxerimus ipsi, ZX , parallelam, ut, NC , cum etiam, BF , sit parallela ipsi, PR , continebunt angulos æquales, sed, ZX , secat perpendiculariter, PR , ergo, NC , secabit perpendiculariter, BF , ducta non ab extremitate diametri, ergo intra circulum, $BCFN$, erit, & bifariam secabitur ab ipsa, BF , ergo non transibit per circuitum figuræ per axem ductæ, & per ipsum transit, $D \perp N$, ergo, NC , $N \perp D$, sunt duæ rectæ lineæ eidem, ZX , parallelæ, ergo etiam inter se erunt parallelæ, quod est absurdum, cum transeant per idem punctum, N , ergo ducta per punctum ambitus figuræ per axem parallela ipsi, ZX , tanget dicta solida: Sit nobis nunc punctus, N , pro puncto utcumq; in superficie ambiente sumpto extra circuitum figuræ per axem, à quo ducta ipsi, ZX , parallela, occurrat producta superficiem ambienti in puncto, C , ostendemus ergo eodem modo supra adhibito (postquam dixerimus per, N , planum circulo, $PXRZ$, æquidistans, quod in solido producat circulum, $BNFC$,) ipsam, NC , intra circulum, $BNFC$, cadere, & bifariam diuidi à recta, BF , siue à figura per axem ducta (nam est, NC , perpendicularis ipsi, BF ,) quod ostendere opus erat.

THEOREMA XXXIV. PROPOS. XXXVII:

SI solidum rotundum, vel conus scalenus, secentur plano per axem, & deinde alio plano secentur, cuius, & vnus planorum rectè axem secantium communis sectio sit recta linea perpendicularis communi sectioni eiusdem, & plani per axem; figura à secundo secante plano in solido producta erit circa axem, in cono scaleno autem erit circa axem, vel diametrum, & axis, vel diameter erit communis sectio per dicta secantia plana productarum figurarum.

Sit solidum rotundum, $A P C Q$, & conus calenus, $A P E Q M$; utraque autem secetur plano per axem, quod producat figuram, $A P C Q$, in solido, & triangulum, $A P Q$, in cono, deinde secentur altero plano, cuius, & plani recti ad axem (quo productus sit circulus, $P M Q E$,) communis sectio sit, $E M$, perpendicularis ipsi, $P Q$, communi sectioni eiusdem, & plani per axem ducti. Dico figuram, $B E D M$, in solido rotundo esse circa axem, & in cono circa axem, vel diametrum, & axem, vel diametrum esse, $B D$, communem sectionem productarum figurarum. Si ergo secundo producta figura per axem pariter ducta esset, manifestum est in solido rotundo fore figuram talem circa axem, & in cono fore triangulum, in quo axis, $A C$, si secaret æquidistantes basi talis trianguli ad angulos rectos, eum illas bifariam diuidat, esset talis triangulus figura circa axem, si verò ad angulos non rectos, esset figura circa diametrum, nempe circa, $A C$. Sed non transeat hæc secunda figura per axem, fiat autem puncta, B, D , extrema communis sectionis primæ, & secundæ figuræ, idest ipsius, $B D$, ergo in solido rotundo (& in cono, dum triangulus, $A P Q$, per axem ductus transit etiam per ductam à vertice, A , perpendicularem ipsi basi, $P E Q M$, idest cum triangulus, $A P Q$, est erectus basi, $P E$



$Q M$,) ipsa, $E M$, communis sectio secundi plani secantis, & $P Q$, plani rectè axim secantis, cum sit perpendicularis, $P Q$, communi sectioni planorum, $PEQM, APQ$, ad inuicem erectorum, erit etiam perpendicularis plano per axem, & ideo erit perpendicularis ad omnes per eam in tali plano transeuntes, ideo, $B D$, rectè secabit ipsam, $E M$, & quæ ducuntur per extrema, $B D$, æquidistantes ipsi, $E M$, tangent ipsa solida, unde, B, D , erunt oppositi vertices figurarum, $B E D M$, respectu ipsius, $E M$, sumptarum, quare, $B D$, secabit omnes illi æquidistantes in figura, $B E D M$, ductas, & quia sumpto in figura, $B E D M$, puncto, qui non sit vertex respectu ipsius, $E M$, Coroll. 1. & ab eo ducta eidem, $E M$, parallela intra figuram cadit, sit is punctus, O , a quo ipsi, $E M$, sit ducta parallela ipsa, $O R$, igitur, $O R$,

ter-

terminans in ambientem superficiem bifariam diuidetur ab ipsa, *E I*. Ex antec.
 ut in, *N*; Sic ostendemus, *B D*, diuidere cæteras omnes ipsi, *E M*,
 æquidistantes in superficiem ambientem hinc inde terminatas, &
 quia, *B D*, secat, *E M*, ad angulos rectos, cæteras omnes iam di-
 ctas bifariam, & ad angulos rectos secabit, igitur tunc figura, *E E D*
M, erit circa axem, *B D*, siue in solido rotundo, siue in cono: Si au-
 tem triangulus, *A P Q*, non transeat per ductam ipsi plano perpen-
 dicularem, tunc eodem modo, quo supra ostendemus, *B D*, secare
 omnes æquidistantes ipsi, *E M*, bifariam, & quia triangulus, *A P Q*,
 non tranlit per perpendicularem basi, neque erit erectus ipsi basi, *P*
E Q M, ergo angulus, *E D B*, non erit rectus, nam si esset rectus,
 cum sit etiam rectus, *E D P*, planum circuli, *P E Q M*, esset erectum
 triangulo, *A P Q*, & ille huic, quod est contra suppositum, igitur, 4. Vndec.
B D, secabit, *E M*, & consequenter cæteras iam dictas illi æquidi- Elem.
 stantes bifariam, & ad angulos non rectos, igitur figura, *E B M*, tunc
 erit circa diametrum, & erit diameter ipsa, *B D*, siue axis, in supra-
 dicto casu tum in cono, tum etiam in solido rotundo, quod erat osten-
 dendum.

C O R O L L A R I V M.

Hinc colligitur in cono, si triangulus per axem ductus sit erectus
 basi, fieri dictam figuram circa axem; si verò non sit erectus, sed
 inclinatus eidem, fieri figuram circa diametrum; in solido rotundo au-
 tem fieri semper figuram circa axem.

THEOREMA XXXV. PROPOS. XXXVIII.

Si conus secetur plano per axem, secetur deinde altero pla-
 no secante basim conii secundum rectam lineam, quæ ad
 basim trianguli per axem sit perpendicularis, cuius & trian-
 guli per axem cõmunis sectio sit parallela vni laterum trian-
 guli per axem; quadrata ordinatim applicatarum ad axim,
 vel diametrum figuræ in cono secundo plano productæ, æqui-
 distantium eiusdem, & basim communi sectioni erunt inter se,
 ut abscissæ per eandem ordinatim applicatas versus verticem
 sumptæ ab eisdem axibus, vel diametris iam dictis.

16. huius. Sit conus, cuius vertex, A , basis circulus, $C E F D$, secetur autem prius plano per axem, quod in eo producat triangulum, $A C F$, secetur deinde altero plano basim secante secundum rectam, $E D$, perpendicularem ipsi, $C F$, cuius in cono concepta sit figura, $B E D$, erit ergo hæc figura circa axem, vel diametrum, $B V$, quæ sit parallela ipsi, $A F$, cuius vertex respectu ipsius, $E D$, erit, B ; ducatur à puncto, M , qui non sit punctus, B , sed utcumque sumptus in linea, $E B D$, extra basim, $E D$, ipsi, $E D$, recta æquidistans, $M O$, producta vsq; ad ambientem superficiem, cui occurrat in, O , igitur hæc erit vna ex ordinatim applicatis ad axim, vel diametrum, $B V$, æquidistans ipsi, $E D$, quæ bisariam diuidetur ab ipsa, $B V$, in puncto, N , ducatur per, N , ipsi, $C F$, parallela, $H R$, est verò etiam, $M O$, ipsi, $E D$, parallela, ergo planum transiens per, $H R$, $M O$, æquidistabit basi, $C E F D$, & quatuor puncta, H , M , R , O , erunt in circuli

15. Vnde-
cim. El.

15. huius.

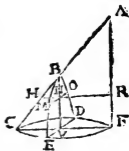
14. Secun.
Elem.

4. Sexti
Elem.

4. Secun.
Elem.

periphæria, cuius diameter, $H R$, quem secat, $M O$, perpendiculariter, nam angulus, $H N M$, æquatur angulo, $C V E$, qui rectus est, ergo quadratum, $M N$, æquatur rectangulo, $H N R$, & quadratum, $E V$, rectangulo, $C V F$, est autem rectangulum, $C V F$, ad rectangulum, $H N R$, (quia eorum altitudines, $V F$, $N R$, sunt æquales, cum sint parallelogrammi, $N F$, opposita latera) vt basis, $C V$, ad, $H N$, ex prima Sexti Elem. vel ex quinta libro sequentis independenter ab hac demonstrata, & quia, $H N$, est parallela

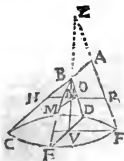
ipsi, $C V$, trianguli, $B H N$, $B C V$, sunt æquianguli, ideo, vt, $C V$, ad, $H N$, ita, $V B$, ad, $B N$, ergo rectangulum, $C V F$, ad rectangulum, $H N R$, idest quadratum, $E V$, ad quadratum, $M N$, erit vt, $V B$, ad, $B N$, est autem quadratum, $E D$, quadruplum quadrati, $E V$, nam est æquale quadratis, $E V$, $V D$, & rectangulis sub, $E V D$, bis, idest duobus quadratis, $E V$, quæ cum prædictis conficiunt quatuor quadrata, $E V$, & eadem ratione quadratum, $M O$, est quadruplum quadrati, $M N$, ergo quadratum, $E D$, ad quadratum, $M O$, erit vt, $V B$, ad, $B N$, quæ sunt abscissæ ab ipsa axi, vel diametro, $B V$, versus verticem, B , per ipsas, $E D$, $M O$, ordinatim ad ipsam, $B V$, applicatas, quod ostendere opus erat; hæc autem vocatur ab Apollonio Parabola.



THEOREMA XXXVI. PROPOS. XXXIX.

Iisdem positis, præterquam quod, BV , sit parallela ipsi, AF , sed posito, quod concurrat cum eodem latere, FA , versus verticem producto, ut in, Z . Dico quadratum, ED , ad quadratum, MO , esse vt rectangulum, ZVB , ad rectangulum, ZNB .

Quia enim quadratum, EV , est æquale rectangulo, CVF , & quadratum, MN , rectangulo, HNR , idè quadratum, EV , ad <sup>14. Secun-
Elcmr.</sup> quadratum, MN , erit vt rectangulum, CVF , ad, HNR , rectangulum verò, CVF , ad, HNR , habet rationem compositam ex ea, quam habet, CV , ad, HN , (vt infra independenter ab hac Proposit. probatur) $\therefore VB$, ad, BN , quia trianguli, CVB , HNB , sunt æquianguli, & ex ea, quam habet, VF , ad, NR , idest, VZ , ad, ZN , quia trianguli, VFZ , NRZ , sunt æquianguli, duæ verò rationes, VB , ad, BN , & VZ , ad, ZN , componunt rationem rectanguli, ZVB , ad rectangulum, ZNB , ergo rectangulum, CVF , ad rectangulum, HNR , i. quadratum, EV , ad quadratum, MN , vel quadratum, ED , ad quadratum, MO , crit vt rectangulum, ZVB , ad rectangulum, ZNB , quod ostendere opus erat; hæc autem ab Apollonio vocatur Hyperbola.



Ex Sexta
lib. 2. seq.
vel ex 23.
Sexti El.

Ex Sexta
lib. 2. seq.
vel ex 23.
Sexti El.

THEOREMA XXXVII. PROPOS. XL.

Tandem eisdem positis, præterquam dicto concursu, posito, inquam, BV , concurrere cum utroq; latere trianguli per axem, & productum, etiam cum basi trianguli per axem conuenire, ut in, 2. Dico quadratum, RD , ad quadratum, MO , esse vt rectangulum, VS , ad rectangulum, VNB .

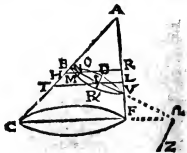
Sit ergo talis hic appositum schema, in quo planum figura, B & VD , (cuius axis, vel diameter secatur utraque latera, AC , AF , & producta incidit in basim, CF , productam in, 2,) extenium indefi-

nité fecat basis productum planum in recta, z , Z , perpendiculari triangulo per axem, $A C F$, & sint adhuc per puncta, N , S , ipsi, C F , ductæ parallelæ, $T L$, $H R$, igitur quadratum, $\& S$, erit æquale rectangulo, $T S L$, & quadratum, $M N$, æquale rectangulo, $H N R$, at rectangulum, $T S L$, ad, $H N R$, habet rationem compositam ex ea, quam habet, $T S$, ad, $H N$, .i. $S B$, ad, $B N$, quia trianguli, $B T S$, $B H N$, sunt æquianguli, & ex ea, quam habet, $S L$, ad, $N R$, .i. $S V$, ad, $V N$, quia pariter trianguli, $S V L$, $N V R$, sunt æquianguli, duæ autem rationes, $S B$, ad,

Ex Sexta lib. 2. seq. velex 23. Sext. Bl.

Ex Sexta lib. 2. seq. velex 23. Sext. Bl.

$B N$, & $S V$, ad, $V N$, componunt rationem rectanguli, $B S V$, ad rectangulum, $B N V$, ergo rectangulum, $T S L$, ad, $H N R$, .i. quadratum, $\& S$, ad quadratum, $M N$, vel quadratum, $\& D$, ad quadratum, $M O$, erit vt rectangulum, $V S B$, ad rectangulum, $V N B$, quod ostendere oportet; hæc autem ab Apollonio vocatur Ellipsis.



S C H O L I V M.

Hæc circa sectiones conicas apposui, tum vt quod menti meæ succurrit in lucem proferrem, tum vt eluceſcat, quam facile paſſiones, quæ ab Apollonio in Elementis conicis circa earundem diametros, vel axes quoscumque demonstrantur, circa eos, qui axes, vel diametri principales, siue ex generatione vocantur modo supradicto ostendantur. His tamen contenti ex Apollonio recipiemus pro dictarum sectionum axibus, vel diametris quibuscumque; quod ipse colligit ad finem Prop. 51. primi Conicorum, scilicet.

In Parabola vnamquamque rectarum linearum, quæ diametro ex generatione ducuntur æquidistantes, diametrum esse: In hyperbola verò, & ellipsi, & oppositis sectionibus vnamquamque earum, quæ per centrum ducuntur, & in parabola quidem applicatas ad vnamquamque diametrum, æquidistantes contingentibus, posse rectangula ipsi adiacentia: In hyperbola, & oppositis posse rectangula adiacentia ipsi, quæ excedunt eadem figura: In ellipsi autem, quæ eadem deficiunt: Porro quæcumque circa sectiones adhibitis principalibus diametris demonstrata sunt, & alijs diametris assumptis eadem contingere.

Tres autem proxima Propositiones etiam in meo Speculo Vstorio descripta fuerunt, cum & ibi iisdem indigerem, has verò hic repetere volui, ut qui meum illud Speculum non viderunt, etiam iisdem potiri possint: Aliqua tamen ex infra scriptis nunc ex Archimede, & eiusdem Commentatoribus sumemus, ut iam ostensa, ne has demonstrationes, quæ apud præfatos Auctores videri possunt, frustra repetamus.

THEOREMA XXXVIII. PROPOS. XLI.

SI sphaera, vel sphaeroides, conoides parabolicum, vel hyperbolicum planis secantur ad axem rectis, communes sectiones erunt circuli diametros in eadem figura ducta per axem (quæ est illa, quæ per reuolutionem creat dictum solidum) sitas habentes.

Patet hæc Propositio, nam supradicta sunt solida rotunda, nascuntur .n. ex reuolutione figurarum circa axem. Defin. 6.
34. huius.

THEOREMA XXXIX. PROPOS. XLII.

SI conoides parabolicum plano secetur non quidem per axem, neque æquidistanter axi, neque ad rectos angulos cum axe, communis sectio erit ellipsis, diameter verò ipsius maior erit linea concepta in conoide ab intersectione facta planorum, cuius scilicet, quod secat figuram, & eius, quod ducitur recto per axem ad planum secans, minor verò diameter æqualis erit distantia linearum ductarum æquidistanter axi ab extremis diametri maioris.

Hæc ostenditur ab Archimede lib. de Conoidibus, & Sphaeroidibus p. 13.

THEOREMA XL. PROPOS. XLIII.

SI conoides hyperbolicum plano secetur coincidente in omnia coni latera conoides comprehendens non recto ad axem; sectio erit ellipsis, diameter verò maior ipsius erit concepta in conoide à sectione facta planorum, alterius quidem

dem secantis figuram, & alterius acti per axem recto ad planum secans. Archim. ibid. Propof. 14.

THEOREMA XLI. PROPOS. XLIV.

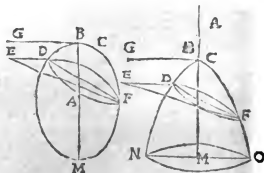
SI sphæroides plano secetur non recto ad axem, sectio erit ellipsis, diameter verò ipsius maior erit concepta in sphæroide sectio duorum planorum, cuius scilicet, quod secat figuram, & eius, quod ducitur per axem recto ad planum secans. Arch. ibid. Propof. 15.

Minor verò diameter sic habetur. Sit Sphæroides, vel conoides hyperbolicum, $BDMF$, axis, BM , centrum, A , ellipsis verò per axem transiens in sphæroide, $BDMF$, in conoide verò hyperbola, NCO .

Secetur autem sphæroides, vel conoides plano non recto ad axem, sed erecto figuræ, $BDMF$, ex quo fiat in ipsis sectio, DF , hæc erit ellipsis, cuius maior diameter, DF . Inveniatur nunc vertex ellipsis, seu hyperbolæ, $BDMF$,

respectu ipsius, DF , qui sit, C , & iungatur, CB , ac per, B , agatur, BG , tangens in, B , ipsam ellipsim, seu hyperbolam, tandem à puncto, D , parallela ipsi, BG , & à puncto, F , parallela ipsi, CB , producantur, DE , FE , quæ inuicem concurrent vt in, E . Dico igitur, quod erit, ED , minor diameter eiusdem ellipsis, DF .

Hoc autem demonstrat ibid. Dauid Riualtus in Commentarijs in Archim. ad Propof. 14. & 15.



THEOREMA XLII. PROPOS. XLV.

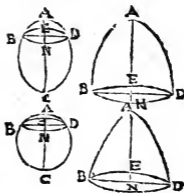
SI sphæroides, vel conoides parabolicum, seu hyperbolicum secentur quomodocumq; planis parallelis ad axem rectis, siue inclinatis, communes sectiones similes erunt, & diametri eiusdem rationis erunt omnes in eadem figura per axem transeunte, rectè easdem secante.

Hæc colliguntur in Coroll. 2. Prop. 15. lib. Arch. de Conoidibus, & Sphæroidibus, & ibidem etiam à Federico Commandino in suis in Arch. Comment. demonstrantur. Hæc verò circa ipsas sectionum figuras verificari pariter manifestum est, hoc autem dico, utor enim iisdem sectionum nominibus tanquam figuras sub ipsis comprehensas significantibus.

THEOREMA XLIII. PROPOS. XLVI.

EXpositis prædictis conici sectionibus, circulo nempe, Ellipsi, Parabola, & Hyperbola, si, quæ ad earundem axes ordinatim applicantur, diametri esse intelligantur circulo- rum ab ipsis descriptorum, qui sint erecti planis ipsarum figurarum, periphæriæ descriptorum circularum in sectione, quæ est circulus, erunt omnes in superficie sphære, in Ellipsi verò in superficie sphæroidis, in Parab. in superficie conoidis parabolici, & in Hyperbola in superficie conoidis Hyperbolici.

Sint prædictæ sectiones figuræ scilicet, ipsæ, $A B C D$, earum axes, $A C$, vna ex ordinatim ad axim applicatis, $B D$, quæ intelligatur esse diameter ab ea descripti circuli, $B N D E$. Dico circumferentiam, $B N D E$, esse in dicta superficie. Intelligantur dictæ figuræ reuolui circa suos axes, ut ex circulo fiat sphæra, ex ellipsi sphæroides, ex parabola conoides parabolicum, & ex hyperbola hyperbolicum, secentur autem planis ad axem



rectis, eundem axem secantibus in eodem puncto, in quo descriptus

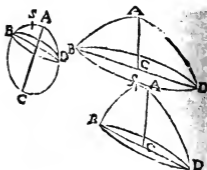
circ.

34. huius. **Corol. 34. huius.** circulus eum secat, productur ergo ab hoc secante plano in ipsis solidis circulus centrum in axe habens, cuius diameter erit, BD , habemus igitur duos circulos in eodem plano, circa eandem diametrum, ergo illi erunt congruentes, periphæria autem circuli dicto secante plano in dicto solido producti est in superficie ambiente dictum solidum, ergo, & periphæria circuli, $BND E$, descripti, ut dictum est, erit in tali superficie, scilicet in superficie sphaeræ in figura circuli, sphaeroidis in figura ellipsis, conoidis parabolici in figura parabolæ, & hyperbolici in figura hyperbolæ, idem ostendemus de alijs quibuscumque sic descriptis circulis ab ordinatim applicatis ad dictos axes tanquam à diametris, qui sint erecti eisdem sectionibus, igitur quod proponebatur demonstratum fuit.

THEOREMA XLIV. PROPOS. XLVII.

INFRA SCRIPTIS positis, eadem adhuc sequi ostendemus.

Iisdem enim expositis figuris, præter circulum, supponamus ipsam, AC , non esse axem, sed diametrum, & ad ipsam ordinatim applicari utcumque, BD , intelligatur autem, BD , diameter cuiusdam ellipsis ab eadem descriptæ, quæ sit erecta plano propositæ figuræ, sit autem, in figura ellipsis, descriptæ ellipsis secunda diameter perpendicularis ipsi, BD , & æqualis ductæ à puncto, B , parallelæ tangenti ellipsim, $ABC D$, in extremitate eiuſdem axis (quæ tangat in, S ,) interiectæ inter, BD , & eam, quæ ducitur à puncto, D , parallela iungenti puncta, S, A . In figura verò hyperbolæ sit secunda diameter perpendicularis, BD , & æqualis ei, quæ ducitur à puncto, D , parallela tangenti hyperbolam in extremitate axis (ut in, S ,) interiectæ inter, BD , & eam, quæ ducitur à puncto, B , parallela iungenti puncta, S, A , & tandem in parabola sit secunda diameter perpendicularis quoque ipsi, BD , & æqualis distantie parallelarum eiuſdem axi, quæ ducuntur ab extremitatibus ipsius, B, D . Intelligantur deinde



de constituta conoides, & sphaeroides, in quibus planis per eorum axes ductis, productæ sint figuræ iam dictæ, secentur deinde planis ad axem obliquis, sed erectis ad dictas figuras, & sint eadem plana descriptarum ellipsium dicta solida secantia, erunt ergo ex his secantibus planis conceptæ in ipsis figuræ pariter elliptes, quarum diametrierunt, BD , quidem prima, secunda autem in sphaeroide æqualis ductæ à puncto, B , parallelæ tangenti ellipsim in, S , interiectæ inter ipsam, BD , & ductam à puncto, D , parallelam iungenti puncta, S , A , (in cæteris autem solidis eadem suo modo verificabuntur) ergo in sphaeroide ipsa, BD , est prima diameter dictæ ellipsis, quæ à dicto secante plano producitur, & est etiam prima diameter ellipsis, quæ describitur modo supradicto, sunt autem secundæ diametri utriusque ellipsis æquales, immo communes, quia ad rectos angulos secant ipsam, BD , ergo habemus in eodem plano duas ellipses circa eandem diametros coniugatas, ergo necessariò erunt congruentes, sed linea ellipsis, quæ est communis sectio dicti plani, & superficiæ sphaeroidis est in superficie sphaeroidis, ergo, & linea ellipsis ut supra descriptæ erit in superficie dicti sphaeroidis. Eodem modo idem de cæteris ellipsis similiter descriptis demonstrabimus tum in sphaeroide, tum etiam in conoidibus parabolicis, & hyperbolicis, quæ ostendere opus erat.

44. huius

Elicietur
ex Corol.
25. huius,

COROLLARIUM.

Hinc patet proposito aliquo ex supradictis solidis, eoque secto planis utcumque parallelis ad axem rectis, siue obliquis figuras, quæ ex sectione planorum in ipsis solidis producuntur, easdem esse illis, quæ describuntur lineis rectis, tamquam homologis diametris, & primis, ijs, inquam, quæ sunt communes sectiones dictarum æquidistantium figurarum, & figuræ, quæ produceretur ducto plano per axem rectè eas secante, quæ describentis essent, quæ ordinatim applicantur ad axes, vel diametros dictarum figurarum, secundis autem diametris descriptarum figurarum existentibus, ijs, quæ supradicta sunt, prout postulat varietas solidorum, iuxta Prop. 42. 43. & 44. huius.

SCHOLIUM.

Aduerte tamen licet supra vocentur diametri, quæ dictas figuras describunt, debere tamen intelligi semper, scilicet axes descriptarum figurarum, cum nomen diametri sit commune diametro, & axi, liuando vice axis timur nomine diametri, ut in circulo apparet, cuius tamen omnes diametri sunt axes: Insuper sciendum est etiam, quæ circa

M

hy.

hyperbolæ hic habentur, circa sectiones oppositas, quarum communes sunt diæ & passiones, quoq; intelligi posse. Eadem verò nedum in dictis integris solidis, sed etiam in eorum portionibus, siue in portionibus sectionum conii abscissis per lineas ad earum axim, vel diametrum ordinatim ductas, pariter verificari manifestum est.

L E M M A.

Propositis duabus quibuscumq; similibus figuris, duæ quævis rectæ lineæ earum homologæ poterunt esse incidentes, vel in ipsis productis reperientur saltem earum incidentes, & oppositarum tangentium, quibus ipsæ incident ad eundem angulum ex eadem parte, erunt autem dictæ homologæ semper inuentarum incidentium partes proportionales.

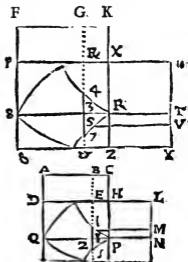
Sint duæ quæcumq; similes figuræ planæ, I Q s P, 4 8 7 R, in eisque duæ quælibet homologæ, I s, 4 7. Dico has esse vel incidentes, vel in eisdem productis reperiri posse incidentes prædictarum figurarum, & oppositarum tangentium, quibus occurrant ipsæ homologæ, productæ, ad eundem angulum ex eadem parte, quales sint, D L, d O; p u, g Y. Ducantur autem ulterius oppositæ tangentæ, quæ sunt regulæ homologarum,

Corol. 19.
& p. 24.
23. huius.

Coroll.
2. 19. & p.
24.

I s, 4 7, ipsæ, A d, C o; F g, K Z, quarum, & dictarum figurarum incidentes sint, A C, F K, parallelæ ipsis, D L, p u, hoc .n. fieri potest; erunt autem etiam ipsæ, d O, g Y, regulæ homologarum, cum faciant angulos æquales cum regulis, d A, g F, vt suppono, & inueniri poterunt earum, & dictarum figurarum incidentes parallelæ eisdem, A d, F g, sint ipsæ, L O, u Y, tales incidentes: Vel ergo homologæ datæ, I s, 4 7, terminantur ad oppositas tangentæ, D L, d O; p u,

g Y, vel non, & tunc producantur, & ipsis incident in punctis, E, f; R, X, & ulterius productæ usque ad, A C, F K, secant ipsas in punctis, B, G. Vterius vel, H o, X Z, tangunt se totis, vel aliqua tan-



tantum ſi parte, vel in vno puncto tantum, prædictas figuras, tan-
gant in punctis tantum, P, R, & ab ipsis ducantur parallelæ regulis,
d O, g Y, ipſæ, P N, R T, occurrentes incidentibus, L O, u Y, in
punctis, N, T, dico, L N, u Y, ſimiliter ad eandem partem ſecari
in, N, T, ſi. n. hoc non fit, diuidatur, L O, in, M, ſimiliter ad ean-
dem partem, ac diuiditur, u Y, in, T, & per, M, extendatur, M I,
parallela, d O, incidentes ambitui figuræ in, I, & rurſus ſecetur, u
Y, in, V, ſimiliter ad eandem partem, vt ſecatur, L O, in, N, quia
ergo, N, eſt intra puncta, M, O, etiam, V, erit inter puncta, T,
Y; ducatur tandem, V S, parallela, g Y, incidens ambitui figuræ in,
S. Quia igitur, M I, non incidit in punctum contactus rectæ, H o,
cum figura, erit, M I, maior, N P, eadem ratione oſtendemus, S V,
fore maiorem ipſa, R T, eſt enim, R T, minima earum, qua ab in-
cidente, u Y, ad ambitum figuræ duci poſſunt æquidiſtante ipſi, g
Y. Cum verò, I M, R T, ſimiliter diuidant, & ad eandem partem
ipſas incidentes, L O, u Y, erit, I M, ad, R T, vt, L O, ad, u Y, *Defin. 10.*
ideſt vt, P N, ad, S V, ergo, permutando, I M, ad, P N, erit vt, *huius.*
R T, ad, S V, eſt autem, I M, maior, P N, ergo etiam, R T, erit
maior, S V, ſed etiam minor, quod eſt absurdum, ergo falſum eſt ip-
ſas, P N, R T, non ſecare ſimiliter ad eandem partem ipſas, L O,
u Y, ſic igitur eandem diuidunt, eritque, P N, ad, R T, hoc eſt, H
L, ad, X u, vt, L O, ad, u Y, idem oſtendemus etiam ſi contactus
eſſet in parte linearum, H o, X Z, ſeu in totis eiſdem lineis, vt conſi-
deranti facile innotefcet. Eadem autem methodo probabimus etiam,
D L, p u, eſſe vt ipſas, L O, u Y, ergo reſiduæ, D H, p X, hoc eſt,
A C, F K, erunt vt, L O, u Y, ideſt vt, E 4, R &, ſed, A C, F K,
ſimiliter ſunt diuiſæ ab homologis, ſ 1, 7 4, productis, in punctis, B, *Defin. 10.*
G, ergo, A B, ad, F G, ideſt, D E, ad, p R, erit vt, A C, ad, F *huius.*
K, ideſt vt, E 4, ad, R &. Extendantur, N P, T R, quæ diuidunt,
L O, u Y, ſimiliter ad eandem partem, ſecentque ipſos, E 4, R &,
in punctis, 2, 3, incidat autem, N Q, in, Q, punctum contactus
lineæ, A d, cum figura, oſtendemus, vt factum eſt circa iptas, N P,
T R, etiam, T 8, incidere in punctum contactus rectæ, p g, cum fi-
gura, quod fit iptum, 8, quoniam ergo probatum eſt, D E, ad, p
R, eſſe vt, E 4, ad, R &, erit etiam, Q 2, ad, 8 3, vt, E 4, ad,
R &. Similiter probabimus, 2 P, ad, 3 R, eſſe vt, E 4, ad, R &,
& diuidunt ipſas, E 4, R &, ſimiliter ad eandem partem, à quibus
viciffim ſecantur ad eundem angulum ex eadem parte, cum, E 4, R
&, ſint parallelæ ipſis, L O, u Y, ergo, E 4, R &, erunt incidentes
ſimilium figurarum, P I Qs, R 4 8 7, & oppoſitarum tangentium, *24. huius.*
D H, d o, p X, g Z, quod etiam verificaretur de ipſis homologis, l s,
4 7, ſi fuiſſent ad oppoſitas tangentes terminate in punctis, E, 4, R,

&. Modò etiam si ad illa puncta non terminetur dico tamen, *l s*, ad, *E 4*, esse vt, *4 7*, ad, *R &*, etenim, *l s*, ad, *4 7*, est vt, *A C*, ad, *F K*, idest vt, *LO*, ad, *u Y*, vel vt, *E 4*, ad, *R &*, vt probatum est, ergo permutando, *l s*, ad, *E 4*, erit vt, *4 7*, ad, *R &*, quod ostendere oportebat.

C O R O L L A R I V M.

ET quoniam probatum est, *l s*, ad, *4 7*, esse vt, *E 4*, ad, *R &*, seu vt, *LO*, ad, *u Y*, vt autem, *LO*, ad, *u Y*, ita duæ homologæ, *Q P*, ad, *8 3*, idè duæ homologæ, *l s*, *4 7*, sunt inter se, vt duæ homologæ, *Q P*, *8 R*, & cum oppositæ tangentibus, *DL*, *d O*, *p u*, *g Y*, ductæ sint utcumque, licet ad eundem angulum ex eadem parte cum ipsis, *E 4*, *R &*, idè duæ homologæ, *l s*, *4 7*, erunt vt quæcumq; aliæ duæ homologæ quibusuis regulis assumptæ, vel vt e. rum incidentes, immo & ipsæ incidentes, erunt inter se, vt quævis aliæ duæ incidentes, ostensum .n. est, *A C*, ad, *F K*, esse vt, *LO*, ad, *u Y*.

THEOREMA XLV. PROPOS. XLVIII.

SI sint duæ similes figuræ planæ, quarum sint ductæ oppositæ tangentibus, quæ sunt homologarum earundem regulæ, per quas extendantur duo plana utcumque inuicem parallela eque ad eandem partem ijsdem inclinata, deinde sumptis duabus quibuslibet homologis illæ describere intelligantur figuras planas similes, ductis primò planis æquidistantes, ita vt sint similiter descriptæ, & describentes earum lineæ, vel latera homologa, idem autem contingat cæteris homologis, etiam si omnes figuræ descriptæ seorsim in vnaquaque propositarum figurarum non essent similes; Solida, quæ ab ijsdem tanguntur oppositis planis, in quibus ex traiectione planorum præfatis oppositis tangentibus æquidistantium eadem figuræ produci possunt, erunt similia, & figuræ descriptæ eorundem homologæ figuræ, & earum regulæ ipsa opposita tangentia plana, quorum & dictorum solidorum figuræ incidentes erunt primò propositæ figuræ.

Hæc Propositio manifesta est, inuoluit .n. requisita omnia definitionis similibus solidorum; nam hic habemus duo solida, ea nempe, quæ secantur planis dictarum figurarum, quorum duo extrema siue primo ducta æquidistantia plana talia sunt, vt illis incidant duo plana (in quibus nempe reperiuntur propositæ figuræ similes, quarum homologarum regulæ sunt communes sectiones earum, & dictorum oppositorum planorum tangentium) ad eundem angulum ex eadem parte, sunt autem figuræ planæ descriptæ lineis, vel lateribus homologis propositarum figurarum inter se similes, illæ .s. quæ secant incidentes propositarum figurarum, & subinde altitudines dictorum solidorum similiter ad eandem partem, & æquidistant dictis tangentibus planis, respectu quorum altitudines dictas assumptas intelligo, & quia supponimus omnium descriptarum similibus figurarum latera homologa describentia esse lineas, vel latera homologa similibus figurarum, quæ omnia sunt inter se æquidistantia, deò omnes earum lineæ homologæ duabus quibusdam regulis æquidistant, & ipsa latera describentia erunt etiam lineæ incidentes, vel in eisdem productis saltem reperiri poterunt incidentes descriptarum similibus figurarum, & oppositorum tangentium duabus quibusdam semper æquidistantium, scilicet eis, quæ cum dictis incidentibus angulos continent æquales (erunt autem dicta latera homologa incidentes, si dictæ tangentes transcant per extrema laterum describentium, si autem non, poterunt tamen in ipsis lateribus productis assumi earundem incidentes, quæ erunt, vt ipsa latera homologa) & cum ipsæ propositæ figuræ sint similes, subinde etiam erunt similes illæ, quæ capient omnes dictas incidentes, si fortè accidat ipsa latera homologa describentia non esse incidentes, vt dictum est, igitur adsunt hic omnes conditiones definitionis meæ similibus solidorum, ergo solida, in quibus dictæ similes descriptæ figuræ ex traiectione dictorum planorum producuntur, erunt similia, & regulæ figurarum homologarum erunt dicta plana tangentia, & eorum, ac dictorum solidorum figuræ incidentes, propositæ primò figuræ, vel aliæ in eisdem planis inuentæ, illæ scilicet, in quibus iacent omnium similibus descriptarum figurarum lineæ incidentes, quod ostendere opus erat.

Defin. 13.
huius.17. Vnd.
Elem.Corol. 23
huius.Ex Lem.
antec.

COROLLARIUM.

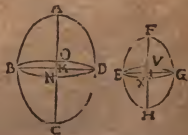
Hinc apparet se descriptæ figuræ omnes sint inter se similes, dicta solida pariter esse similia. Vnde si intelligamus similes constitutionum portiones, siue easdem integras, circa axes, vel diametros & ab ordinatim applicatis ad axim, vel diametrum, earundem describi similes figuras planas eisdem sectionum portionibus erectas, tanquam à lineis,

lineis, vel lateribus homologis descriptarum figurarum; solida, in quibus descripta figura ex traiectionis planis producentur (quæ in sequenti libro dicuntur, solida ad inuicem simularia genita ex dictis sectionum portionibus) erunt similia, & figurarum homologarum eorundem regulæ opposita tangentia plana dictis iam descriptis figuris æquidistantia, quorum & dictorum solidorum figura incidentes erunt dictæ sectionum portiones, vel in earum planis iacebunt. Vnde colligimus omnes sphaeras esse similes, nam si secantur planis per axem, concepta figura fiunt similes, idest circuli, quod si secantur adhuc planis ad horum circularum plana erectis, producta figura fiunt pariter circuli descripti tanquam diametris eisdem rectis lineis, in quibus coincidunt circuli per axem ductis, quæ diametri sunt etiam incidentes eorundem descriptorum circularum, & oppositarum tangentium per eorum extrema ductarum, quæ tangentes omnes inter se æquidistant, ut facillè patet, & sunt istæ incidentes, siue diametri descriptorum circularum, quæ axem diuidunt similiter ad eandem partem, ut ipsi axes, igitur sphaera omnes sunt similes, & ductis duobus planis oppositis tangentibus utcumq; & per axem, qui iungit puncta contactuum ductis planis, hinc effecti circuli erunt figura incidentes dictorum tangentium, & sphaerarum, & dicta plana tangentia erunt regulæ homologarum figurarum earundem, vnde tandem patet quosuis circulos in sphaeris per centrum transeuntes posse esse figuras incidentes earundem sphaerarum, & planorum oppositorum tangentium sphaeras in extremis punctis diametrorum quorumuis ductorum circularum per centrum transeuntium.

THEOREMA XLVI. PROPOS. XLIX.

Posita definitione particulari similium sphaeroidum, sequitur & generalis similium solidorum.

Sint similes sphaeroides iuxta definitionem particularem de ipsis allatam, $ABC D, FEHG$. Dico has esse similes iuxta definitionem generalem similium solidorum; ductis enim planis per axes, AC, FH , producantur in eisdem ellipses, $ABC D, FEHG$,



33. huius.

18 huius.

quæ erunt eadem illis, ex quarum reuolutione circa axes, AC, FH , oriun-

oriuntur dictæ spheroides, & proinde erunt similes tum iuxta definit. Apollonij, tum iuxta definit. 10. huius. Et quoniam si secentur planis ad axem rectis in dictis spheroidibus gignuntur circuli, vt ex. gr. $BNDO$, $EXGV$, (qui secent axes, AC , FH , similiter ad eandem partem in punctis, M , I ,) quorum diametri sunt communes sectiones cum figuris per axem tranſcuntibus, vt ipsæ, BD , BG , idè istæ erunt incidentes ipsorum circulorum, $BNDO$, $EXGV$, & oppositarum tangentium in punctis, B, D ; E, G ; quod etiam de cæteris intelligemus. Ergo si per axium, AC , FH , extrema ducta sint duo opposita tangentiâ plana, quæ erunt circulis, $BNDO$, $EXGV$, parallela, habebimus plana ellipsium, $ABCD$, $FHGH$, illis incidentia ad eundem angulum ex eadem parte; nam ad illa sunt erecta, in quibus reperientur similes figuræ, ellipses nempe iam dictæ, & homologarum earundem regulæ erunt communes sectiones earundem productorum planorum cum oppositis tangentibus planis, quæ homologæ erunt incidentes homologarum figurarum (quarum regulæ sunt dicta tangentiâ plana) & oppositarum tangentium per earundem extrema ductarum, quæ semper duabus quibusdam regulis æquidistant. Ergo dictæ spheroides similes erunt iuxta definit. 10. huius, & earum, ac dictorum oppositorum tangentium planorum figuræ incidentes erunt eadem ellipses, $ABCD$, $FHGH$, per axes tranſeuntes, quod &c.

34. huius.

Léma 97. huius.

THEOREMA XLVII. PROPOS. LI.

Posita definitione similium portionum spherarum, vel spheroidum, aut conoidum, siue earundem portionum, sequitur etiam definitio generalis similium solidorum.

Sint solida, FMH , BAC , similes portiones spherarum, vel spheroidum, vel similes conoides, seu conoidum portiones iuxta particularem definitionem de illis allatam. Dico eadem esse similia iuxta definitionem generalem similium solidorum. Bates ergo erunt vel circuli, vel similes ellipses, nempe, FHN , BDC , ductis autem planis per axes ad rectos angulos basibus fiant in ipsis figuræ, FMH , BAC , quæ erunt similes sectionum conii portiones, & earum bases, FH , BC ;



Def. 9.

erunt

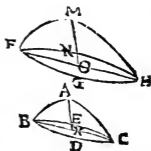
elicitur
ex 37. hu-
ius.

28. huius.

Lem. 31.
huius.

17. Vnd.
Elem.

erunt axes basium eorundem solidorum, ipsarum nempe figurarum, $FGHN$, $BDCE$, sunt .n. solida rotunda, & plana, FMH , BAC , per axes transeuntia sunt basibus erecta. Sint autem solidorum iam dictorum axes, necnon axes, seu diametri figurarum, FMH , BAC , ipsæ, OM , XA . Quia ergo figuræ, FMH , BAC , sunt similes portionum coni sectiones, quarum bases, siue ad earum axes, vel diametros, MO , AX , ordinatim applicatæ sunt, FH , BC , erunt homologarum earundem regulæ, ac tangentes ipsas figuras ex vna parte, ex alia verò, quo per vertices, M , A , eisdem ducentur æquidistantes, earundem verò oppositarum tangentium, ac ipsarum figurarum incidentes, MO , AX , eritque FH , ad BC , vt, MO , ad AX . Si ergo bases, $FGHN$, $BDCE$, sint circuli erunt figuræ similes, quarum & oppositarum tangentium per extrema, FH , ductarum incidentes fient diametri, FH , BC . Si verò sint similes ellipses, quoniam, FH , BC , sunt axes, facile probabimus, sicut pro circulo factum est ad Lem. Propos. 31. huius, auxilio Propos. 40. huius, ipsas, FH , BC , esse incidentes similibus figurarum, $FGHN$, $BDCE$, & oppositarum tangentium, quæ per puncta, F , H ; B , C , ducuntur (quæ ipsis, FH , BC , existent perpendiculares, cum sint axes earundem figurarum.) Et eodem modo si dicta solida fecerent alijs planis præfatis basibus parallelis (ita tamen vt illa diuidant similiter ad eandem partem ip-



fas, MO , AX , & subinde etiam altitudines ipsorum solidorum respectu dictarum basium assumptas) ostendemus & productas in solidis figuris esse similes, & earum, ac oppositarum tangentium (æquidistantium tanquam regulis duabus oppositis tangentibus basium, FH , BC , per extrema, F , H ; B , C , iam ductarum) incidentes esse communes ipsarum sectiones cum figuris, FMH , BAC , quæ omnes erunt lineæ homologæ similibus figurarum, FMH , BAC , quarum regulæ, FH , BC . Ergo, ductis per, M , A , duobus planis basibus parallelis, quæ ipsa solida contingunt, incidant hæcæ oppositis tangentibus planis ad eundem angulum ex eadem parte plana figurarum, FMH , BAC , sectis autem solidis planis parallelis, vt dictum est, fiunt in ipsis similes figuræ planæ, & earum incidentes capiuntur omnes in similibus figuris, FMH , BAC , quarum sunt homologæ, earumque regulæ ipsæ, FH , BC , & lineæ homologæ figurarum homologarum duabus quibusdam regulis, vt potè oppo.

oppositis tangentibus basium, $FGHN$, $BDC E$, iam dictis, omnes æquidistant, ergo solida, $F M H$, $B A C$, sunt similia iuxta def. 11. huius, & earum, ac oppositorum tangentium planorum iam dictorum, figuræ incidentes sunt ipsæ, $F M H$, $B A C$, quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Huc etiam non difficile intelligi potest, propositis duabus conis similibus sectionibus, $F M H$, $B A C$, quarum axes, vel diametri sint, $M O$, $A X$, ac posito ipsas, $F H$, $B C$, tanquam axes describere circulos, seu similes ellipses erectas planis figurarum, $F M H$, $B A C$, & ceteras omnes ordinatim applicatas ad ipsas, $M O$, $A X$, vel circulos, vel semper similes ellipses describere, ut dictum est, solida in cuius superficie capiuntur omnes peripheriæ circularum, vel similium ellipsum, esse similes portiones sphaerarum, vel similes sphaeroides, vel conoides, earumque portiones, similes inquam nedum iuxta def. 11. huius, hoc n. habetur ex 48. huius, sed etiam iuxta def. 9. habentur n. hic omnes istius conditiones, ut examinati facile apparebit, quod est conuersum eius, quod in presenti Theor. propositum fuit. Hoc autem conuersum etiam in reliquis Theorematis, in quibus definitiones particulares similium planarum, vel solidarum figurarum cum generalibus ostendimus concordare, poterat demonstrari, sed cum in sequentibus libris vel nullam, vel saltem non necessariam occasionem viderem me huius habiturum esse, & cum etiam faciliè hoc studiosus, qui rectè priores propositiones intellexit, dedere possit, propterea ne longior fierem, consultò hoc prætermisi, quod: amen verum est: unimè dubito, & propterea hoc etiam pro vero supposito infrascriptum Coroll. subiungere volui.

COROLLARIUM II.

Vterius ergo cum hucusque satis manifestum sit, definitiones particulares similium planarum, vel solidarum figurarum, cum definitionibus generalibus 10. nempe, & 11. huius concordare, idè in sequentibus vtriusque definitionis, tam particularis scilicet quam generalis, prout libuerit, hypotesi nos uti posse ex hoc colligemus.

S C H O L I V M.

NE miretur autem Lector si in hoc quasdam propositiones assumpserim tamquam veras, quæ in sequenti Libro demonstrantur, quales præcipuè esse potuerunt Propos. 5. 6. 7. & 8. lib. sequentis, hæc enim accepi tamquam in Elementis iam demonstratas, licet potuissent etiam desumi ex seq. Lib. 2. cum ipsæ non penderent ex hic demonstrandis, ne fieret petitio principij, ut suis locis admonui in presenti Libro; placuit tamen easdem Propos. noua mea methodo indiuisibilibus etiam demonstrare, ut ex ea, tamquam ex herculeo cornu, quanta sit manus demonstrationum affluat: uti a passu n digito demonstrarem.

Finis Primi Libri.



GEOMETRIÆ CAVALERII LIBER SECVNDVS.

In quo de Triangulo præcipuè, & Parallelogrammo, ac Solidis ab eisdem genitis plura demonstrantur, necnon aliæ quadam Propositiones lemmaticæ pro sequentibus Libris ostenduntur.

D I F I N I T I O N E S.

I.



SI per oppositas tangentes cuiuscunq; datæ planæ figuræ ducantur duo plana inuicem parallela, recta, siue inclinata ad planum datæ figuræ, hinc inde indefinitè producta; quorum alterum moueatur versus reliquum eidem semper æquidistans donec illi congruerit: singulæ rectæ lineæ, quæ in toto motu sunt communes sectiones plani moti, & datæ figuræ, simul collectæ vocentur: Omnes lineæ talis figuræ, sumptæ regula vna earundem; & hoc cum plana sunt recta ad datam figuram: Cum verò ad illam sunt inclinata vocentur. Omnes lineæ eiusdem obliqui transitus datæ figuræ, regula pariter earundem vna; libeat tamen, cum expediet, etiam prædictas vocare, recti transitus, sicuti has, obliqui transitus, eius nempe, qui fit in tali æquidistantium planorum ad datam figuram inclinatione.

Post Secund. lib. 1.

E. Defin. Sec. lib. 1.

COROLLARIUM.

Corol. 1.
lib. 1.

Hinc patet, quoniam opposita tangentes regula quacunque in data figura duci possunt, etiam omnes lineas data figura regula quacunque; recta linea proposita haberi posse, tum recti, tum etiam eiusdem obliqui transitus.

I I.

Corol. 1.
lib. 1.

Post Se-
cund. l. t.

E. D. fin.
Sec. lib. 1.

Si, proposito quocunque solido, eiusdem opposita plana tangentia regula quacunque ducta fuerint, hinc inde indefinitè producta, quorum alterum versus reliquum moueatur semper eidem equidistans, donec illi congruerit; singula plana, quæ in toto motu concipiuntur in proposito solido, simul collecta, vocentur: Omnia plana propositi solidi, sumpta, regula eorundem vno.

COROLLARIUM.

Hinc etiam discimus, veluti propositi solidi opposita tangentia plana quacunque regula duci possunt, ita eiusdem omnia plana regula quocunque; plano haberi posse.

I I I.

Corol. 1.
lib. 1.

Si oppositis tangentibus planis occurrant interius duæ rectæ lineæ, vna perpendiculariter, reliqua obliquè; puncta, quæ sunt communes sectiones propositæ lineæ perpendiculariter incidentis, & singulorum planorum, quæ collecta dicuntur, omnia plana (ita tamen producta, vt easdem secare possint) siue puncta, quæ sunt communes sectiones eiusdem, & moti plani, fiuntq; in toto motu, simul collecta vocentur: Omnia puncta recti transitus propositæ lineæ perpendiculariter incidentis; quæ in obliquè incidente vocentur, eiusdem obliqui transitus.

C O R O L L A R I V M .

EX hoc habetur singula puncta recti transitus, vel obliqui, incidentis linea, nedum esse communes sectiones illius, & singulorum, qua collecta dicuntur, omnia plana propositi solidi, sed etiam, si per talem incidentem extendatur planum, esse communes sectiones illius, & singularum, qua collecta dicuntur: Omnes linea plana figura, cuius oppositæ tangentes sunt communes sectiones plani eiusdem figura, & oppositarum tangentium dicti solidi: nam motum planum designat in plano secante rectam lineam, & insimul punctum in incidente, quod reperitur in illa recta linea, & idem idem punctum est communis sectionum moti plani, & rectæ incidentis, tum unius earum, quæ dicuntur omnes linea data figura plana (ita tamen producta, ut hanc incidentem secare possint) & eiusdem incidentis.

I V .

SI inter alterum extremorum punctorum propositæ rectæ lineæ, & singula puncta, quæ simul collecta dicuntur omnia puncta recti, vel eiusdem obliqui transitus eiusdem, sumamus interiacentes lineas, dicantur istæ simul collectæ: Omnes abscissæ propositæ lineæ, quas (etiam si non exprimat) vocari supponemus recti transitus, si puncta sint recti transitus, vel eiusdem obliqui transitus, si puncta sint eiusdem obliqui transitus.

V .

RECTÆ lineæ verò in antecedentis definitionis propositæ linea inter eadem puncta, & reliquum extremorum interiacentes, dicuntur: Residuæ omnium abscissarum propositæ lineæ recti transitus, si puncta sint recti transitus, vel eiusdem obliqui transitus, si sumpta puncta sint eiusdem obliqui transitus.

G E O M E T R I Æ
C O R O L L A R I V M.

Hinc liquet cuilibet absciffæ in proximis definitionibus propofitæ lineæ respondere unam ex residuis, ita ut tot sint illa, quæ dicuntur residuæ omnium absciffarum propofitæ lineæ, quot illæ, quæ dicuntur eiusdem omnes absciffæ, siue recti, siue eiusdem obliqui transitus, nam residuæ omnium absciffarum propofitæ lineæ interiacent inter reliquum extremum eiusdem punctum, & eadem illa puncta, inter quæ, & extremum primò dictum, interiacent omnes absciffæ.

V I.

Si pro qualibet earum, quæ dicuntur omnes absciffæ propofitæ rectæ lineæ, ipsa propofita lineæ, siue eidem æqualis, semel assumpta intelligatur, istæ simul collectæ dicentur: Maximæ omnium absciffarum propofitæ lineæ, vel subintelligentur semper esse omnium, etiam si dicerentur solummodò: Maximæ absciffarum.

C O R O L L A R I V M.

Et quia omnes absciffæ tot sunt, quot omnes residuæ, maximè verò omnium absciffarum tot sunt, quot omnes residuæ, nam cuilibet absciffæ respondet una maximarum, idè maxima omnium absciffarum propofitæ lineæ tot erunt, quot etiam residuæ omnium absciffarum, quotcumque sint omnes absciffæ, vel residuæ: idest pro qualibet residua habebimus quoque unam maximarum; hæc semper recti, vel eiusdem obliqui transitus assumptis.

V I I.

Si cuilibet omnium absciffarum propofitæ rectæ lineæ adiuncta intelligatur alia recta lineæ cuidam æqualis, compofitæ ex omnibus absciffis, & adiunctis, simul collectæ dicentur: Omnes absciffæ propofitæ lineæ adiuncta tali, nempe adiuncta illa, cui, quæ adiunguntur, sunt æquales. Si verò fieret hæc adiunctio residuis, vel maximis omnium absciffarum, pariter dicerentur: Residuæ, vel Maximæ omnium absciffarum adiuncta eadem; recti semper, vel eiusdem obliqui transitus.

Pro.

A. V I I I.

A.

Proposita quacunq; plana figura, & in ea ducta utcur- que recta linea usque ad ambitum hinc inde terminata, si ipsa recta linea describere quamcunq; figuram planam intelligatur, non existentem in plano propositæ figuræ, ac deinde reliquæ earum, quæ dicuntur omnes lineæ propositæ figuræ, sumptæ regula iam ducta linea (& recti transitus si descripta figura sit erecta plano propositæ, vel eiusdem obliqui transitus, si illi sit inclinata, eius nempe transitus, qui fit in tali inclinatione) describere intelligantur figuras planas similes, ac similiter positas, & æquidistantes primò descriptæ, ita ut omnes describentes sint descriptarum figurarum lineæ, vel latera homologa; omnes descriptæ figuræ simul sumptæ dicentur. Omnes figuræ planæ similes talis propositæ figuræ, sumptæ regula earum vna, vel regula etiam ipsa linea, vel latere describente; ut si descriptæ figuræ essent quadrata, hæc dicerentur. Omnia quadrata talis propositæ figuræ, vel si essent triangula æquilatera dicerentur. Omnia triangula æquilatera eiusdem.

B.

B.

Solidum, cuius omnes descriptæ figuræ similes sunt omnia plana, dicitur: Solidum simile genitum ex proposita figura iuxta eandem regulam, iuxta quam sumptæ omnes dictæ figuræ similes fuerunt, quæ igitur ex figuris propositis, ut sic generantur, dicentur absque alio addito: Solida similia genita ex propositis figuris iuxta regulas omnium similitum figurarum, quæ ipsorum euadunt omnia plana, propositæ autem figuræ, eorundem genitrices figuræ vocabuntur.

C.

C.

Cum verò duarum genitricum utrunq; figurarum omnes descriptæ figuræ nedum similes erunt, quæ reperientur in earum vnaquaque, sed etiam quæ sunt vnius, inuenientur similes omnibus figuris similibus alterius propositæ figuræ, fuerit autem in utroque solido figuræ æquæ elevata super plana genitricum figurarum, tunc solida genita ex propositis fi-

Eui...

guris iuxta regulas eas, quæ sunt regulæ omnium similiarum figurarum e arundem propositarum genitricium figurarum, dicentur solida inter se, vel ad inuicem similiaria, genita ex dictis figuris iuxta dictas regulas, vel intelligentur semper esse inter se, seu ad inuicem similiaria, licet hoc non exprimatur, quotiescunq; contrarium aliquid non adjiciatur.

D.

D.

Cum autem duas figuras in eodem plano habuerimus in eadem altitudine existentes, rectangula sub singulis earum, quæ dicuntur omnes lineæ vnus propositarum figurarum, & illis in directum respondentibus in alia figura simul sumpta sic vocabimus, nempe Rectangula sub eisdem figuris, regula eadem, quæ est omnium sumptarum linearum regula.

E.

E.

Cum verò propositarum figurarum altera fuerit parallelogrammum, cuius basis, iuxta quam altitudo sumitur, sit sumpta pro regula, dicta rectangula vocabuntur etiam: Omnia rectangula reliquæ figuræ æquè alta ac eorum vnum.

A P P E N D I X.

Pro antecedentium Definitionum explicatione.

Coroll. i.
lib. i.

Sit figura plana quæcunque, ABC , dua eiusdem opposita tangentibus vicunque ducta, EO , BC , intelligentur autem per, EO , BC , indefinîtè extensa dua plana inuicem parallela, quorum quod transit per, EO , ex. gr. moueatur versus planum per, BC , semper illi æquidistans, donec illi congruat, igitur communes sectiones talis moti, sine fluentis plani, & figuræ, ABC , qua in toto motu sunt, simul collecta à me vocantur: Omnes lineæ figuræ, ABC , quarum aliqua sint ipsæ, LH , PF , BC , sumpta regula earum vna, vt, BC , recti transitus, cum plana parallela rectè secant figuram, ABC , eiusdem obliqui transitus, cum illam obliquè secant, eius scilicet transitus, qui in tali inclinatione fit.

Defin. i.
hæius.

Intelligamus nunc, ABC , esse solidum, cuius duo opposita plana tangentia sint, qua transeunt per, EO , BC , moueatur autem adhuc planum, per, EO , extensum, versus planum per, BC , sem-

per

per illi æquidistans, igitur huius plani moti, sine fluentis concepta in solido, ABC , figura; qua in toto motu fieri intelliguntur, vocc: Omnia plana solida, ABC , sumpta regula eorum uno, quarum aliqua representare possunt plana, LH, PF, BC .

D. fin. 1.
huius.

Vt iterum dua recta linea, ON, EM , occurrant planis per, EO, BC , transcuntibus iam dictis in punctis, O, N ; & EM , quarum, ON , perpendiculariter, EM , vero oblique illis incidat, puncta igitur, qua sunt communes sectiones omnium planorum solidi, ABC , productorum, si opus sit, & recta, ON , vocantur ipsius omnia puncta recti transitus, quarum aliqua sunt puncta, H, I, N , qua inter ipsa, & extremum punctum, O , continentur, ut ipse, OH, OI, ON , dicuntur abscissa, qua inter eadem puncta, & aliud extremum, quod est, N , continentur, ut ipse, NI, NH, NO , residua omnium abscissarum; tot æquales ipsi, ON , quos sunt omnes abscissa, siue residua omnium abscissarum, ON , dicuntur maxima abscissarum, siue omnium abscissarum, ON , quibus si adiungatur aliqua recta linea, dicuntur abscissa, residua, siue maxima adiuncta tali linea, omnes quidem recti transitus in recta, ON , in, EM , vero dicuntur eiusdem obliqui transitus, eius nempe, qui in tali inclinatione fit.

Defin. 3.
huius.

D. f. 4.
huius.

Def. 5.
huius.

Defin. 6.
huius.

Defin. 7.
huius.

Dicitur autem in Coroll. Defin. 3. eadem puncta recti transitus, siue obliqui, fieri tum ab omnibus planis propositi solidi, ut, ABC , tum ab omnibus lineis plani per easdem incidentes extensis, ut ex. gr. plani, quod transit per, EO, BC , quod quidem etiam transeat per ipsas, ON, EM , idem enim planum, quod in solidum, ABC , producit figuram, LH , in

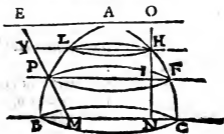


figura plana, ABC , producit rectam, LH , & in recta, ON , punctum, H , in, EM , vero punctum, Y , quod transit, HL , producta, & ideo dico puncta, H, Y , posse dici etiam effecta à recta, Y, H , & sic omnia puncta recti transitus que nempe sunt in, ON , nedum fieri à dictis planis parallelis, sed etiam à lineis parallelis fi-

O

gura,

gura, ABC , productis si opus sit, idem intellige in recta, EM , cuius omnia puncta dicuntur eiusdem obliqui transitus, eius nempe, quæ in tali inclinatione sit.

Pro intelligentia Defin. 8. supponatur in figura plana proposita, ABC , ubicunque recta, BC , qua describat figuram planam, BC , elevatam super, ABC , singula autem linea, qua dicuntur omnes linea figura, ABC , sumpta regula, BC , recti transitus, si figura, BC , sit erecta figure, ABC , vel eiusdem obliqui transitus (qui nempe in inclinatione descripta figura



ad planum, ABC , sit, si figura, BC , sit inclinata ad figuram, ABC ,) describere intelligantur figuras planas similes similiter positas, & æquidistantes ipsi figura, BC , ita ut describentes sint descriptarum figurarum linea, vel latera homologa, quarum figurarum aliqua sint ipsa, BC , PF , LH , ista igitur omnes simul sumpta vocantur, omnes figura similes ipsius figura, ABC , sumpta regula figura, BC , vel linea, aut latere, BC :

D. Defin.
10. lib. 1.

A. Def. 8.
huius.

B. Def. 8.
huius.

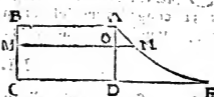
C. Def. 8.
huius.

Solidum, cuius omnes dicta figura similes ipsius, ABC , sunt omnia plana, dicitur, solidum simulare genitum ex figura plana, ABC , iuxta regulam ipsam figuram, vel lineam, BC , & ipsa figura, ABC , appellatur genitrix eiusdem solidi, quod esse intelligatur ipsum, ABC .

Si verò ad sit alia figura plana, cuius omnes linea, quædam regula sumpta, describant similes figuras planas, & similiter positas, omnes uni cuidam æquidistantes, & similes figura, BC , & æquæ elevatas super plana genitricium figurarum, solida simularia genita ex istis figuris, iuxta dictas regulas vocabuntur ulterius inter se, vel ad invicem simularia, licet cum dicemus, solida simularia genita ex talibus, & talibus figuris, & hoc etiam sine alio addito, intelligemus semper ea esse inter se, vel ad invicem simularia, etiam si non exprimat, hoc autem nisi aliter explicetur.

Pro declarandis D. & E. Defin. 8. exponantur duæ figure in
dem

dem plano, & in eadem altitudine, qua sint, $BCDA$, ADE , sit autem altitudo figurae, $ABCDA$, sumpta respectu ipsius rectae, CD , & altitudo figurae, ADE , respectu ipsius, DE , qua intelligantur abscindere ex eadem parte à communi altitudine partes aequales, qua sibi in directum erant, sint verò ambæ communis regula omnium linearum dictarum figurarum, & sit ducta aliarumque eadem, CE , paralela, MN , cuius portio manens in figura, BD , sit, MO , & manens in figura, ADC , sit, ON ; rectangula igitur, CDE , MON , & reliqua rectangula, qua sub qualibet earum, qua dicantur omnes linea figura, BD , (regula, CE , vel, CD ,) & illi in directum posita in figura, ADE , continentur. (erit autem semper aliqua eidem in directum, præterquam forsè illi, qua tangit figuram, ut, BA , potest. n. in figura, ADE , illi vice linea unum punctum tantum respondere, ut, A , hoc tamen rectangulum non computatur, quia nihil illis adiungit, erit inquam hæc linearum respondentia in figura, ADE , eis, qua sumuntur in, BD , nam sunt in eadem altitudine sumpta aspectu earundem linearum, sub quibus rectangula continentur) simul sumpta vocamus. Rectangula sub figuris, $BCDA$, ADE .



Definit. 1. huius.

D. Def. 8. huius.

Si verò contingeret alteram earundem figurarum esse parallelogrammum, & regulam omnium eiusdem linearum esse unum eisdem laterum, ut, CD , respectu cuius sumitur altitudo, tamen quia illa, qua equidistant ipsi, CD , in parallelogrammo, BD , sunt eadem, CD , aequales, & sunt latera dictorum rectangulorum, ideo dico, nos ea vocare posse nedum rectangula sub his figuris, sed etiam sic appellare, nempe. Omnia rectangula figurae ADE , (qua non est necessariò parallelogrammum) aequè alta, ac unum eorum. i. ac rectangulum, CDE , altitudinis scilicet aequalis ipsi, CD , prout libuerit autem nominentur.

POSTULATA.

I.

Def. 1. & 2. huius. **C**ongruentium planarum figurarum omnes lineæ, sumptæ vna earundem vt regula communi, sunt congruentes; Et congruentium solidorum omnia plana, sumpta eorum vno, vt regula communi, sunt pariter congruentia.

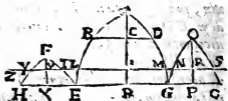
II.

A. Def. 8. huius. Omnes figuræ similes alicuius figuræ planæ sunt omnia plana solidi, quod terminatur superficie, in qua iacent perimetri omnium dictarum similium figurarum.

THEOREMA I. PROPOS. I.

Quarumlibet planarum figurarum omnes lineæ recti transitus; & quarumlibet solidarum omnia plana, sunt magnitudines inter se rationem habentes.

Sint duæ planæ utcumque figuræ, EAG , GOQ , quarum regulæ, EG , GQ , utcumq; sit autem figuræ, EAG , altitudo sumpta respectu, EG , ipsa, AR , & figuræ, GOQ , altitudo sumpta respectu, GQ , ipsa, OP . Dico ergo omnes lineas recti transitus figuræ, EAG , sumptas cum regula, EG , ad omnes lineas recti transitus figuræ, GOQ , sumptas cum regula, GQ , rationem habere. Constituantur regulæ, EG , GQ , sibi in directum, & sint totæ figuræ supra ipsas regulas in eodem plano, vel igitur altitudines, AR , OP , sunt æquales, vel non, supponamus primò ipsas esse æquales, abscindantur nunc ab altitudinibus, AR , OP , ex hypotesi æqualibus, portiones, IR , RP , æquales versus regulas, EG , GQ , si ergo per punctum, I , duxerimus regulæ, EG , parallelam, LM , hæc producta transibit per punctum, R , fiet ergo, LM , quæ clauditur perime-



metro figuræ, EAG , vna ex ijs, quæ dicuntur omnes lineæ figuræ, EAG , & NS , clauſa perimetro figuræ, GOS , vna ex omnibus lineis figuræ, GOQ , ſumptis omnibus lineis iam dictis, regula communi, EQ , & recti tranſitus, vti ſemper intelligemus, niſi aliter explicetur, etiamſi id non exprimat. Quoniam igitur ſi recta, NS , ſit minor recta, LM , poteſt indefinite producta aliquando fieri maior, ſi hoc intelligamus fieri de cæteris lineis, quæ ab altitudinibus portiones abſcindunt æquales verſus regulas, EG , GQ , patet, quod ſingulæ, quæ erunt in figura, GOQ , productæ ſient maiores ijs, quæ erunt in figura, EAG , ſit autem ita facta productio cuiusuis omnium linearum figuræ, GOQ , regula, EQ , vt quæ illi in directum conſtituitur in figura, EAG , ſit portio eiufdem productæ, vt ex.gr. ita ſit producta, SN , verſus, ML , vt ipſam pertranſeat perueniens verbi gratia vſque ad, T , ita vt, LM , ſit portio ipſius, TS , patet ergo, quod omnes lineæ figuræ, EAG , erunt pars omnium linearum figuræ, GOQ , ſic productarum, & iſtæ erunt totum, nam illæ iſtis claudentur, ſiue in his totæ reperientur, & aliquid amplius. Quod de omnibus lineis figuræ, GOQ , ſic productis manet extra figuram, EAG , totum autem eſt maius ſua parte, ergo omnes lineæ figuræ, GOQ , ſic productæ fuerunt, vt maiores effectæ fuerint omnibus lineis figuræ, EAG ; eadem methodo omnes lineas figuræ, EAG , ſic producemus, vt complectantur omnes lineas figuræ, GOQ , iam productas, vt dictum eſt, & ideo maiores eiſdem ſiant, magnitudines autem rationem habere inter ſe dicuntur, quæ multiplicatæ ſe inuicem ſuperare poſſunt, ergo patet omnes lineas figurarum, EAG , GOQ , cum altitudines, AR , OP , fuerint æquales, inter ſe rationem habere.

Diffin. 2.
1. s. Elem.

Non ſint autem æquales, ſed altitudo, AR , ſit maior altitudine, OP , & ab, AR , ſit abſciſſa verſus, EG , ipſa, CR , æqualis ipſi, OP , & per, C , ducta, BD , parallela, EG , intelligatur per, BD , à figura, EAG , abſciſſa figura, BAD , & ea conſtituta, vt, HFB , ita vt ſit in eodem plano ad eandem partem cum figuris, $EBDG$, (quæ remanſit) & GOQ , exiſtente, HE , in directum ipſi, EQ , quod ſi adhuc altitudo, FX , ſit maior altitudine, OP , abſcindatur illi æqualis, & ſic ſemper fiat, & diſponantur figuræ reſiduæ, vt earum bates ſint in directum ipſi, EQ , & figuræ conſtitutæ in eodem plano, & ad eandem partem cum figuris, EAG , GOQ , in altitudinibus vel æqualibus, vel non maioribus altitudine, OP . Intelligatur nunc ducta vtcumque in figura, GOQ , recta, NS , parallela, GQ , quæ erit vna ex omnibus lineis figura, GOQ , regula, EQ , producaturq; ita, vt pertranſeat omnes ſic diſpoſitas figuras, vt vſq; in, Z , complectetur ergo, SZ , ipſas, LM , YT , & ſic quæuis om-

nium

nium linearum figuræ, GOQ , hac lege productæ, complectetur eas, quæ de ip.a manent in figuris iam dispositis, ergo omnes lineæ figuræ, GOQ , sic productæ complectentur omnes lineas figurarum sic dispositarum, ergo erunt ad illas simul sumptas, vt totum ad partem, nam illæ ip his reperientur, & aliquid amplius, ergo erunt illis maiores, omnes lineæ autem figurarum sic dispositarum sunt non minores omnibus lineis figuræ, EAG , ex quâ desumptæ sunt, ergo omnes lineæ figuræ, GOQ , sic productæ sunt, vt effectæ fuerint maiores omnibus lineis figuræ, EAG ; eodem pacto ostendemus nos posse vice versa istas illis efficere maiores, ergo omnes lineæ figurarum, EAG , GOQ , sumptæ cum regulis vtcumque suppositis, cuiusuis

Diffin. 4.
L5. Elem.

sint altitudinis sumptæ iuxta easdem regulas, sunt magnitudines inter se rationem habentes, quod si subter rectam, HQ , adhuc essent portiones consideratæ a nobis figurarum, EAG , GOQ , eodem modo ostenderemus omnes lineas earundem sumptas, cum iisdem regulis esse magnitudines rationem inter se habentes, vnde integrarum figurarum omnes lineæ essent magnitudines inter se rationem habentes, quod in fig. planis ostendere opus erat.



In figuris autem solidis consimiliter procedemus; nam si in superiori figura intellexerimus, EAG , GOQ , esse figuras solidas, & pro rectis lineis æquidistantibus intellexerimus plana æquidistantia, vt pro rectis, EG , GQ , plana, EG , GQ , quibus plana, LM , NS , sint æquidistanter ducta, sumptis pro regulis planis, EG , GQ , iisque in directum sibi constitutis, ita vt iaceant regulæ in eodem plano, ostendemus nos posse ita producere omnia plana solidæ figuræ, GOQ , vt eadem complectantur omnia plana figuræ, EAG , (si sint eiusdem altitudinis dictæ figuræ) integræ existentis, vel (si non sint) diuisæ in figuras solidas, ex. gr. $EBDG$, BAD , sic dispositas, vt bases, siue regulæ iaceant in eodem plano, & ita, vt omnia plana dictarum figurarum solidarum, vel sint intra opposita plana dictas figuras tangentia, vel nihil eorum extra, vnde omnia plana figuræ solidæ, GOQ , sic producta fient totum, & portiones ab eisdem captæ in figura solida, EAG , integra, vel diuisa, vt dictum est. omnia plana figuræ, EAG , fient pars omnium planorum figuræ, GOQ , sic productorum, nam hæc in illis tota reperientur, & aliquid amplius, vnde omnia plana figuræ, GOQ , sic producta erunt, vt effecta sint maiora omnibus planis figuræ, EAG ; eodem modo

modo ostendemus nos posse sic producere omnia plana figuræ, E A G, vt fiant maiora omnibus planis figuræ, G O Q, ita productis, & sic deinceps; ergo omnia plana solidarum figurarum, E A G, G O Q, sunt magnitudines inter se rationem habentes, quod ostendere opus erat.

Diffin. 4.
l. 5. Elem.

S C H O L I U M.

Possit fortè quis circa hanc demonstrationem dubitare, non rectè percipiens quomodo infinita numero linea, vel plana, quales esse existimari possunt, quæ à me vocantur, omnes linea, vel omnia plana talium, vel talium figurarum possint ad inuicem comparari: Propter quod innuendum mihi videtur, dum considero omnes lineas, vel omnia plana alicuius figuræ, me non numerum ipsarum comparare, quem ignoramus, sed tantum magnitudinem, quæ adæquatur spatio ab eisdem lineis occupato, cum illi congruat, & quoniam illud spatium terminis comprehenditur, idè & earum magnitudo est terminis eisdem comprehensa, quapropter illi potest fieri additio, vel subtractio, licet numerum earundem ignoremus; quod sufficere dico, vt illa sint ad inuicem comparabilia: Vel enim continuum nihil aliud est præter ipsa indiuisibilia, vel aliquid aliud, si nihil est præter indiuisibilia, profectò si eorum congeries nequit comparari, neque spatium, siue continuum, erit comparabile, cum illud nihil aliud esse ponatur, quam ipsa indiuisibilia: Si Verò continuum est aliquid aliud præter ipsa indiuisibilia, fateri æquum est hoc aliquid aliud interiacere ipsa indiuisibilia, habemus ergo continuum, disseparabile in quædam, quæ continuum componunt, numero adhuc infinita, inter quælibet enim duo indiuisibilia æquum est interiacere aliquid illius, quod dictum est esse aliquid aliud in ipso continuo præter indiuisibilia, quæ enim ratione tolleretur à medio duarum, à medijs quoque cæterarum tolleretur; hoc cum ita sit comparare nequibimus ipsa continua, siue spatia adinuicem, cum ea, quæ colliguntur, & simul collecta comparantur, scilicet, quæ continuum componunt, sint numero infinita, absurdum, autem est dicere continua terminis comprehensa non esse ad inuicem comparabilia, ergo absurdum est dicere congeriem omnium linearum siue planorum, duarum quarumlibet figurarum non esse ad inuicem comparabilem, non obstante, quod quæ colliguntur, & illam congeriem componunt sint numero infinita, veluti hoc non obstat in continuo, siue ergo continuum ex indiuisibilibus componatur, siue non, indiuisibilium congeries sunt adinuicem comparabiles, & proportionem habent.

Non

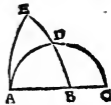
Non inutile autem mihi videtur esse animadvertere pro huius confirmatione, hoc pro vero supposito, quam plurima, quæ ab Euclide, Archimede, & alijs ostensa sunt, à me pariter fuisse demonstrata, measque conclusiones ad unquam cum illorum conclusionibus concordare, quod evidens signum esse potest, me in principijs vera assumpsisse, licet sciam; & ex falsis principijs sophisticè vera aliquando deduci posse, quod tamen in tot, & tot conclusionibus, methodo geometrica demonstratis mihi accidisse absurdum putarem: Hoc tamen addo, non tanquam præfata veritatis legitimum fundamentum, sed ut non negligendum, immò summè expendendum illius argumentum, quod sequentia percurrenti continuè magis, ac magis elucefcat.

THEOREMA II. PROPOS. II.

A Equalium planarum figurarum omnes lineæ sunt æquales, & æqualium solidarum omnia plana sunt æqualia, regula quavis assumpta.

Postul. 1.
huius.

Sint duæ æquales planæ figuræ, $A D C$, $A E B$, in figura, $A D C$, sit regula, $A C$, utcumque, & in figura, $A E B$, regula utcumque sit, $A B$. Dico omnes lineas figuræ, $A D C$, regula, $A C$, æquales esse omnibus lineis figuræ, $A E B$, regula, $A B$; intelligatur figuram, $A E B$, ita superponi figuræ, $A D C$, ut regulæ sint ad invicem superpositæ, velut est, $A B$, in, $A C$, vel saltem æquidistant, vel ergo tota figuræ congruit toti, vel pars parti, congruat pars parti, ergo congruentium harum partium omnes lineæ erunt pariter congruentes, scilicet omnes lineæ, $A D B$, partis figuræ, $A E B$, erunt congruentes omnibus lineis, $A D B$, partis figuræ, $A D C$, superponantur adhuc residuæ harum figurarum partes, hac lege tamen, ut omnes earundem lineæ regulis, $A B$, $A C$, siue regulæ communi, $A B$, vel, $A C$, semper situentur æquidistantes, & hoc semper fiat, donec omnes residuæ partes ad invicem superpositæ fuerint, quia ergo integræ figuræ sunt æquales erunt dictæ partes superpositæ invicem congruentes, ergo & earum omnes lineæ erunt pariter congruentes, magnitudines autem congruentes sunt ad invicem æquales, ergo omnes lineæ partium figuræ, $A E B$, simul sumptarum. scilicet omnes lineæ figuræ, $A E B$, sumptæ regula, $A B$, erunt æquales omnibus lineis partium figuræ, $A D C$, quibus prædictæ partes congruerunt, simul sumptarum. . . omnibus lineis figu-



ræ,

ræ, A D C, sumptis, regula, A C, quod in figuris planis ostenden-
dum erat.

Ita superpositis æqualibus figuris solidis, ita vt duæ in ipsis assum-
ptæ vtcunq; regulæ sint ad inuicem superpositæ, vel æquidistantes,
& residuorum facta semper superpositione ita, vt omnia eorum pla-
na regulis iam superpositis æquidistant, tandem, quia figuræ sunt æ-
quales, dictæ partes erunt ad inuicem congruentes, & consequen-
ter integrè quoq; figuræ erunt congruentes, ergo earum omnia pla-
na sumpta cum dictis regulis erunt ad inuicem congruentia, ergo &
æqualia, quod in figuris solidis ostendere quoque opus erat.

C O R O L L A R I V M.

1

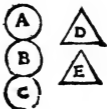
Hinc patet in eadem figura plana, omnes lineas sumptas cum qua-
dam regula æquari omnibus lineis sumptis cum alia quavis regu-
la; & in figuris solidis omnia plana vnus sumpta cum quadam regula
æquari omnibus planis eiusdem, regula quavis assumpta; vnde ex. gr.
secto planis cylindro æquidistanter axi, qua sectione in ipso creantur pa-
rallelogramma, & secto eodem planis æquidistanter basi ductis, qua se-
ctione creantur in eodem circuli, patet ex hoc, omnia parallelogramma
dicti cylindri, regula eorundem vno, esse æqualia omnibus circulis eius-
dem, regula b. si.

Coroll. 6.
lib. 1.
Coroll. 12.
lib. 1.

T H E O R E M A III. P R O P O S. III.

Figuræ planæ habent inter se eandem rationem, quam
eorum omnes lineæ iuxta quamuis regulam assumptæ;
Et figuræ solidæ, quam eorum omnia plana iuxta quamuis
regulam assumpta.

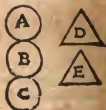
Sint figuræ planæ vtcunq; A, D. Dico,
A, figuram ad figuram, D, esse vt omnes lineæ
figuræ, A, iuxta quamuis regulam assumptæ
ad omnes lineas figuræ, D, iuxta quamuis regu-
lam assumptas. Intelligantur ergo omnes
lineæ figuræ, A, & D, assumptæ iuxta qua-
sdam regulas, deinde capiantur quocunq; fi-
guræ, B C, singulæ æquales figuræ, A, & fi-
guræ, D, quocunq; æquales figuræ, vt, E; nunc, si continuum
componitur ex indiuisibilibus, patet absque alia demonstratione fi-
guram, A, ad figuram, D, esse vt omnes lineæ figuræ, A, ad om-
nes



P

nes

nes lineas figurę, D, tunc enim comparare continuum ad continuum non effet nisi ipsa indiuisibilia comparare; sed esto, quod hoc fit falsum, vel quod, etiam si verum sit, tamen legitima ratione ad hoc probandum nondum peruenerimus; nihilominus adhuc dico ipsa indiuisibilia. scilicet omnes lineas figurę, A, ad omnes lineas figurę, D, esse vt figuram, A, ad figuram, D. Quoniam ergo assumpsimus figuras, B, C, singulas æquales figurę, A, & E, æqualem figurę, D, omnes lineę singularum figurarum, A, B, C, erunt æquales omnibus lineis figurę, A, sumptis iuxta dictam regulam (quacunque regula dictę omnes lineę sint assumptę) & ideo quotuplex erit compositum ex figuris, A B C, figurę, A, totuplex erit compositum ex omnibus lineis figurarum, A B C, omnium linearum figurę, A, & ideo habebimus æquę multiplicia primę, & tertię vtcuq; sumpta; similiter ostendemus compositum ex figuris, E, D, æquę multiplex esse figurę, D, ac compositum ex omnibus lineis figurarum, E, D, multiplex est omnium linearum figurę, D, quę sunt æquę multiplicia secundę, & quartę vtcuque sumpta, quia ergo si multiplex primę. scilicet compositum ex figuris, A B C, superauerit multiplex secundę, scilicet compositum ex figuris, D E, etiam multiplex tertię. scilicet compositum ex omnibus lineis figurarum, A B C, superabit multiplex quartę. scilicet compositum ex omnibus lineis figurarum, D E, & si multiplex primę fuerit æquale multiplici secundę, etiam multiplex tertię erit æquale multiplici quartę, scilicet si compositum ex figuris, A B C, fuerit æquale composito ex figuris, D E, etiam eorundem compositorum omnes lineę erunt æquales, & si minus, minus, ideo prima ad secundam erit, vt tertiam ad quartam, scilicet figura, A, ad figuram, D, erit vt omnes lineę figurę, A, ad omnes lineas figurę, D, sumptas iuxta datas regulas. scilicet iuxta quascunq; regulas, quod in planis erat ostendendum.



Elicitur
ex antec.

D=fin. 5.
Qui. 61.

Coroll. 1.
huius.

Verum si intellexerimus, A, D, esse figuras solidas, assumentes, C, B, singulas æquales ipsi, A, & E, ipsi, D, ostendemus compositum ex figuris, A B C, tam multiplex esse figurę, A, ac compositum ex omnibus planis figurarum, A, B, C, multiplex est omnium planorum figurę, A, & sic compositum ex figuris, D, E, tam multiplex esse figurę, D, ac compositum ex omnibus planis figurarum, D E, multiplex est omnium planorum figurę, D, & tandem per antecedentem Propositionem ostendemus, si multiplex primę superauerit multiplex secundę, etiam multiplex tertię superaturum multiplex quartę, & si minus, minus, vel si æquale, & æquale fore, er-

go prima ad secundam erit, vt tertia ad quartam, scilicet figura solidam, A, ad figuram solidam, D, erit vt omnia plana, A, ad omnia plana, D, cum quibusvis regulis assumpta, quod & in figuris solidis ostendere opus erat.

Def. Cui.
s. Elem.

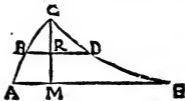
C O R O L L A R I V M.

Liquet ex hoc, quod, vt inueniamus, quam rationem habeant inter se duæ figuræ planæ, vel solidæ, sufficit nobis reperire, quam, in figuris planis, inter se rationem habeant earundem omnes lineæ, & in figuris solidis, earundem omnia plana iuxta quamuis regulam assumpta, quod nouæ huius meæ Geometriæ veluti maximum iacto fundamentum.

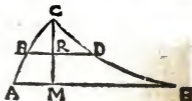
T H E O R E M A I V. P R O P O S. I V.

Si duæ figuræ planæ, vel solidæ, in eadem altitudine fuerint constitutæ, ductis autem in planis rectis lineis, & in figuris solidis ductis planis vtcumque inter se parallelis, quorum respectu prædicta sumpta sit altitudo, repertum fuerit ductarum linearum portiones figuris planis interceptas, seu ductorum planorum portiones figuris solidis interceptas, esse magnitudines proportionales, homologis in eadem figura semper existentibus, diuise figuræ erunt inter se, vt vnum quodlibet eorum antecedentium, ad suum consequens in alia figura eidem correspondens.

Sint primò duæ figuræ planæ in eadem altitudine constitutæ, C A M, C M E, in quibus duæ vtcumque rectæ lineæ inuicem parallelæ ductæ intelligantur, A E, B D, respectu quarum communis altitudo assumpta intelligatur, sint autem portiones figuris interceptæ ipsæ, A M, B R, in fig. C A M, & M E, R D, in fig. C M E, reperiatur autem, vt, A M, ad M E, ita esse, B R, ad, R D. Dico figuram, C A M, ad figuram, C M E, esse vt, A M, ad, M E, vel, B R, ad, R D, quoniam enim, B D, A E, vtcumq; ductæ sunt inter se æquidistantes, patet, quod quælibet earum, que dicuntur omnes lineæ figuræ, C A M, sumptæ regula altera ipsarum,



A M, B R, ad eam, quæ illi indirectum iacet in figura, C M E, erit vt, B R, ad, R D, vel vt, A M, ad, M E, vt igitur, A M, ad, M E, vnum .f. antecedentium ad vnum consequentium, ita erunt omnia antecedentia, nempe omnes lineæ figuræ, C A M, regula, A M ad omnia consequentia, scilicet ad omnes lineas figuræ, C M E, regula, M E; indefinitus .n. numerus omnium antecedentium, & consequentium, qui pro vtriusque hic idem est, quicumque sit (& hoc nam figuræ sunt in eadem altitudine, & cuilibet ante-



- cedenti in figura, C A M, assumpto respondet suum consequens illi in directum in alia figura constitutum) non obstat quin omnes lineæ figuræ, C A M, sint comparabiles omnibus lineis figuræ, C M E, cum ad illas rationem habeant, vt probatum est, & ideo omnes lineæ figuræ, C A M, regula, A M, ad omnes lineas figuræ, C M E, regula, M E, erunt vt, A M, ad, M E, verum, vt omnes lineæ figuræ, C A M, ad omnes lineas figuræ, C M E, ita fig. C A M, est ad figuram, C M E, ergo figura, C A M, ad figuram, C M E, erit vt, B R, ad, R D, vel, A M, ad, M E, quod in figuris planis ostendere opus erat.

- Si verò supponamus, C A M, C M E, esse figuras solidas, & vice rectarum, A M, B R, M E, R D, plana intelligamus figuris, C A M, C M E, intercepta inuicem parallela, & ita constituta, vt plana, A M, M E, iaceant in eodem plano, veluti se habeant etiam plana, B R, R D, respectu quorum præfata altitudo assumpta quoq; intelligatur, eadem methodo procedentes ostendemus omnia plana figuræ, C A M, ad omnia plana figuræ, C M E, idest figuram solidam, C A M, ad figuram solidam, C M E, esse vt planum, B R, ad planum, R D, vel vt planum, A M, ad planum, M E, quod & in solidis ostendere opus erat.

C O R O L L A R I V M.

Colligitur ex hoc in figuris planis, vel solidis, si magnitudines comparate sint lineæ rectæ, vel plana, sint autem illæ, quæ dicuntur omnes lineæ, vel omnia plana dictarum figurarum, de illis quoq; verificari, vt vnum antecedentium ad vnum consequentium, ita esse omnia antecedentia ad omnia consequentia; & in supradictis figuris planis omnes lineas vnius ad omnes lineas alterius, vel in solidis omnia plana vnius ad omnia plana alterius, esse vt vnum antecedentium ad vnum

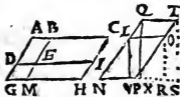
con-

consequentium, iuxta quæ, tanquam regulas, dictæ omnes lineæ, vel omnia plana intelliguntur assumpta.

THEOREMA V. PROPOS. V:

Parallelogramma in eadem altitudine existentia inter se sunt, vt bases; & quæ in eadem basi, vt altitudines, vel, vt latera æqualiter basibus inclinata.

Sint parallelogramma quæcunque, AM, MC , in eadem altitudine constituta, sumpta altitudine iuxta bases, GM, MH . Dico parallelogrammum, AM , ad parallelogrammum, MC , esse vt, GM , ad, MH . Ducatur quæcunq; intra parallelogramma, AM, MC , parallela ipsis, GM, MH , cuius portiones parallelogrammis, AM, MC , interceptæ sint, DE, EI . Quoniam ergo, DM , est parallelogrammum, sicut & EH , erit, DE , æqualis ipsi, GM , & EI , ipsi, MH , erit igitur, GM , ad, MH , vt, DE , ad, EI , & DE, EI , ductæ sunt utrunq; parallela ipsis, GM, MH , ergo parallelogramma, AM, MC , erunt ex genere figurarum Theorematis anteced. ergo, AM , ad, MC , erit vt, DE , ad, EI , vel vt, GM , ad, MH , quæ sunt eorundem bases. Hæc autem verificabuntur etiam si altitudines æquales fuerint, vt facillè patet.



Sint nunc parallelogramma, QP, LP , in eadem basi, NP , constituta. Dico eadem esse, vt altitudines sumptæ iuxta basim, NP , demittantur ergo, OR, TS , altitudines in, NP , productam, in punctis, R, S , illi occurrentes (nisi fortè, TP, OP , essent ipsæ altitudines, vel intra parallelogramma inciderent basi, NP ,) & à punctis, Q, L , illis parallelæ, QX, LV , in punctis, V, X , basi, NP , incidentes, iunt igitur parallelogramma, QS, LR , in æqualibus altitudinibus, QI, LO , sumptis iuxta bases, TS, OR , ergo parallelogramma, QS, LR , erunt inter se, vt bases, TS, OR , est autem parallelogrammum, QS , æquale parallelogrammo, QP , & LR , ipsi, LP , ergo parallelogramma, QP, LP , erunt inter se, vt, TS, OR , quæ pro ipsis sunt altitudines sumptæ iuxta basim, NP . Si autem latus, OP , extenderetur super latus, PT , id est latera, OP, PT , essent æqualiter inclinata communi basi, NP , tunc sumptis pro basibus ipsis, TP, OP , haberemus parallelogramma, QP, LP , in

Ex prima
parte hu-
ius Prop.

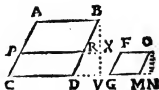
Ex prima par. huius Propo.^s P, in eadem altitudine sumpta iuxta bases, TP, OP, & idè essent, vt ipsæ bases, TP, OP, idèst vt latera, TP, OP, æqualiter basi, NP, inclinata, hæc autem pariter verificabuntur etiam si basis, NP, non sit communis, sint tamen duæ bases æquales, quæ ostendere opus erat.

THEOREMA VI. PROPOS. VI.

Parallelogramma habent rationem compositam ex ratione basium, & altitudinum iuxta easdem bases sumptarum, siue laterum æqualiter basibus inclinatorum, cum scilicet illa sunt æquiangula.

Sint parallelogramma utcumque, AD, FM. Dico eadem habere inter se rationem compositam ex rationibus basium, quæ sint, CD, GM, & altitudinum, quæ sint, BV, ON, sumptæ iuxta bases, CD, GM, illisque productis, si opus sit, in punctis, V, N, occurrentes, siue ex ratione laterum, BD, OM, si sint æquiangula: Ab-

scindatur à, BV, versus, V, ipsa, XV, æqualis ipsi, ON, & per, X, ducatur, XP, parallela, CD, secans, BD, in, R, vt fiat parallelogrammum, PD, in eadem altitudine cum parallelogrammo, FM, & in eadè basi cum parallelogrammo, AD. Parallelogrammum ergo, AD, ad parallelogrammum,



Defin. 12. lib. 1. FM, sumpto medio de foris parallelogrammo, PD, habet rationem compositam ex ratione parallelogrammi, AD, ad parallelogrammum, PD, idèst ex ratione, quam habet, BV, ad, VX, vel, ON, siue, BD, ad, DR, quoniam, AD, PD, sunt æquiangu-

Ex secun. par. ant. la, idèst ex ratione, BD, ad, OM, & hoc quotiescunque, PD, FM, sint pariter æquiangula, & insuper est composita ex ea, quam habet parallelogrammum, PD, ad parallelogrammum, FM, idèst

Ex prima parte antecedd. ex ea, quam habet, CD, ad, GM, ergo parallelogrammum, AD, ad parallelogrammum, FM, habet rationem compositam ex ea, quam habet, BV, ad, ON, quæ sunt altitudines, vel etiam ex ea, quam habet, BD, ad, OM, si, AD, FM, sint æquiangula; & ex ea, quam habet, CD, ad, GM, quod ostendere opus erat.

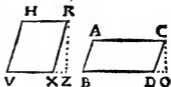
THEO:

THEOREMA VII. PROPOS. VII.

Parallelogramma, quorum bases altitudinibus, vel lateribus æqualiter basibus inclinatis, reciprocantur, sunt æqualia, & quæ sunt æqualia, bases habent altitudinibus, vel lateribus æqualiter basibus inclinatis, reciprocas.

Sint parallelogramma, HX , AD , quorum bases, VX , BD , reciprocantur eorum altitudinibus, CO , RZ , vel lateribus, CD , RX , quotiescumq; sint æqualiter basibus inclinata. Dico hæc parallelogramma esse æqualia; etenim parallelogrammum, HX , ad parallelogrammum, AD , habet rationem compositam ex ea, quam habet, VX , ad, BD , & RZ , ad, CO , siue, RX , ad, CD , cum illa sunt æquiangula, est autem, vt,

VX , ad, BD , ita, CO , ad, RZ , vel, CD , ad, RX , cum illa sunt æquiangula, ergo parallelogrammum, HX , ad parallelogrammum, AD , habet rationem compositam ex ea, quam habet, CO , ad, RZ , & RZ , ad, CO , siue ex ea, quam habet, CD , ad, RX , & RX , ad, CD , quæ est eadem ei, quam habet, CD , ad, CD , vt illa est eadem ei, quam habet, CO , ad, CO , suntque proportionibus æqualitatis, ergo parallelogrammum, HX , erit æquale parallelogrammo, AD .



Ex anteced.

Sint nunc parallelogrammum, HX , æquale parallelogrammo, AD . Dico, vt, VX , ad, BD , ita esse, CO , ad, RZ , vel, CD , ad, RX , cum sunt æquiangula. Quoniam ergo parallelogrammum, HX , est æquale parallelogrammo, AD , erit ad illud, vt, CO , ad, CO , vel vt, CD , ad, CD , idest (de foris sumpto, RZ , vel pro secunda ratione, RX), in ratione composita ex ea, quam habet, CO , ad, RZ , & ex ea, quam habet, RZ , ad, CO , vel ex ea, quam habet, CD , ad, RX , & RX , ad, CD , verum, HX , ad, AD , habet etiam rationem compositam ex ea, quam habet, VX , ad, BD , & RZ , ad, CO , vel, RX , ad, CD , cum sunt æquiangula, ergo duæ rationes, CO , ad, RZ , & RZ , ad, CO , vel, CD , ad, RX , & RX , ad, CD , componunt eandem rationem, quam iste duæ. i. VX , ad, BD , & RZ , ad, CO , vel, RX , ad, CD , est autem communis ratio, quam habet, RZ , ad, CO , vel, RX , ad, CD , ergo reliqua ratio. i. quam habet, VX , ad, BD , erit eadem

Defin. 12. lib. 1.

Defin. 12. lib. 1.

Ex antec.

ci,

ei, quam habet, CO , ad, RZ , vel, CD , ad, RX , cum sunt æqui-
angula, ergo æqualia parallelogramma bases habent altitudinibus,
vel lateribus æqualiter basibus inclinatis reciprocas, quod ostendere
opus erat.

THEOREMA VIII. PROPOS. VIII.

Similia parallelogramma sunt in dupla ratione laterum
homologorum.

Tux. diff. Sec. El. Sint similia parallelogramma, AC, EG . Dico eadem esse in du-
pla ratione laterum homologorum: Quoniam enim sunt similia illa
sunt æquiangula, sunt anguli, BCD, FGH , æquales, & latera ho-
mologa, $BC, FG; CD, GH$, si ergo pro
basibus sumperimus ipsas, BC, FG , erit,
6. huius. AC , ad, EG , in ratione composita ex ea,
quam habet, BC , ad, FG , & ex ea, quam
habet, CD , ad, GH , quæ est eadem ei,
quam habet, BC , ad, FG , vel, FG , ad
tertiam proportionalem duarum primæ nein-
pè, BC , & secundæ, FG , ergo, AC , ad, EG , erit vt, BC , ad ter-
tiam proportionalem duarum primæ, nein-
pè, BC , & secundæ, FG ,
Defin. 10. 9. Elem. .i. erit in dupla ratione eius, quam habet, BC , ad, FG , vel, CD ,
ad, GH , quod ostendere opus erat.



C O R O L L A R I V M.

3. huius. **H**inc patet, quæ de parallelogrammis in superioribus Propositioni-
bus ostensa sunt, eadem de eorundem omnibus lincis cum quibus-
vis regulis assumptis pariter verificari, nam illa sunt, vt ipsa paralle-
logramma.

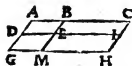
THEOREMA IX. PROPOS. IX.

A. Def. 8. huius. **P**arallelogrammorum in eadem altitudine existentium
omnia quadrata, regula basi, iuxta quam altitudo sum-
pta est, sunt inter se, vt quadrata basium.

Sint

Sint igitur parallelogramma, $A M$, $M C$, in eadem altitudine. Dico omnia quadrata parallelogrammi, $A M$, ad omnia quadrata parallelogrammi, $M C$, regula, $G H$, esse ut quadratum, $G M$, ad quadratum, $M H$. Sit intra parallelogramma, $A M$, $M C$, ducta utcumque, $D I$, parallela ipsi, $G H$, cuius portio, $D E$, maneat in, $A M$, & $E I$, in, $B H$, quoniam ergo, $D E$, est æqualis ipsi, $G M$, figuræ autem planæ similes descriptæ à lateribus, vel lineis homologis æqualibus sunt æquales, & ideo quadratum, $D E$, erit æquale quadrato, $G M$, & quadratum, $E I$, quadrato, $M H$, ergo, ut quadratum, $G M$, ad quadratum, $M H$, ita erit quadratum, $D E$, ad quadratum, $E I$, & quia, $D I$, utcumq; ducta est parallela ipsi, $G H$, ideo, ut unum ad unum, ita omnia ad omnia, id est ut quadratum, $G M$, ad quadratum, $M H$, ita erunt omnia quadrata parallelogrammi, $A M$, ad omnia quadrata parallelogrammi, $M C$, regula, $G H$, quod erat ostendendum.

A. Def. s. Eius.



25. lib. 1.

Coroll. 4. huius.

C O R O L L A R I U M.

Hinc patet, si vice quadratorum sumamus alias quascunque figuræ similes, quod eodem pacto ostendemus omnes figuras similes parallelogrammi, $A M$, ad omnes similes figuras parallelogrammi, $M C$, ut ex. gr. omnes circulos parallelogrammi, $A M$, ad omnes circulos parallelogrammi, $M C$, esse ut similes figuras ab ipsis b. sibus, $G M$, $M H$, descriptas, nam si uræ planæ similes quæcumq; ut dictum est, descriptæ à lateribus, vel lineis homologis æqualibus sunt æquales; omnibus pariter assumptis figuris similibus, regula eadem, $G H$.

A. Def. s. huius.

25. lib. 1.

T H E O R E M A X. P R O P O S. X.

Parallelogrammorum in eadem basi existentium omnia quadrata, regula ipsa basi, sunt ut altitudines, vel ut latera, quæ æqualiter basi sunt inclinata, si illa sint æquiangula.

Sint parallelogramma, $A D$, $B D$, in eadem basi, $C D$, existentia, quorum sint altitudines iuxta basim, $C D$, sumptæ, $A O$, $C N$. Dico omnia quadrata parallelogrammi, $A D$, ad omnia quadrata parallelogrammi, $B D$, regula, $C D$, esse ut, $A O$, ad, $C N$, vel etiam ut, $A C$, ad, $C B$, si parallelogramma, $B D$, $D A$, fuerint æquiangula, producantur autem, $C A$, $C B$, indenuitè ad partes oppositas.

Q

po

9. Huius.

positas, ex quibus sumantur quotcunque partes æquales, AI , $I H$, nempe æquales ipsi, CA , & BP , æqualis ipsi, BC , & compleantur parallelogramma, AM , IK , BQ ; sunt igitur parallelogramma, CF , AM , IK , in æqualibus altitudinibus, ac basibus, & ideo singulorum omnia quadrata regulis eisdem basibus, erunt æqualia, & pari ratione omnia quadrata parallelogrammorum, BQ , CQ , erunt æqualia, regula, CD , altitudines autem parallelogrammorum, CF , AM , IK , sunt æquales ipsi, AO , & altitudines parallelogrammorum, CE , BQ , sunt æquales, nempe ipsi, CN , habemus ergo æquæmultiplices primæ, & tertiæ .f. compositum ex altitudinibus parallelogrammorum, CF , AM , IK , quod tam multiplex est altitudinis, AO , quam compositum ex omnibus quadratis, CF , AM , IK , multiplex est omnium quadratorum parallelogrammi, CF , & sic compositum ex altitudinibus parallelogrammorum, CE , BQ , tam multiplex est altitudinis, CN , ac compositum ex omnibus quadratis parallelogrammorum, BQ , CE , multiplex est omnium quadratorum, CE ; id est quam multiplicia sunt



omnia quadrata parallelogrammi, HD , omnium quadratorum parallelogrammi, AD , tam altitudo parallelogrammi, HD , multiplex est altitudinis parallelogrammi, AD , siue tam ipsa, CH , multiplex est ipsius, CA , dum sunt æquiangula, & quam omnia quadrata parallelogrammi, PD , multiplicia sunt omnium quadratorum parallelogrammi, BD , tam altitudo parallelogrammi, PD , multiplex est altitudinis, CN , vel tam, PC , multiplex est ipsius, CB : Si autem multiplex primæ fuerit æquale multiplici secundæ, etiam multiplex tertiæ erit æquale multiplici quartæ, si maius maius, & si minus minus, nam si altitudo parallelogrammi, HD , fuerit æqualis altitudini parallelogrammi, DP , omnia quadrata, HD , erunt æqualia omnibus quadratis, DP , nam parallelogramma, HD , D

Ex antec.

5. Quinti
Elem.

P , sunt in eadem basi, CD , si illa maior, & hæc maiora, & si minor minora, ergo prima ad secundam erit, vt tertia ad quartam, nempe vt altitudo parallelogrammi, AD , ad altitudinem parallelogrammi, DB , .f. AO , ad, CN , vel, AC , ad, CB , dum sunt æquiangula, ita erunt omnia quadrata, AD , ad omnia quadrata, DB , sunt ergo, vt altitudines ipsorum parallelogrammorum, vel vt latera æqualiter basi inclinata, cum nempe parallelogramma sunt æquiangula: hæc autem etiam verificarentur si parallelogramma essent in æqualibus basibus, quod ostendere opus erat.

COROLLARIUM.

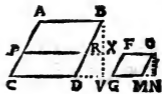
Eadem ratione, si vice quadratorum sumamus alias figuras similes, ostendemus omnes figuras similes parallelogrammorum in eadem basi existentium esse, ut altitudines, vel ut latera basi æqualiter inclinata, dum illa sunt æquiangula. A. Def. 8. huius.

THEOREMA XI. PROPOS. XI.

Quorumlibet parallelogrammorum omnia quadrata regulis duobus quibusvis in eisdem assumptis lateribus, habent inter se rationem compositam ex ratione quadratorum dictorum laterum, & altitudinum, vel laterum, quæ cum prædictis æqualiter inclinatur, si illa sint æquiangula.

Sint parallelogramma utcumq; AD, FM , in quibus regulæ extent latera utcumque, CD, GM , altitudines autem iuxta dictas regulas sumptæ, BV, ON . Dico omnia quadrata, AD , ad omnia quadrata, FM , habere rationem compositam ex ea, quam habet quadratum, CD , ad quadratum, GM , & ex ea, quam habet, BV , altitudo ad altitudinem, ON , vel etiam, BD , ad, OM , si illa sint æquiangula, lateraq; BD, OM , æqualiter sint inclinata cum

lateribus, CD, GM ; abscindatur à, BV , versus, V , ipsa, XV , æqualis, ON , & per, X , ducatur, XP , parallela ipsi, CD , secans, BD , in, R , erit autem, DR , æqualis ipsi, OM , si sint æquiangula, quod facile probari potest, erit etiam parallelogrammum, PD , in eadem basi cum parallelogrammo, AD ,



fed in eadem altitudine cum parallelogrammo, FM , omnia ergo quadrata parallelogrammi, AD , ad omnia quadrata, FM , habent rationem compositam ex ea, quam habent omnia quadrata, AD , ad omnia quadrata, DP , .i. ex ea, quam habet, BV , ad, VX , siue, ON , vel ex ea, quam habet, BD , ad, DR , siue, OM , si sint æquiangula parallelogramma, AD, DP ; & componitur ex ea, quam habent omnia quadrata, PD , ad omnia quadrata, FM , .i. ex ea, quam habet quadratum, CD , ad quadratum, GM , ergo omnia quadrata, AD , ad omnia quadrata, FM , habent rationem compo-

Defin. 12. lib. 1.

Ex antec.

huius.

Q 2

posi.

positam ex ea, quam habet, BV , ad, ON , vel, BD , ad, OM , cum sunt æquiangula, & ex ea, quem habet quadratum, CD , ad quadratum, GM , quod ostendendum erat.

COROLLARIUM.

Hinc patet, si vice quadratorum sumamus alias figuras planas similes, quod eodem pacto ostendemus omnes figuras similes, AD , FM , habere inter se rationem compositam ex ratione quadratorum, CD , GM , & altitudinum, BV , ON , vel laterum, BD , OM , æqualiter basibus inclinatum, cum parallelogramma sunt æquiangula.

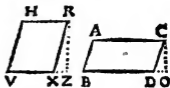
THEOREMA XII. PROPOS. XII.

Parallelogrammorum, quorum basium quadrata altitudinibus iuxta easdem bases sumptis recipiuntur, vel lateribus æqualiter dictis basibus inclinatis; omnia quadrata, regulis eisdem basibus, sunt æqualia: Et quorum parallelogrammorum, regulis basibus, omnia quadrata sunt æqualia, basium quadrata altitudinibus, vel lateribus æqualiter dictis basibus inclinatis, recipiuntur.

Sint parallelogramma, HX , AD , quorum basium, VX , BD , quadrata altitudinibus iuxta ipsas bases sumptis, vel lateribus, RX , CD , si hæc basibus, VX , BD , æqualiter sint inclinata, recipiuntur. Dico omnia quadrata parallelogrammorum, HX , AD , esse inter se æqualia. Nam omnia quadrata, HX , ad omnia quadrata, AD , habent rationem compositam ex ea, quam habet quadratum, VX , ad quadratum, BD , .i. ex ea, quam habet, CO , ad, RZ , vel, CD , ad, RX , cum sunt æquiangula, & ex ea, quam habet, RZ , ad, CO , vel, RX , ad, CD , quæ duæ rationes componunt rationem, CO , ad, CO , vel, CD , ad, CD , quæ est ratio æqualitatis, & ideo omnia quadrata, HX , erunt æqualia omnibus quadratis, AD .

Sint nunc omnia quadrata, HX , æqualia omnibus quadratis, AD , regulis eisdem, VX , BD . Dico quadratum, VX , ad quadratum, BD , esse ut, CO , ad, RZ , vel, CD , ad, RX , cum sunt æ-

Ex anteced.



quiangula, etenim, CO , ad, CO , habet rationem compositam ex ea, quam habet, CO , ad, RZ , & RZ , ad, CO , & sic, CD , ad, CD , ex ea, quam habet, CD , ad, RX , & RX , ad, CD , quia verò omnia quadrata, HX , sunt æqualia omnibus quadratis, AD , idè sunt ad illa, vt, CO , ad, CO , vel vt, CD , ad, CD , .i. in ratione composita ex ratione, CO , ad, RZ , & RZ , ad, CO , vel, CD , ad, RX , & RX , ad, CD , sunt autem omnia quadrata, HX , ad omnia quadrata, AD , in ratione composita ex ea, quam habet quadratum, VX , ad quadratum, BD , & RZ , ad, CO , siue, RZ , ad, CD , cum sunt æquiangula, idè duæ rationes, CO , ad, RZ , & RZ , ad, CO , siue aliæ duæ rationes, CD , ad, RX , & RX , ad, CD , componunt eandem rationem, quam istæ duæ. Ratio quadrati, VX , ad quadratum, BD , & RZ , ad, CO , vel, RX , ad, CD , est autem communis ratio, RZ , ad, CO , vel, RX , ad, CD , ergo reliqua ratio, quam habet quadratum, VX , ad quadratum, BD , erit eadem reliquæ, quam nempè habet, CO , ad, RZ , vel, CD , ad, RX , cum sunt æquiangula, quod erat ostendendum.

Defin. 12^a
lib. 1^o

Ex ante.

C O R O L L A R I U M.

Idem eodem modo de omnibus figuris similibus quibusvis parallelogrammorum, HX , AD , regulis usdem, VX , BD , ostendi posse ex superiori methodo colligitur.

T H E O R E M A XIII. PROPOS. XIII.

Similium parallelogrammorum omnia quadrata, regulis homologis lateribus, sunt in tripla ratione laterum homologorum.

Sint similia parallelogramma, AC , EG , quorum latera homologa, BC , FG , sint sumpta pro regula. Dico omnia quadrata, AC , ad omnia quadrata, EG , esse in tripla ratione eius, quam habet, BC , ad, FG . Quoniam enim parallelogramma, AC , EG , sunt similia, idè sunt æquiangula, & circa æquales angulos latera habent proportionalia, &, BC , CD ; FG , GH , sunt latera ad inuicem æqualiter inclinata, quorum, BC , FG , sunt regulæ, idè omnia quadrata, AC , regula, BC , ad

lux. diff. 2^a
Sex. El.



Ex def. 2^a
Sex. El.

omn.

omnia quadrata, $E G$, regula, $F G$, sunt in ratione composita ex huius ratione quadrati, $B C$, ad quadratum, $F G$, & ex ratione, $D C$, ad, $H G$, siue, $B C$, ad, $F G$, .i. in ratione composita ex tribus rationibus, $B C$, ad, $F G$, idest habent eandem rationem, quam, $B C$, ad quartam proportionalem duarum, quarum prima, $B C$, secunda est, $F G$, .i. sunt in tripla ratione eius, quam habet, $B C$, ad, $F G$, quod erat ostendendum.

C O R O L L A R I V M.

Hinc patet, quod eodem modo idem ostendemus de omnibus quibusvis alijs figuris similibus parallelogrammorum, $A C$, $E G$, vice quadratorum sumptis, regulis eisdem, ex superioribus Corollarijs id deducentes.

T H E O R E M A X I V. P R O P O S. X I V.

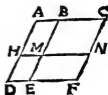
SI duo parallelogramma fuerint in eadem altitudine constituta, omnes figuræ similes vnus ad omnes figuras similes alterius, etiamsi sint dissimiles primò dictis, regulis basibus, iuxta quas altitudo sumitur, erunt, vt figura descripta à basi parallelogrammi primò dicti ad figuram descriptam à basi parallelogrammi secundò dicti.

A. Def. 8.
huius.

Sint parallelogramma in eadem altitudine constituta, $A E$, $E C$.
Dico omnes figuras similes parallelogrammi, $A E$, ad omnes figuras similes parallelogrammi, $E C$, euamsi sint dissimiles prædictis, esse vt figura descripta à, $D E$, ad figuram descriptam ab, $E F$, quæ sunt bases, iuxta quas sumitur dictorum parallelogrammorum altitudo .i. ex. g. omnia quadrata, $A E$, ad omnes circulos, $E C$, esse vt quadratum, $D E$, ad circulum descriptum ab, $E F$. Duæ enim ipsa, $H N$, vtunque parallela, $D F$, reperiemus, vt figura, $D E$, ad figuram, $E F$, ita esse figuram, $H M$, ad figuram, $M N$, quia quæ describuntur lateribus, $H M$, $D E$, equalibus sunt æquales, veluti descriptæ à lateribus, $M N$, $E F$, pariter sunt æquales, & idè, vt vnum ad vnum, sic omnia ad omnia .i. vt figura descripta a, $D E$, ad figuram descriptam ab, $E F$, sic erunt omnes figuræ similes parallelo-

ss. lib. 1.

Coroll. 4.
huius.



grammi, AE , similes, inquam, figuræ descriptæ à DE , ad omnes figuras similes parallelogrammi, EC , similes, inquam, figuræ descriptæ ab EF , quod ostendere opus erat.

COROLLARIUM.

Hinc in figura Propos. 11. colligemus omnes figuras similes parallelogrammi, AD , ad omnes figuras similes parallelogrammi, FM , etiam tamen dissimiles prædictis, habere rationem compositam ex ratione figurarum, quæ à basibus, CD , GM , describuntur, & altitudinum, vel laterum æqualiter basibus inclinatorum; quia omnes figuræ similes, AD , ad omnes figuras similes, FM , dissimiles prædictis, habent rationem compositam ex ea, quam habent omnes figuræ similes, AD , ad omnes figuras similes, FM , id est compositam ex ratione figuræ descriptæ à CD , ad sibi similem figuram descriptam à GM , & ex ratione, BV , ad ON , vel, BD , ad OM , cum sunt parallelogramma æquiangula, & est composita ex ratione omnium figurarum similium, FM , ad omnes figuras similes ipsius, FM , dissimiles tamen proximè dictis, quæ est eadem ei, quam habet figuræ, GM , similes figuræ, CD . ad figuram, GM , ultimò descriptam, duæ verò rationes figuræ CD , ad figuram, GM , sibi similem, & huius ad figuram, GM , sibi dissimilem, componunt rationem figuræ, CD , ad figuram, GM , sibi dissimilem, & idè habebimus omnes figuras similes, AD , ad omnes figuras similes ipsius, FM , dissimiles tamen prædictis habere rationem compositam ex ea, quam habet figuræ ipsius, CD , ad figuram, GM , sibi dissimilem, & ex ea, quam habet, BV , ad ON , vel, BD , ad OM , cum parallelogramma sunt æquiangula. Consimili methodo in figura Propos. 12. colligemus omnes parallelogrammi, HX , figuras similes, omnibus figuris similibus parallelogrammi, AD , etiamsi prædictis sint dissimiles, esse tamen æquales; Et si sint æquales, figuras descriptas ab VX , BD , licet dissimiles, altitudinibus, CO , RZ , vel lateribus, CD , RX , basibus æqualiter inclinatis, reciprocè respondere.

THEOREMA XV. PROPOS. XV.

OMNES figuræ planæ similes sunt inter se in duplici ratione linearum, siue laterum homologorum, eandem.

A. DEMONSTRATIONIS SECTIO I.

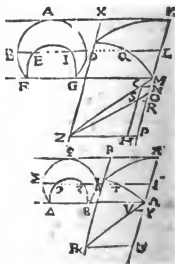
Sint duæ quæcunque figuræ planæ similes, $ABD, \phi \Sigma \Lambda$. Dico easdem esse in dupla ratione linearum, vel laterum homologorum, earundem. Ducturur ipsarum oppositæ tangentés, AK, FM , figuræ, $ABD, \phi \Sigma \Lambda$, figuræ, $\phi \Sigma \Lambda$, quæ homologis earum lineis æquidistant, deinde sint intra dictas oppositas tangentés ductæ, $KM, \Pi \alpha$, taliter, ut illæ sint incidentes dictarum similium figurarum, & tangentium, hoc factò, diuidantur ipsæ incidentes, $KM, \Pi \alpha$, similiter, & ad eandem partem utrunq; in punctis, L, Γ , per quæ puncta sint ductæ ipsæ, $BL, \Sigma \Gamma$, quarum portiones figuris interceptæ sint, BE, ID , in figura, $ABD, \phi \Sigma \Lambda$, in figura, $\phi \Sigma \Lambda$, sumatur autem ex, BL , recta æqualis utrisque simil, BE, ID , terminans in, KM , quæ it, QL , & pariter ipsius, $\Sigma \Lambda$, sit sumpta æqualis, $\Gamma \Gamma$, terminans in, $\Pi \alpha$, & in puncto, Γ , itaq; fiat de cæteris, quæ ipsi tangentibus æquidistant, & manent intra figurarum ambitum, quibus nempe in eadem recta line terminantur rectæ æquales in ipsis, $KM, \Pi \alpha$ terminatæ, erunt igitur omnium inuectarum linearum reliquæ terminatæ in alia quadam linea, quæ incipiet in puncto, K , & desinet in, M , pro figura, ABD , & quæ incipiet in, Π , & desinet in, α , pro figura, $\phi \Sigma \Lambda$, sint istæ lineæ, $KQ, M, \Pi \alpha$, patet igitur figuram, $KQM, \Pi \alpha$, esse æqualem ipsi, ABD , & $\Pi \alpha$, ipsi, $\phi \Sigma \Lambda$, nam omnes earum lineæ sumptæ regulis, $FM, \Delta \alpha$, sunt æquales, quod ex ipsa constructione patet; dicantur autem istæ constructiones, translationes omnium linearum figurarum, $ABD, \phi \Sigma \Lambda$, in figuras, $KQM, \Pi \alpha$, ipsi, $KM, \Pi \alpha$, adiacentes, effect; regulis dictis tangentibus. Patet vter us figuræ, $KQM, \Pi \alpha$, esse similes, nam homologæ figurarum, $ABD, \phi \Sigma \Lambda$, (quia illæ sunt similes) sunt ut incidentes, $KM, \Pi \alpha$, eadem autem in figuris, $KQM, \Pi \alpha$, modo dicto, translate sunt (simul in vnam rectam coniunctis, quæ diuisæ erant, velu-

Coroll. 1.
lib. 1.

Coroll. 2.
9. lib. 1.

3. huius.

Coroll. 1.
11. lib. 1.



veluti, BE, ID , iunctæ sunt in linea, $QL, \&, \Sigma 2, 3 \Lambda$, in lineas, TR , ergo quæ tangentibus dictis æquidistant in figuris, $KQM, \Pi T \Omega$, & diuidunt incidentes, $KM, \Pi \Omega$, similiter ad eandem partem, & iacent inter ipsas incidentes, & circuitum figurarum ad eandem partem eodem ordine sumptæ, sunt ut ipsæ incidentes, ergo figuræ, $KQM, \Pi T \Omega$, sunt similes, & earundem homologarum regulæ eadem tangentes, & earum incidentes ipsæ, $KM, \Pi \Omega$. Defin. 10. lib. 1.

B. SECTIO SECVNDA.

Producantur nunc ipsæ, $KM, \Pi \Omega$, indefinitè versus puncta, M, Ω , & ab ipsis productis sumantur partes æquales, MP , ipsi, $KM, \Delta, \Omega \&$, ipsi, $\Pi \Omega$, & per puncta, $P, \&$, ducantur dictis tangentibus parallelæ, $ZP, \beta \&$, quoniam ergo, $KM, \Pi \Omega$, sunt incidentes similia figurarum, $KQM, \Pi T \Omega$, idè habebimus etiam homologas earundem regulis ipsis incidentibus, $KM, \Pi \Omega$, ductis ergo ex opposito tangentibus eadem figuræ, $KQM, \Pi T \Omega$, parallelis ipsis, $KP, \Pi \&$, quæ sint, $\lambda Z, \beta \&$, poterimus transferre omnes lineas figurarum, $KQM, \Pi T \Omega$, in figuræ ipsis, $ZP, \beta \&$, adiacentes, translatione facta regulis, $KI, \Pi \&$, hant ergo dictæ translationes, unde resultent figuræ, $M'Z'F', \alpha \beta \&$, quæ erunt æquales ipsis, $KQM, \Pi T \Omega$, & subinde ipsis, $ABD, \phi \Sigma \Lambda$, probabimus autem etiam eadem esse similes (veluti in figuris, $KQM, \Pi T \Omega$, factum est) & , $ZP, \beta \&$, esse dictarum figurarum incidentes, & homologarum regulas ipsas, $MP, \Omega \&$, patet autem ex constructione integras esse in figuris, $M'Z'F' \Pi \beta \&$, tum quæ a quidistant ipsis, $ZP, \beta \&$, tum ipsis, $MP, \Omega \&$, nam ex prima translatione integras habuimus, quæ in figuris, $KQM, \Pi T \Omega$, ipsis, $FM, \Delta \Omega$, erant æquidistantes, & subinde etiam integras, quæ in figuris, $M'Z'P, \alpha \beta \&$, ipsis, $ZP, \beta \&$, æquidistant, ex secunda translatione verò integras habuimus eas, quæ ipsis, $MP, \Omega \&$, æquidistant, & hæc per constructionem, quæ omnia seruari oportet.

Corollar. 23. lib. 1.

Iux. Sect. A. huius Propos. 3. huius

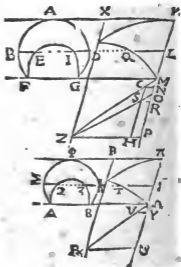
C. SECTIO III.

Nunc in figuris, $MZP, \alpha \beta \&$, à maiori homologarum, $MP, \Omega \&$, quæ sit, MP , accedatur, OP , aqualis ipsi, $\Omega \&$, & ut, MP , ad, PO , ita sit quælibet in figura, MZP , parallela ipsi, MP , ad eius portionem, & portionum termini sint ex vna parte in recta, ZP , ex alia verò in linea, ZO , erit ergo, ut vna ad vnam. i. ut, MP , ad, PO , ita omnia ad omnia, .i. ita omnes lineæ figuræ,
R MZ

Coroll. 4. M Z P, ad omnes lineas figuræ, O Z P, regula, M P, & ideò vt, M
 huius. P, ad, P O, vel ad, α & ; ita figura, M Z P, ad figuram, O Z P,
 4. huius. quod etiam serua.

D. S E C T I O I V.

V Lterius ab ipsis, O P, α &, abscindantur partes æquales, O
 R, α Y, & per puncta, R, Y, ducantur ipsis, Z P, β &, æ-
 quidistantes, S R, V Y, & per, S, vbi, R S, fecat lineam, Z O, du-
 catur, H C, æquidistans ipsi, M
 P, & per, C, vbi, H C, fecat li-
 neam, Z M, ducatur, C N, pa-
 rallela ipsi, Z P, secans, M P, in,
 N; est igitur vt, M P, ad, P O,
 ita, C H, ad, H S, per constru-
 ctionem .i. ita, N P, ad, P R, &
 permutando, vt, M P, ad, P N,
 ita, O P, ad, P R, diuidendo, vt,
 M N, ad, N P, ita, O R, ad, R
 P, .i. ita, α Y, ad, Y &, igitur ip-
 sæ, C N, V Y, æquidistant regu-
 lis homologarum, quæ sunt, Z P,
 β &, & diuidunt ad eandem par-
 tem similiter ipsas incidentes, M
 P, α &, (si .n. Z P, β &, statu-
 ris regulas homologarum ipsæ, M
 P, α &, sunt incidentes, si verò
 has statueris regulas, illæ erunt in-
 cidentes, ambæ .n. terminant in
 oppositas tangentes, quæ sunt re-
 gula homologarum earundem) ergo, C N, ad, V Y, erit vt, M P,
 ad, α &, .i. vt, Z P, ad, β &, & sunt, C N, S R, æquales, &, S
 R, V Y, vtcunque ductæ ipsis, Z P, β &, æquidistantes, ergo vt,
 Z P, ad, β &, ita, S R, ad, V Y, ergo vt, Z P, ad, β &, ita erit
 4. huius. figura, O Z P, ad figuram, α β &, quod pariter serua.



Coroll. 1.
 23. lib. 1.

E. S E C T I O V. E T V L T I M A.

Defin. 12.
 lib. 1.

Q Voniã verò figura, M Z P, ad figuram, α β &, habet ratio-
 nem compositam ex ratione figuræ, M Z P, ad figuram, O
 Z P, .i. ex ratione, M P, ad, α &, & ex ratione figuræ, O Z
 P, ad figuram, α β &, .i. ex ratione ipsius, Z P, ad, β &, .i. ex ra-
 tione

tione ipsius, MP , ad, α &, ideo figura, MZP , ad figuram, αR & habebit rationem compositam ex duabus rationibus ipsius, MP , ad, α &, .i. duplam eius, quam habet, MP , ad, α &, siue, KM , ad, $\pi \alpha$, quæ illis sunt æquales, sed & figuræ, ABD , $\phi \Sigma \Lambda$, sunt æquales figuris, MZP , αR &, ergo figura, ABD , ad figuram, $\phi \Sigma \Lambda$, duplam rationem habebit eius, quam habet, KM , ad, $\pi \alpha$, quia verò, KM , &, $\pi \alpha$, sunt incidentes similibus figurarum, ABD , $\phi \Sigma \Lambda$, ideo, vt, KM , ad, $\pi \alpha$, ita erit, $BEID$, simul ad, $\Sigma 2$, 3Λ , simul, vel ita, BE , ad, $\Sigma 2$; siue, ID , ad, 3Λ , ergo figura, ABD , ad figuram, $\phi \Sigma \Lambda$, duplam rationem habebit eius, quam habet, BE , ad, $\Sigma 2$, vel, ID , ad, 3Λ , .i. erunt istæ similes figuræ in duplâ ratione linearum, vel laterum homologorum, BE , $\Sigma 2$, vel, ID , 3Λ , vel aliarum quarumcumque homologarum præfatis regulis æquidistantium, quod ostendere opus erat.

Def. 10.
Qu. 2. l. 1.B. Def. 10.
lib. 1.Coroll. 1.
2. lib. 1.

COROLLARIUM I.

ET quia dicta figura plana similes ostensa sunt esse in dupla ratione linearum, vel laterum homologorum, quæ æquidistant regulis uterunque sumptis, patet easdem esse in dupla ratione quarumvis homologarum, & duas quasdam homologas sumptas cum quibusdam regulis, esse inter se, vt alias quaslibet duas homologas, cum alijs quibusvis regulis assumptas, quod etiam in Corollario Lemmatis 48. Lib. 1. aliunde deductum est.

COROLLARIUM II.

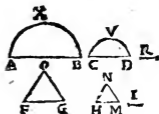
Vniuersè insuper manifestum est, si tres rectæ lineæ deinceps proportionales fuerint, vt prima ad tertiam, ita esse figuram planam descriptam à prima ad eam, quæ à secunda describitur; & huius conuersum, dummodò describentes sint similibus descriptarum figurarum lineæ, siue latera homologa.

THEOREMA XVI. PROPOS. XVI.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima autem, & secunda similes figuras planas descriperint, & tertia, & quarta alias figuras planas similes, licet etiam prædictis dissimiles essent, ita vt describentes sint earum lineæ, vel latera homologa, figura primæ ad figuram secundæ erit,

vt figura tertiæ ad figuram quartæ. Et si fuerint quatuor figura planæ proportionales, ita vt quæ sunt termini eiusdem proportionis sint figuræ similes, descriptæ ab eorundem lineis, vel lateribus homologis; lineæ, vel latera homologa describentia erunt proportionalia.

Sint quatuor rectæ lineæ proportionales, AB, CD, FG, HM , prima verò, & secunda describant fig. planas similes, AXB, CVD , & FG, HM , similes figuras planas, FOG, HNM , licet prædictis dissimiles essent, & sint describentes figurarum descriptarum lineæ, vel latera homologa. Dico, AXB , ad CVD , esse vt, FOG , ad HNM . Sit, R , tertia proportionalis ipsarum, AB, CD , & I , tertia proportionalis ipsarum, FG, HM ; est igitur, AXB , ad CVD , vt, AB , ad R , .i. in ratione dupla eius, quam habet, AB , ad CD , .i. eius, quam habet, FG , ad HM , .i. vt, FG , ad I , quæ est, vt, FOG , ad HNM , ergo vt, AXB , ad CVD , ita erit, FOG , ad HNM .



Coroll. 1.
antec.

Sit nunc figura, AXB , ad CVD , sibi similem, vt, FOG , ad HNM , sibi similem, licet istæ essent prædictis dissimiles, & eas describentes sint earum lineæ, vel latera homologa. Dico, AB , ad CD , esse vt, FG , ad HM , sit adhuc, R , tertia proportionalis ipsarum, AB, CD , & I , tertia proportionalis ipsarum, FG, HM , est ergo, vt figura, AXB , ad CVD , ita, AB , ad R , vt verò figura, FOG , ad HNM , ita, FG , ad I , est verò, vt, AXB , ad CVD , ita, FOG , ad HNM , ergo vt, AB , ad R , sic, FG , ad I , est autem, AB , ad R , dupla rationis ipsius, AB , ad CD , & FG , ad I , dupla rationis ipsius, FG , ad HM , ergo vt, AB , ad CD , ita, FG , ad HM , quæ ostendere opus erat.

Coroll. 2.
antec.

S C H O L I V M.

Propositionis proximè subsequenti nimia fortasse prolixitas fastidium potius Lectori, quam delectationem pariet, verumtamen, qui hoc veretur, ac tantum otij, aut tolerantia habere nequit, vt illius satis longam texturam percurrere valeat, ipsam supponat, ac prætereat, ijs enim præcipuè à me dirigitur, quibus nec otium deest, nec ingenium,

ac vo-

ac voluntis, pulchras demonstrationes etsi difficiles, ac longas infracto quodam animi vigore superandi, potius quam ab ipsis superari velint. Poterat quidem in plures Propositiones commodius distribui, sed cum illæ omnes in hanc simplicissimam essent conspiratura, eas omnes sub hac una Proposit. colligavi, quam tamen in sectiones ceu in tot membra distinguere placuit, ne Lectoris mens nimium defatigaretur. Torro quanti hac Propositio sit momenti, sicut & præcedens Propos. 15. attentè præcipuè earum uniuersalitate, neminem, qui easdem intellexerit, fore puto, qui itidem non agnoscat; quid enim fuit, quo ad figuras planas, Euclidem lib. 6. Elementorum in Propos. 19. demonstrasse similia triangula, & in Propos. 20. similia Polygona esse in dupla ratione laterum homologorum, necnon lib. 12. Propos. 2. Circulos esse, vt diameterum quadrata, hoc est in dupla ratione diameterum? Similiter in eo, quod spectat ad solida, quid fuit ipsum nobis in lib. 12. Propos. 8. ostendisse similes Pyramides esse in tripla ratione laterum homologorum, & in Prop. 12. similes conos, & cylindros esse in tripla ratione diameterum. quæ sunt in b. sibus, & in Propos. 18. Sphæras itidem esse in tripla proportione diameterum? Quid tandem fuit alios quoq; demonstrasse, quadam alia similia solida, vt portiones Sphærarum, necnon Sphæroidearum, & Conoidearum figurarum, esse in tripla ratione linearum, vel laterum homologorum? Træ huius comparatione, quod in his duabus tantum Propositionibus edocemur; omnes .n. similes figuras planas in Prop. 15. & omnes solidas in subsequenti Propos. 17. comprehendimus, quod mehercle consideratione dignum videtur.

THEOREMA XVII. PROPOS. XVII:

OMnia similia solida sunt in tripla ratione linearum, vel laterum homologorum, quæ sunt in eorundem homologis figuris.

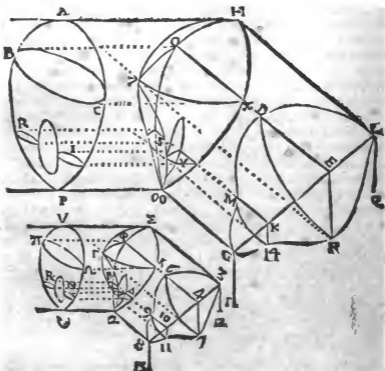
A. DEMONSTRATIONIS SECTIO I.

Sint duo utrunq; similia solida, V & , A P. Dico hæc esse in tripla ratione linearum, siue laterum homologorum, quæ sunt in eorundem homologis figuris. Quia ergo dicta solida sunt similia, poterunt duci duo plana opposita tangentia in vnoquoque proposito- rum solidorum (quæ in solido, A P, repræsententur per ipsas, A H, Coroll. 1. P 10, & in solido, V &, per ipsas, V Z, & 2,) homologis eorundem lib. 11. figuris æquidistantia, inter quæ etiam ducibilia erunt alia duo plana De fin. 11. æqualiter ad ipsa, & ad eandem partem inclinata, in quibus iacebunt lib. 11. figu-

figuræ, quæ erunt dictorum similium solidorum, & tangentium oppositorum, figuræ incidentes, sint igitur talia duo plana, quorum, & oppositorum planorum tangentium in solido, AP , communes sectiones, HL , OO , G , & solidi, V & Σ , Σ 8, in his autem planis sint eorum incidentes figuræ, $H\infty$, Σ 2, istæ igitur erunt figuræ similes, & tangentur à dictis communibus sectionibus, quæ erunt linearum homologarum earundem etiam regulæ, sint earum incidentes.

Defin. 11.
lib. 1.

B. Def. 10.
lib. 1.



res utcumque inter easdem ductæ, LG , Σ 8, & extendantur inter dicta opposita tangentia utcumque plana eisdem æquidistantia, altitudines propositorum solidorum respectu dictorum tangentium sumptas similiter ad eandem partem diuidentia, sit igitur unius ductorum planorum concepta in solido, AP , figura, BC , eiusdem autem, & figuræ, $H\infty$, communis sectio, OX , quod etiam secet incidentem figuræ, $H\infty$, quæ est, LG . in, E ; pariter alterius plani concepta in solido, V & Σ , figura sit, Π Δ , idem verò plagum secet figuram, Σ 2, in re-

in recta, $\phi \Lambda$, & incidentem eiusdem figuræ, nempe ipsam, 38 , in puncto, 4 , igitur figuræ, $BC, \Pi \Omega$, erunt duæ figurarum-homologarum solidorum, $AP, V \& \&, OX, \phi \Lambda$, earum incidentes, & $LG, 38$, erunt similiter diuisæ in punctis, $E, 4$, nam etiam altitudines propositorum similium solidorum sunt similiter diuisæ (ad eandem partem subintellige) si igitur à punctis, O, ϕ , duxerimus tangentes figuras, $BC, \Pi \Omega$, erunt istæ regulis homologarum earundem figurarum parallelæ, vel pro regulis aliarum etiam assumi poterunt, & quæ à punctis, X, Λ , ducentur prædictis parallelæ occurrent eidem figuris, & illas ex opposito prædictarum contingunt, ita ut habeamus (si & istæ ductæ intelligantur, quæ sint, $XC, \Lambda \Omega$,) oppositas tangentes figuræ, BC , quæ erunt, BO, CX , & figuræ, $\Pi \Omega$, quæ erunt, $\Pi \phi, \Omega \Lambda$, necnon pro regulis homologarum earundem haberi poterunt; vel igitur figuræ, $BC, \Pi \Omega$, adiacent suis incidentibus, $OX, \phi \Lambda$, totæ ad eandem partem, & interius integrè existentes, vel non, si sic factum erit, quod volumus, si non transferantur omnes lineæ figurarum, $BC, \Pi \Omega$, regulis eidem tangentibus, in figuras ipsis, $OX, \phi \Lambda$, adiacentes, pro ut in Prop. 15. effectum est, hinc autem resultantis figuræ sint, $OZX, \phi \Gamma \Lambda$, quæ per talem constructionem ad eandem partem incidentium, & interius integrè nobis proueniunt. Similiter si intelligamus ducta alia duo plana prædictæ æquidistantia, quæ solida proposita ita lecent, ut fiant in ipsis non vnica in singulis figura, sed plures, ex. gr. in solido, AP , figuræ, R, I , & in, $V \&$, figuræ, β, N , eadem autem secant figuras incidentes in rectis, $SY, B \Delta$, & rectas, $LG, 38$, in punctis, $K, 10$, dummodo hæc plana pariter secant altitudines dictas propositorum solidorum similiter ad eandem partem, erunt figuræ, R, I , binæ similes, & similiter positæ, ac figuræ, β, N ,. I, similis ipsi, N , & R , ipsi, β , & linearum homologarum earundem regulæ ipsis, $CX, \Omega \Lambda$, æquidistant, ipsæ autem rectæ, S, Y ; β, Δ , erunt earundem incidentes, ut, S, β , ipsarum, R, β , & Y, Δ , ipsarum, I, N , si igitur figuræ, R, I, β, N , non adiacent suis incidentibus, transferantur singularum omnes lineæ, regula semper, pro figuris, R, I , ipsa, CX , & pro figuris, β, N , ipsa, $\Omega \Lambda$, in figuras adiacentes lineis homologis figurarum, $H \infty, \Sigma 2$, ut sint nobis inuentæ figuræ, S, Y, β, Δ , quæ adiaceant homologis lineis figurarum incidentium, $I, 1, \infty, \Sigma 2$: Si igitur eandem methodum seruemus in cæteris figuris, quæ ex lectio-
ne planorum tangentibus æquidistantium in dictis solidis producuntur, transferentes nempe omnes earum lineas homologas, regulis semper ipsis, $CX, \Omega \Lambda$, in figuras adiacentes lineis homologis figurarum incidentium, $H, \infty, \Sigma 2$, quæ reperientur totæ ad eandem partem, & interius integrè, tandem nobis erunt comparata duo solida, quæ

Defin. 11. huius.

17. Vnder. Elem.

Vide A. 15. huius Propos. 11.

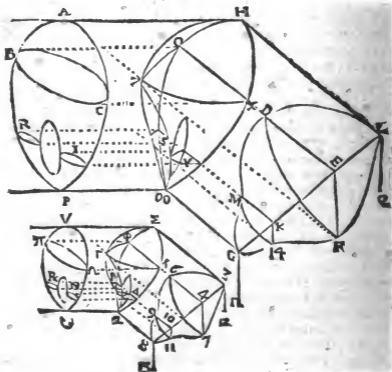
E. Def. 14. lib. 1.

Vide ad fig. A. Prop. 15. huius.

quæ prædictis similibus solidis æquabuntur ea nempe, quorum omnes prædictæ adiacentes figuræ erunt omnia plana, nam hæc omnes adiacentes erunt æquales omnibus homologis figuris dictorum similibus solidorum, quarum omnes lineæ in ipsas figuras adiacentes modo dicto translatae sunt, sint hæc solida, HZ^{∞} , & $\Sigma \Gamma 2$, igitur, AP , erit æquale ipsi, HZ^{∞} , & $V&$, ipsi, $\Sigma 2$. Sed & hæc solida, HZ^{∞} , & $\Sigma \Gamma 2$, erunt inter se similia, nam figuræ planæ in eisdem captæ,

3. huius.

D. sic. II.
ib. 1.



æquidistantes dictis tangentibus planis, & altitudines respectu dictorum tangentium sumptas similiter, & ad eandem partem dividendes, sunt inter se similes, & in ipsis linearum homologarum regulæ omnes vni cuidam æquidistant, illi nempe, qua regulæ translationes factæ sunt, & earundem figurarum similibus, incidentes sunt nec homologarum planarum similibus figurarum, nempe, H^{∞} , & $\Sigma 2$, æqualiter ad figuras adiacentes, & ad eandem partem inclinatarum, quarum regulæ sunt communes sectiones oppositorum tangentium planarum.

planorum, necnon planorum earundem figurarum incidentium, nempe, HL, 3, 2, quod serua.

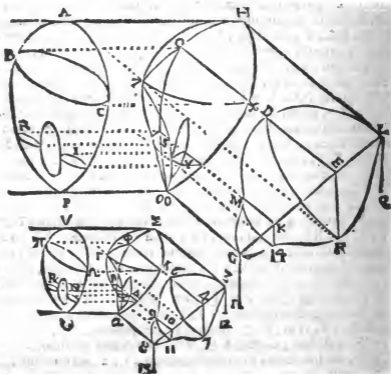
B. SECTIO II.

NVnc quia figuræ iam dictæ adjacentes homologis lineis figurarum, H^{oo}, 2, plurificari possunt, quæ sunt in eodem plano, uti apparet in figuris, S, Y, β , Δ , quæ cum sint in eodem plano sunt tamen duæ figuræ, idè vt ex duobus fiat vna tantum, adhuc omnium linearum harum adjacentium figurarum aliam translationem regulis, HL, 3, faciemus; ducantur ergo per ipsas, LG, 3, 8, duo plana, quorum & oppositorum planorum tangentium communes sectiones sint ipsæ, 3¹¹, 8¹¹, LQ, GT, cum ipsis, 3, 2, 8, 2, LH, G^{oo}, angulos æquales continentes, & agantur duæ ex opposito tangentibus figuræ, OZX, ϕ Γ Λ , parallelæ ipsis, OX, ϕ Δ , quæ sint ipsæ, ZF, Γ 7, productæ cum reliquis tangentibus oppositis, OX, ϕ Λ , donec occurrant planis, LT, 3¹¹, vt in punctis, E, F; 4, 7, iunctis rectis lineis, EF, 4 7. Quia ergo, DE, æquidistat ipsi, G, &, 16. Vnde, EF, ipsi, GT, angulus, DEF, æquatur angulo, G, & eadem Blcm. ratione angulus, 6 4 7, probabitur æqualis ipsi, 2 8¹¹, vnde, quia, G, T, æquatur ipsi, 2 8¹¹, angulus, FED, erit æqualis angulo, 7 4 6, & cum sit, vt, OX, ad, ϕ Λ , vel vt, OE, ad, ϕ 4, quia, LG, 3, 8, sunt lineæ incidentes similibus planarum figurarum, H^{oo}, 2, vel vt, XE, ad, Λ 4, ita, EF, ad, 4 7, sint autem, XE, Λ 4, comprehensæ inter eandem extremitates rectarum, EF, 4 7, & perimetrum figurarum, OZX, ϕ Γ Λ , eandem tangentes, ergo, EF, 4 7, erunt incidentes similibus figurarum, OZX, ϕ Γ Λ , & oppositarum tangentium, OE, ZF; ϕ 4, Γ 7. Similiter si sic producantur 24. lib. 6, oppositæ tangentes figurarum, S, Y; β Δ , quarum duæ incidant ipsis, LG, 3, 8, vt in, K, 10, reliquæ verò in punctis, 11¹¹, 12, planis, LT, 3¹¹, occurrant, iunctis, K, 14, 10¹¹, ostendemus pariter ipsas, K, 14, 10¹¹, esse incidentes similibus figurarum, Y, Δ , vel similibus, S, β , & oppositarum tangentium extremarum, quæ ad puncta, K, 1 4, &, 10, 11, terminantur. Si igitur transferamus omnes lineas tum figurarum, S, Y, tum, β , Δ , regulis eisdem tangentibus, vel semper regulis ipsis, OE, ϕ 4, prius compositis illis, quæ sibi in directum erunt, tum in figuris, S, Y, tum, β Δ , vt ex illis fiat vnica composita recta linea, prædictis in directum posita in figura adiacente, qualis sit, 9¹⁰, æqualis scilicet compositæ ex his, quibus adiacent figuræ, β Δ , &, MK, æqualis compositæ ex his, quibus adiacent figuræ, S, Y; tandem habebimus figuras adiacentes ipsis incidentibus scilicet MK, 14, 9¹⁰, 11, in quibus plures figuræ, S, Y, in vnâ, MK, 14, & β , Δ , in vnâ,

Corollar.
24. lib. 6.

Vide ad
finem A.
p. 15. hu-
ius.

nam, 9²² 23, collectæ erunt. Si igitur hoc fiat in cæteris figuris, quæ in solidis, $HZ\infty$, $\Sigma\Gamma 2$, ipsi tangentibus planis æquidistant, tandem habebimus duo solida, quæ sint, $LDFG$, 3 687, æqualia duobus solidis, $HZ\infty$, $\Sigma\Gamma 2$, seu duobus, $AP, V\&$, 4 DGF , nempe ipsi, 3. huius. $AP, \&$, 3 687, ipsi, $V\&$, nam omnia eorum plana, regulis oppositis tangentibus planis, sunt inter se æqualia ex constructione. Sed & hæc solida, $LDFG$, 3 687, dico esse inter se similia: Cum .n.



præfatis oppositis tangentibus planis (quæ sunt etiam opposita tangentia plana solidorum, $LDFG$, 3 687,) incidant quoque duo plana, LT , 3²³, ad eundem angulum ex eadem parte (sunt .n. prima plana, HG , $\Sigma 8$, oppositis tangentibus planis æquè, & ad eandem partem, inclinata, & anguli, $TG\infty$, $\Sigma 82$, æquales inter se, necnon anguli, $LG\infty$, 3 82, unde etiam secunda plana ad eandem tangentia plana sunt ad eundem angulum ex eadem parte. Sint verò figuræ ex planis inclinata oppositis tangentibus parallelis, altitudi-
nes-

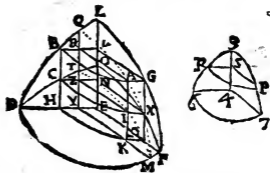
æque ipsorum solidorum, LDGF, 3687, similiter ad eandem
 partem diuidentibus, conceptæ (vt probatum est) inter se similes, vt
 ipsæ, DEF, 647, necnon, MK¹⁴, 9¹⁰11, & omnium earundem
 linearum homologarum regulæ duabus quibusdam, nempe ipsis, O
 E, 4, æquidistantes, & earum incidentes ipsæ, EF, 47, necnon,
 K¹⁴, 10¹¹, quæ omnes incidentes iacent in plano similitum figurarum,
 LFG, 378, & sunt earum homologæ, æquidistantes ipsis, LQ,
 312, communibus sectionibus planorum incidentium figurarum, L
 FG, 378, & oppositorum tangentium, quarum quidem figurarum 16. lib. 1.
 plana sunt ad plana tangentia, vt dictum est, æque ad eandem par-
 tem inclinata, & cum ipsæ, inquam, figuræ, LFG, 378, sint si-
 milis inter se, nam ex. gr. est, EF, ad, 47, vt, OE, ad, 4, id est A. Def. 10.
 vt, LG, ad, 38, quæ diuidunt similiter ad eandem partem ipsas, lib. 1.
 G, 38, (cuius etiam de cæteris probabitur) & cum anguli, LGT,
 3812, sint etiam æquales superius dictis consequenter, & ijs, quæ 16. lib. 1.
 lib. 1. Prop. 26. ostensa sunt, idco, inquam, & ipsæ figuræ, LFG, Defin. 11.
 378, & ipsa solida, LDGF, 3687, pariter similia erunt. lib. 1.

Nunc solidum, 3678, planis, oppositis tangentibus parallelis,
 in talia frustra diuisum intelligatur, vt quæ in ipsis ducuntur rectæ li-
 neæ ipsi, 38, æquidistantes, in eisdem frustris singulæ integræ habeantur
 .i. ita vt ductarum sic linearum, quæ ad frustrorum ambientem su-
 perficiem terminantur, pars quidem non sit intra frustra, pars verò
 extra, sed totæ intra, vel saltem nihil earum extra reperiatur, hanc
 etenim sectionem supponere fieri posse nullam inuoluit repugnan-
 tiam, cum hoc totum solidum ex duabus linearum translationibus re-
 sultans sit interius integrum, enim verò si præfatum solidum in fru-
 sta quæcunque per dicta plana parallela scinderetur, nec in ipsis con-
 tingeret, quod attentamus, denuo facta frustra planis prædictis pa-
 rallelis continuo refecæremus, vt tandem omnis linearum, ipsi, 38,
 æquidistanter in dictis frustris ducibilium, fractura tolleretur: Esto igitur,
 quod hoc obtinuerimus per duo plana, 91011, 647, oppositis
 planis tangentibus parallela, quibus solidum, 3678, in tria frustra,
 3647, 611, & 910118, sectum habeatur eius rationis, qualem dix-
 imus, in his ergo singulis frustris ductæ quæcunque ipsi, 38, æqui-
 distantes, & ad eorum superficiem terminatæ, integræ habebuntur.
 Sit ulterius in alio solido, LDFG, diuisa, LG, similiter ac, 38, in
 punctis, E, K, per quæ transeant plana; DEF, MK¹⁴, oppositis
 planis tangentibus parallela, quibus solidum, LDFG, in tria fru-
 sta scindatur, LDEF, D¹⁴, MK¹⁴G, erunt ergo etiam hæc frustra
 eius rationis, qualem cupimus .i. omnes ductæ ipsi, LG, æquidistan-
 tes, in ipsis frustris conceptæ, integræ erunt; quod ex eorum simili-
 tudine facile ostendi potest, si enim aliqua ex. gr. in frustris, LDEF,

ductarum sic linearum fracta per superficiem ambientem inueniri posset, etiam illi homologa in frusto, 3647, fracta esse deberet, quod est absurdum, nullam .n. ducibilium ipsi, 38, in solido, 3678, æquidistanter linearum fractam esse iam ex constructione manifestum est, frustra autem, 3647, L D E F, esse inter se similia, sicut etiam, 6¹¹, D¹⁴, necnon, 9¹⁰ 11 8, M K²⁴ G, ex definitione similium solidorum liquidò apparet.

D. S E C T I O I V.

EX his frustis autem duo accipiamus, quæ simul cum homologis partibus ipsarum, L G, 38, detruncantur, ut ipsa, L D E F, 3647, & ponamus eadem seorsim, deinde ex maiori ipsarum, L E, 34, ut ex, L E, abscindatur æquali minori .f. O E, æqualis ipsi, 34, hoc factò intelligamus singulas, quæ tum in figura, L D E, tum in figura, L F E, ipsi, L E, æquidistant, & sunt ex iam dictis totæ interius integræ similiter, & ad eandem partem diuidi, ac secatur, L E, in, O, & per dictas sectiones extensas lines, O D, O F, vltèr secto solido, L D E F, plano vtcunq; ipsi, L F E, æquidistante, quod in eo producat figuram, Q M Y, & in figura,



ra, L D E, rectam, Q Y, in figura verò, D E F, rectam, Y M, & in superficie, L D F, lineam, Q A M, intelligantur singulæ in figura, Q Y M, parallelæ ipsi, Q Y, similiter, & ad eandem partem diuidi, ac secatur, Q Y, in, T, & per ipsas sectiones concipiatur extensa linea, T I M; sic autem fiat in cæteris figuris, quæ in solido, L D E F, ipsi, L E F, æquidistant, inuentis lineis, qualis est ipsa, T I M, quorum termini erunt in lineis, D T O, D M F, per eandem autem lineas sic se habentes intelligamus extensam superficiem, cuius termini erunt lineæ, D O, O F, F D, ut habeamus solidum, O D E F, figuris, O D E, O E F, D E F, & superficie, D O F, comprehensum. Quoniam ergo linea, O F, diuidit omnes ipsi, L E, in figura, L E F, æquidistantes similiter ad eandem partem, ac diuiditur, L E, in, O,

in, O, idè, vt vna ad vnam, sic omnes ad omnes. i. vt, L E, ad, E O, sic omnes lineæ figuræ, L E F, erunt ad omnes lineas figuræ, O E F, regula, L E, .i. vt, L E, ad, E O, ita figura, L E F, ad figuram, O E F; eodem modo ostendemus, vt, Q Y, ad, Y T, sic esse figuram, Q Y M, ad figuram, T Y M, est autem vt, Q Y, ad, Y T, ita, L E, ad, E O, ergo figura, L E F, ad, O E F, erit vt, Q Y M, ad, T Y M, & sic erit quælibet alia figura in solido, L E D F, ipsi, L E F, æquidistans, ad eius portionem in solido, O E D F, manentem, ergo vt vna ad vnam, sic omnes ad omnes. i. vt figura, L E F, ad figuram, O E F, sic omnia plana solidi, L E D F, ad omnia plana solidi, O E D F, regula plano, L E F, & ita solidum, L E D F, ad solidum, O E D F, est autem figura, L E F, ad figuram, O E F, vt, L E, ad, E O, vel ad, 3 4, ergo solidum, L E D F, ad solidum, O E D F, erit vt, L E, ad, 3 4, quod pariter serua.

Coroll. 4.
huius.

4. huius.

4. huius.

3. huius.

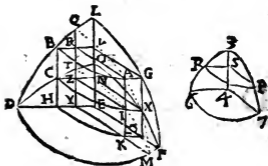
E. S E C T I O V.

DVcatur nunc intra solidum, O E D F, planum ipsi, D E F, æquidistans, quod in eo producat figuram, C N X, quæ secet figuram, O D E, in recta, C N, &, O F E, in recta, N X, & superficiem, O D F, in linea, C X, secet autem & lineas, D O, in, C, O E, in, N, &, O F, in, X, similiter in solido, 3 4 6 7, ducatur planum ipsi, 6 4 7, æquidistans, quod ab ipsa, 3 4, abscindat, 3 5, æqualem ipsi, O N, & producat in eo figuram, R S P; vterius per puncta, C, X, ducantur, B H, G Æ, parallele ipsi, L E, & occurrentes lineis, D L, L F, in, B, G, & rectis, D E, E F, in, H, Æ, deinde à puncto, B, ducatur, B V, parallela ipsi, D E, siue, C N, (nam, D E, C N, sunt communes sectiones planorum æquidistantium, C N X, D E F, & plani, O D E, eadem secantis, vnde, C N, D E, sunt parallele, veluti patebit etiam, N X, æquidistare ipsi, E F,) & iungatur, V G, quia ergo, N X, est parallela ipsi, E Æ, &, X Æ, ipsi, N E, erit, X Æ, æqualis ipsi, N E, & quia, L E, ad, E O, est vt, B H, ad, H C, .i. vt, V E, ad, E N, est autem, G Æ, ad, Æ X, vt, L E, ad, E O, quia est illi parallela, & secatur à linea, O F, in, X, ergo, G Æ, ad, Æ X, erit vt, V E, ad, E N, sunt autem, Æ X, E N, inter se æquales, ergo &, G Æ, V E, erunt æquales, & parallele, ergo etiam eas iungentes, V G, E Æ, erunt æquales, & parallele. Sumatur nunc intra lineam, C X, vtcunq; punctum, I, per quod ipsi, L E, parallela ducatur, A K, quæ superficiem, L D F, occurrat in, A, & plano, D E F, in, K, quia ergo, A K, æquidistat ipsi, L E, poterit per, A K, planum duci æquidistans plano, L E F, sit ductum idem, quod prius, quod adhuc secet figura, L D E, in recta, Q Y,

Ex is. 21.
Elem.

QY, DEF, in recta, YM, superficiem, LDF, in linea, QM, superficiem, ODF, in linea, TM, & figuram, CNX, in recta, ZI, fecit autem, QY, ipsam, BV, in puncto, & iungatur, A α , erit ergo, ZI, ipsi, YK, æquidistans, est autem etiam, AK, æquidistans ipsi, QY, ergo, YI, erit parallelogrammum, & ideo, IK, erit æqualis ipsi, ZY, & quia, AK, ad, KI, est vt, QY, ad, YT, .i. vt, BH, ad, HC, .i. vt, & Y, ad, YZ, erit, AK, ad, KI, vt, & Y, ad, YZ, sunt verò, IK, ZY, æquales, ergo &, AK, & Y, erunt æquales, & sunt parallelæ, quia ambo sunt parallelæ eidem, LE, ergo eas iungentes, quæ sunt, & A, YK, erunt æquales, & parallelæ, est autem, YK, parallela ipsi, E α , & E α , ipsi, VG, ergo, & A, erit parallela ipsi, VG. Similiter autem procedemus in reliquis, quæ per puncta lineæ, CX, ipsi, LE, ducuntur æquidistantes, donec occurrant superfici, LDF, & plano, DEF,

Percõstru
tionem.



harum autem patet nihil extra superficiem, LDF, manere, ex iam dictis, sint ergo omnium earum termini ex vna parte in linea, BAG, ex alia in linea, HK α , veluti ergo ostensum est, A α , esse parallelam ipsi, GV, sic ostendemus reliquas, quæ iungunt puncta, quibus iam ductæ occurrunt lineæ, BG, cum punctis, in quibus plana per dictas lineas ducta, ipsi, LEF, æquidistantia, secant ipsam, BV, esse ipsi, VG, parallelas ergo omnes erunt in eodem plano, in eo scilicet quod transit per, BV, VG, omnes .n. dictæ parallelæ transeunt per puncta rectæ lineæ, BV, sunt igitur dicta occursum puncta, & in superficie, LDF, & in plano, BVG, erunt ergo in eorum communi sectione, linea ergo, BAG, est communis sectio plani per, BV, VG, transeuntis, & superfici, LDF; habemus ergo solidum, B α , in cuius ambiente superficie sunt duæ figuræ planæ inuicem parallelæ, BVG, HE α , in quarum circuitu sumptis utrunque duobus punctis, V, E, & iuncta, VE, cæteræ iungentes qualibet aliæ duo puncta earundem circuitus eidem semper, VE, parallelæ reperitæ sunt æquales, ergo, B α , erit cylindricus, cuius oppositæ bases ipsæ, BVG, HE α , hoc autem secatur plano eidem oppositis ba-

Def. Cy-
lindrici
confor-
miter.

sibus

fibus æquidistante, conempè, quod producit figuram, CNX, ergo, CNX, erit æqualis ipsi, BVG, quod cum alijs adhuc serua. Corol. 12. lib. 1.

F. S E C T I O VI.

Q Via verò, LE, ad, EO, est vt, BH, ad, HC, .i. vt, VE, ad, EN, permutando, & diuidendo, LV, ad, VE, erit vt, ON, ad, NE, .i. vt, 35, ad, 54, ergo, LE, 34, sunt similiter ad eandem partem diuisæ à figuris, BVG, RSP, ergo sunt ipsæ figuræ inter se similes, quarum latera homologa ipsæ, VG, SP, lineæ homologæ figurarum similia, LE, 374, quarum incidentes sunt ipsæ, LE, 34, vnde est, EF, ad, 47, vt, LE, ad, 34, .i. vt, VG, ad, SP, sunt verò figuræ, DEF, 647, quia similes, in dupla ratione ipsarum, EF, 47, & ipsæ, BVG, RSP, in dupla ratione ipsarum, VG, SP, ergo vt figura, DEF, ad figuram, 647, ita erit figura, BVG, vel, CNX, eidem æqualis ad figuram, RSP, Quoniam verò solida, LEDF, 3647, sunt similia, vt facile ostendi potest, & eorum figuræ incidentes, & oppositorum planorum tangentium (quorum ex vna parte duo sunt ipsa, 647, DEF,) sunt figuræ, LE, 347, quarum lineæ incidentes, LE, 34, ideo plana ipsis, DEF, 647, æquidistantia, quæ similiter ad eandem partem diuidunt incidentes, LE, 34, diuidunt etiam altitudines dictorum solidorum respectu dictorum tangentium sumptas similiter ad eandem partem (hoc dico quotiescunque, non contingat, LE, 34, esse perpendiculares ipsis, DEF, 647, tunc enim sunt eadem incidentes altitudines dictorum solidorum) cum igitur, vt, LE, ad, 34, .i. ad, EO, ita sit altitudo solidi, LEDF, tum ad abscissam altitudinem per planum tangens in, O, ipsi, DEF, æquidistans .i. ad altitudinem solidi, OEDF, tum ad altitudinem solidi, 3467, ideo solida, OEDF, 347, erunt in eadem altitudine sumpta respectu basium, DEF, 647, & plana ipsis basibus æquidistantia partes æquales ab ipsis, OE, 34, abscindunt, etiam ab eorum altitudinibus abscindunt partes æquales, ostendimus autem figuras, quæ ab ipsis, OE, 34, abscindunt partes æquales, esse proportionales, ergo in solidis, OEDF, 3467, in eadem altitudine existentibus sumpta respectu basium, DEF, 647, figuræ, quæ ab eisdem altitudinibus vtcunque abscindunt partes æquales, sunt semper, vt ipsæ bases, ergo vt vna ad vnā, sic omnes ad omnes, & sic solida ad solida .i. vt basis, DEF, ad basim, 647, ita erit solidum, OEDF, ad solidum, 3467, est autem, DEF, ad, 647, in ratione dupla eius, quam habet, EF, ad, 47, .i. in ratione composita ex duabus rationibus ipsius, EF, ad, 47, vel ipsius, LE, ad, 34, ergo solidum, OEDF, ad, F, ad

Ex diffn.
Emilium
solid.

Ex antec.

17. Vnd.
Elem.

4. huius.

Ex antec.

D: diffn. 12.
lib. 1.

F, ad solidum, 3 4 6 7, habebit rationem compositam ex duabus rationibus ipsius, L E, ad, 3 4, quod etiam serua.

G. S E C T I O V I I.

Defin. 12. **S**I igitur inter solida, L E D F, 3 4 6 7, medium sumamus solidum, O E D F, habebit solidum, L E D F, ad solidum, 3 4 6 7, rationem compositam ex ratione solidi, L E D F, ad solidum, O E D F, .i. ex ratione ipsius, L E, ad, 3 4, & ex ratione solidi, O E D F, ad solidum, 3 4 6 7, .i. compositam ex duabus rationibus ipsius, L E, ad, 3 4, igitur solidum, L E D F, ad solidum, 3 4 6 7, habebit rationem compositam ex tribus rationibus ipsius, L E, ad, 3 4, .i. triplam rationem habebit eius, quam habet, L E, ad, 3 4, quia verò, L E, 3 4, sunt homologæ partes integrarum incidentium, L G, 3 8, quæ sunt in prima huius Propos. figura, ideò his frustis ibidem conspectis iam ostensum erit frustum, L E D F, ad frustum, 3 4 6 7, triplam rationem habere eius, quam habet, L E, ad, 3 4, idest, L G, ad, 3 8.

Def. Vnd.
6. Elem.

H. S E C T I O V I I I. E T V L T I M A.

EOdem modo sumptis alijs duobus frustis, D ¹¹, 6 ¹¹, ostendemus eadem habere triplam rationem duarum, L G, 3 8, & similiter reliqua frustra pariter triplam rationem habere duarum, L G, 3 8, & ut vnum ad vnum, sic omnia ad omnia .i. ut frustum, L E D F, ad frustum, 3 4 6 7, ita esse omnia frustra solidi, L G, ad omnia frustra solidi, 3 8, sed frustum, L E D F, ad frustum, 3 4 6 7, triplam rationem habere ostensum est eius, quam habet, L G, ad, 3 8, ergo solidum, L G, ad solidum, 3 8, triplam rationem habebit eius, quam habet, L G, ad, 3 8, est autem solidum, L G, æquale solido, A P, & 3 8, ipsi, V &, ergo solidum, A P, ad, V &, triplam rationem habebit eius, quam, L G, ad, 3 8, quia verò, L G, 3 8, sunt incidentes similibus planarum figurarum, H [∞], 2, & oppositarum tangentium, H L, [∞] G, 2 8, ideò, ut, L G, ad, 3 8, ita erunt lineæ homologæ figurarum, H [∞], 2, sumptæ regulas, H L, 2 3, ex. gr. ita, O X, ad, φ A, itæ verò sunt incidentes similibus figurarum, B C, π α, & oppositarum tangentium, B O, C X, π φ, α A, ideò, ut ipsæ, O X, φ A, ita erunt quælibet homologæ figurarum, B C, π α, sumptæ regulas ipsas, C X, α A, at solidum, A P, ad, V &, triplam rationem habebit eius, quam, L G, ad, 3 8, ergo etiam triplam rationem habebit eius, quam, O X, ad, φ A, & consequenter etiam triplam rationem eius, quam habebit quælibet in figura, B C, ipsi,

Ex diffin.
linearum
incident.

Ut patet
in A. huius.

ipſi, CX, æquidiftans ad ſibi homologam in figura, n d, ipſi, n A, æquidiftantem, vel quælibet in quacunq; figurarum ipſi, h C, in folido, AP, æquidiftantium, ad ſibi homologam in folido, V &. Igitur ſimilia ſolida ſunt in tripla ratione linearum, vel laterum homologorum, quæ ſunt in eorundem homologis figuris, quod nobis oftendendum erat.

C O R O L L A R I V M I.

ET quia iam dicta ſimilia ſolida oſtenſa ſunt eſſe in tripla ratione linearum homologarum, quæ ſunt in homologis figuris, æquidiftantibus oppoſitis planis tangentibus utcumq; ſumptis, idè clarum eſt eadem ſimilia ſolida eſſe in tripla ratione quarumvis homologarum in ipſis ſolidis deſcribibilium, & duas quaſvis homologas ſumptas iuxta quædam oppoſita tangentia plana, eſſe ut duas quaſvis homologas ſumptas iuxta alia oppoſita tangentia plana.

C O R O L L A R I V M I I.

Vniuerſè inſuper habetur, ſi fuerint quatuor rectæ lineæ deinceps proportionales, ut prima ad quartam, ita eſſe ſolidum deſcriptum à prima ad ſolidum illi ſimile deſcriptum à ſecunda, & huius conuerſum; dummodò deſcribentes ſint lineæ, vel latera homologa ſimilium figurarum, quæ in ipſis homologæ vocantur.

T H E O R E M A X V I I I . P R O P O S . X V I I I :

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, ſolidum deſcriptum à prima ad ſolidum ſibi ſimile deſcriptum à ſecunda, erit, ut ſolidum deſcriptum à tertia ad ſibi ſimile deſcriptum à quarta. Et ſi fuerint quatuor ſolida proportionalia, quorum quæ ſunt eiufdem proportionis termini ſint ſimilia, eadem deſcribentia erunt proportionalia; dummodò ratio ſemper deſcribentia ſint vel lineæ, vel latera homologa figurarum, quæ in ipſis homologæ vocantur.

Sint ergo quatuor rectæ lineæ proportionales, AB, CD, FG, HM, & ſint ab illis, AB, CD, deſcripta ſimilia ſolida, AXB, CV D, & ab, FG, HM, ſimilia ſolida, OFPG, NHQM, ita ut duæ, AB, CD, ſint homologæ figurarum, AEBY, DKCQ, &

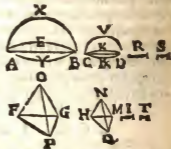
T

FG,

Ex Corol.
3. antec.

FG, HM, homologæ figurarum, FGP, HMQ, quæ figuræ vocantur in ipsis solidis homologæ. Dico hæc solida esse proportionalia; sit duarum, AB, CD, tertia proportionalis, R, quarta, S, & duarum, FG, HM, tertia, I, quarta, T, est igitur solidum, AXB, ad, CVD, vt, AB, ad, S, .i. vt, FG, ad, T, (quia vt, AB, ad, CD, ita est, FG, ad, HM, .i. vt solidum, FOGP, ad, HNMQ, quod est propositum.

Sit nunc solidum, AXB, ad sibi simile, CVD, vt, FOGP, ad sibi simile, HNMQ, & sint eadem describentes, AB, CD, lineæ, vel latera homologa figurarum homologarum, AEBY, CKDZ, & FG, HM, duo postrema describentes sint lineæ, vel latera homologa figurarum homologarum, FGP, HMQ. Dico has esse proportionales; sint adhuc duarum, AB, CD, tertia proportionalis, R, quarta, S, & duarum, FG, HM, tertia, I, quarta, T, quia ergo solida, AXB, CVD, sunt similia erit, AXB, ad, CVD, vt, AB, ad, S, & FOGP, ad, HNMQ, vt, FG, ad, T, sunt autem hæc quatuor solida proportionalia, ergo & AB, ad, S, erit vt, FG, ad, T, ergo, AB, ad, CD, erit vt, FG, ad, HM, quod ostendendum erat.



Ex Corol.
2. antec.

Sit nunc solidum, AXB, ad sibi simile, CVD, vt, FOGP, ad, HNMQ, vt, FG, ad, T, sunt autem hæc quatuor solida proportionalia, ergo & AB, ad, S, erit vt, FG, ad, T, ergo, AB, ad, CD, erit vt, FG, ad, HM, quod ostendendum erat.

THEOREMA XIX. PROPOS. XIX.

SI in parallelogrammo diameter ducta fuerit, parallelogrammum duplum est cuiusvis triangulorum per ipsam diametrum constitutorum.

Sit parallelogrammum utcumque, AD, in quo ducta diameter, FC, ipsum dividat in triangula, FAC, CDF. Dico parallelogrammum, AD, duplum esse cuiusvis triangulorum, FAC, CDF; abscindantur ab, FD, CA, versus puncta, F, C, partes æquales, FE, CB, & per puncta, B, E, parallelæ ipsi basi, CD, ducantur, EH, BM, incidentes diametro, FC, in punctis, H, M; quoniam ergo in triangulis, FHE, CBM,



B M, angulus, H F E, æqualis est angulo illi coalterno, B C M, &, H E F, ipsi, F D C, qui est æqualis angulo illi opposito, F A C, qui tandem æquatur angulo, M B C; interior exteriori, ideò angulus, F E H, æquatur angulo, M B C, sunt igitur in triangulis, F E H, M B C, duo anguli duobus angulis æquales, & latera illis adiacentia sunt æqualia, nempe, F E, ipsi, B C, ergo reliqua latera erunt æqualia, .s. H E, ipsi, B M, eodem modo ostendemus de cæteris parallelis ipsi, C D, eas nempe, quæ verius puncta, F, C, abscindunt à lateribus, F D, C A, partes æquales, esse pariter inter se æquales, veluti sunt extremæ, A F, C D, æquales, ergo omnes lineæ trianguli, C A F, æquabuntur omnibus lineis trianguli, F D C, sumptis in vtrifq; omnibus lineis regula, C D, ergo triangulus, A C F, erit æqualis triangulo, F D C, ergo duo trianguli, A C F, F D C, scilicet parallelogrammum, A D, erit duplum cuiusvis triangulorum, A C F, F C D, quod ostendere opus erat.

16. Prima Elem.

1. huius.

C O R O L L A R I V M I.

Hinc patet, quæcumq; de parallelogrammis in Prop. 5. 6. 7. & 8. huius Libri ostensa sunt, eadem de triangulis ut vera recipi posse, si in triangulis conditiones ibi oppositæ reperiæ fuerint, nam in vnoquoque expositorum triangulorum sumptis duobus quibusvis lateribus, fieri potest sub illis in eodem angulo parallelogrammum, cuius triangulum erit dimidium. Triangula ergo, quæ in eadem sunt altitudine inter se sunt, ut bases: Et quæ in eadem basi inter se sunt, ut altitudines, vel ut latera æqualiter basibus inclinata; Item habent rationem compositam ex ratione basium, & altitudinum, siue laterum æqualiter basibus inclinatorum, cum sunt æquiangulæ: Item triangula, quorum bases altitudinibus, vel lateribus æqualiter basibus inclinatis, reciprocantur sunt æqualia; & quæ sunt æqualia bases habent altitudinibus, vel lateribus æqualiter basibus inclinatis, reciprocas: Et tandem habetur similia triangula esse in dupla ratione laterum homologorum, quæ omnia ex præsentibus Tropos. pendent.

lux. diff. 1. Sexti Elem.

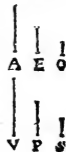
C O R O L L A R I V M I I.

Colligitur in super, si supponamus, C D, esse æqualem ipsi, D F, quamlibet ductam in triangulo, F C D, parallelam ipsi, C D; æqualem esse ei, quam ipsa abscindit ab, F D, versus, F, nempe ipsi abscisse, F E, & producta, E H, versus, A C, cui incidat in, N, ipsam, H N, æquari residua abscisse, F E, .s. ipsi, E D, &, N E, integram æquari ipsi,

- Defin. 4. huius. *ipſi, F D, quæ eſt vna maximarum abſciſſarum ipſius, F D, vnde hæc via colligemus omnes lineas trianguli, F C D, regula, C D, dum latus, F D, eſſe æquales omnibus abſciſſis ipſius, F D; & omnes lineas trianguli, A F C, eſſe æquales reſiduis omnium abſciſſarum, F D,*
 Defin. 5. huius. *& omnes lineas parallelogrammi, A D, æquari maximis abſciſſarum, F D, quæ dicuntur eiſdem obliqui tranſitus, ſi angulus, C D F, non ſit reſtius, & reſti tranſitus, ſi ſit reſtius; vnde ſicuti oſtendimus, parallelogrammum, A D, duplum eſſe trianguli, F C D, vel, A C F, & ſubinde etiam omnes lineas, A D, regulæ. C D, duplas eſſe omnium linearum trianguli, F C D, vel, A C F, ſic etiam vt demonſtratum recipi poteſt propoſita linea reſtæ, vt ipſius, F D, vtcunq; maximas abſciſſarum, duplas eſſe omnium abſciſſarum eiſdem, vel reſidarum omnium abſciſſarum, vnde & omnes abſciſſas patebit æquari reſiduis omnium abſciſſarum eiſdem lineæ, iſs vel reſti, vel eiſdem obliqui tranſitus ſumptis, quæ ad ſequentium intelligentiam diligenter ſunt adnotanda.*

L E M M A.

- S**It magnitudo, A, ad quoruncunq; magnitudines, E, O, ſingillatim ad vnamquamq; vt magnitudo, V, ad tot alias, P, S, ſingillatim ad vnamquamq; nempè ſit, A, ad, E, vt, V, ad, P; A, ad, O, vt, V, ad, S. Dico, A, ad, E, O, ſimul eſſe, vt, V, ad, P, S, ſimul iunctas. Etenim conuertendo erit prima, E, ad ſecundam, A, vt tertia, P, ad quartam, V, ſed etiam conuertendo quinta, O, eſt ad ſecundam, A, vt ſexta, S, ad quartam, V, ergo compoſita ex prima, E, & quinta, O, erit ad ſecundam, A, vt compoſita ex tertia, P, & ſexta, S, ad quartam, V, ergo conuertendo, A, ad, E O, ſimul erit, vt, V, ad, P, S, ſimul iunctas, qui arguendi modus dicitur à me, colligere, ſeu colligendo.



THEOREMA XX. PROPOS. XX.

Aſumpta Propoſ. antecedentis figura, dimiſſa, B M, retineatur, N E, pro vna ex ductis vtcunq; parallela ipſi, C D, producta autem, C D, vtcunq; in, M, completoque parallelogrammo, O D. Dico parallelogrammum, A M, ad trapezium, F C M O, eſſe vt, C M, ad, M D, ſimul cum, C D.

Erit

Erit enim, AM , parallelogrammum, unde, MA , ad, AD , erit
 vt, CM , ad, CD , AD , verò ad trian-
 gulum, FGD ; est vt, CD , ad, $\frac{1}{2}$, C
 D , ergo, AM , ad triangulum, FGD ,
 erit vt, MC , ad, $\frac{1}{2}$, CD ; est autem,
 AM , ad, FM , vt, CM , ad, MD ,
 ergo, colligendo, AM , ad, FM , cum
 triangulo, FGD , idest ad trapezium,
 $OFDM$, erit vt, CM , ad, MD , cum,
 $\frac{1}{2}$, DC , quod ostendendum erat.

5. huius
 Ex antec.
 5. huius



COROLLARIUM

Manifestum est autem, si, CD , sit equalis ipsi, DF , omnes lineas
 parallelogrammi, AD , regula, CD , esse aequales maximis ab-
 scissarum, FD , & omnes lineas trianguli, FGD , regula eadem equari
 omnibus abscissis, FD . Nunc si intelligamus cuilibet earum, qua dicuntur
 maxima abscissarum, vel abscissa, adiungi rectam, DM , vocantur
 tunc maxima abscissarum, vel abscissa adiuncta, DM , hac autem sunt
 eadem illis, qua habentur in parallelogrammo, AM , & trapezio, FC
 MO , nam si produxeris, NE , usq; ad, OM , in, X , fiet, EX , adiu-
 ncta tum ipsi, NE , vni ex maximis abscissarum, FD , tum ipsi, HE ,
 vni ex omnibus abscissis, FD , & EX , adiuncta est equalis ipsi, DM ,
 unde omnes lineae, AD , adiuncta, DM , sunt omnes lineae parallelo-
 grammi, AM , & sunt aequales maximis abscissarum ipsius, FD , ad-
 iuncta, DM , & omnes lineae trianguli, FGD , adiuncta, DM , sunt om-
 nes lineae trapezij, $FCMO$, & sunt aequales omnibus abscissis ipsius, F
 D , adiuncta, DM . Quia ergo, AM , ad trapezium, $FCMO$, est vt, C
 M , ad, MD , cum, $\frac{1}{2}$, DC , idem omnes lineae, AM , ad omnes lineas
 trapezij, $FCMO$, (regula hic semper intellige ipsam, CM ,) .i. ma-
 xima abscissarum, FD , adiuncta, DM , ad omnes abscissas, FD , adiu-
 ncta, DM , erunt vt, CM , composita nempe ex proposita linea, CD , sine
 ex proposita, FD , illi equali, & adiuncta, DM , ad compositam ex ad-
 iuncta, MD , & $\frac{1}{2}$, proposita linea, CD , vel, DF .

Ex Cor. 3
 antec.
 Defin. 7
 huius
 3. huius

THEOREMA XXI. PROPOS. XXI.

IN exposita superioris Propos. figura, si producat, CD ,
 ad partes, C , vtcunque, vt in, R , & compleatur paralle-
 logrammum, GC , ostendemus trapezium, $FGRC$, ad tra-
 pe-

pezium, $FCMO$, esse vt composita ex, RC , & $\frac{1}{2}$, CD , ad compositam ex, MD , & $\frac{1}{2}$, CD .

Nam trapezium, $CRGF$, ad, GD , est vt composita ex, RC , & $\frac{1}{2}$, CD , ad, RD , insuper, GD , ad, AM , est vt, RD , ad, CM , & tandem, AM , ad trapezium, $FCMO$, est vt, CM , ad, MD , cum, $\frac{1}{2}$, CD , ergo ex æquali trapezium, $FGRC$, ad trapezium, $FCMO$, erit vt, RC , cum, $\frac{1}{2}$, CD , ad, MD , cum, $\frac{1}{2}$, CD , quod erat demonstrandum.

C O R O L L A R I U M.

3. huius.

Hinc patet omnes lineas trapezij, $FGRC$, regula, RM , ad omnes lineas trapezij, $FCMO$, regula eadem esse, vt, RC , cum, $\frac{1}{2}$, CD , ad, MD , cum, $\frac{1}{2}$, CD , veluti autem in antecedenti ostendimus, si, CD , sit æqualis ipsi, DF , omnes lineas trapezij, $FGMO$, regula, CM , æquari omnibus abscissis ipsius, FD , adiuncta, DM , ita in præfenti ostendemus omnes lineas trapezij, $FGRC$, regula, RD , æquari residuis omnium abscissarum ipsius, AC , vel, FD , adiuncta, RC ; unde patebit residuas abscissarum proposita linea, vt, FD , adiuncta, RC , ad omnes abscissas eiusdem, adiuncta alia linea, vt, DM , esse vt compositum ex prima adiuncta, & $\frac{1}{2}$, proposita, CD , siue, FD , illi æqualis, ad compositum ex secunda adiuncta, & $\frac{1}{2}$, proposita linea, id est vt, RC , cum, $\frac{1}{2}$, CD , vel, DF , ad, MD , cum, $\frac{1}{2}$, CD , vel, DF .

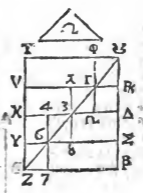
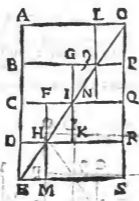
THEOREMA XXII. PROPOS. XXII.

Expositis duobus utrunque parallelogrammis, in eisdemque ductis diametris, & duobus utrunque lateribus pro regula sumptis, nempe in vnoquoque eorum vno: Omnia quadrata cuiusvis dictorum parallelogrammorum ad omnia quadrata cuiusvis triangulorum per diametrum in ipso constitutorum, erunt vt omnia quadrata reliqui parallelogrammi ad omnia quadrata cuiusvis triangulorum per diametrum in isto ductam pariter constitutorum.

Sint exposita utrunque parallelogramma, AS , $T\beta$, in ijsque ductæ diametri, EO , $Z\beta$, regulis sumptis, ES , $Z\beta$. Dico omnia quadrata, AS , ad omnia quadrata trianguli, OES , esse vt omnia quadrata, $T\beta$, ad omnia quadrata, & $Z\beta$. Si enim, vt omnia quadrata.

drata, $T\beta$, ad omnia quadrata trianguli, & $Z\beta$, ita non sunt omnia quadrata, AS , ad omnia quadrata trianguli, OES , erunt igitur ita omnia quadrata, AS , ad maius, vel ad minus omnibus quadratis trianguli, OES , sint excessus, vel defectus, omnia quadrata figuræ planæ, α , diuidatur autem latus, OS , bifariam, in, Q , &, OQ , QS , bifariam in, P , R , & sic deinceps fiat, ita vt ductis per puncta diuisionum parallelis ipsi, ES , DR , CQ , BP , tandem deuentum sit ad parallelogrammum, DS , cuius omnia quadrata, re-
 gula, ES , sint minora omnibus quadratis figuræ, α , per puncta au-
 tem, in quibus dicte parallelæ ipsam, OE , secant, ducantur vique
 ad proximas parallelas æquidistantes lateribus, AE , OS , ipsæ, LN ,
 GK , EM , erit igitur triangulo, OES , circumscripta figura quæ-
 dam cõposita ex

parallelogramo, LP , GQ , FR , DS , & alia inscripta composita ex parallelogrammis, $9Q$, IR , HS , ita vt omnia quadrata figuræ circumscriptæ, regula, ES , excedant omnia quadrata inscriptæ, regula eadẽ, minori quantitate, quam sint



omnia quadrata, figuræ, α , nam in parallelogrammo, DS , recta, HM , diuidit omnia quadrata, DS , in omnia quadrata, DM , in omnia quadrata, HS , & in rectangula bis sub, DM , MR , veluti punctum, H , diuidit quadratum, DR , in quadrat. DH , quad. ar. HR , & rectangulum bis sub, DHR , sic ex 23. seq. ab hac independente, & ideo omnia quadrat. DS , excedunt omnia quadrata, HS , omnibus quadratis, DM , & rectangulis bis sub, DM , MR , eodem pacto ostendemus omnia quadrata, FR , excedere omnia quadrata, IR , omnibus quadratis, FK , & rectangulis bis sub, FK , KQ , & sic omnia quadrata, GQ , excedere omnia quadrata, $9Q$, omnibus quadratis, GN , cum rectangulis bis sub, GN , NP , & in figura circumscripta superflunt adhuc omnia quadrata, LP , porro si hos excessus simul colligamus fient omnia quadrata, DS , nam si omnia quadrata, LP , vel, $9Q$, iunxeris omnibus quadratis, GN ,
 & re-

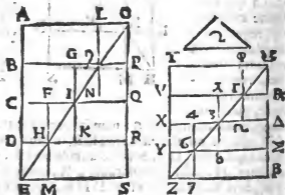
Eucl. prim.
10. Elem.

& rectangulis bis sub, GN, NP, fient omnia quadrata, GQ, hæc si iunxeris omnibus quadratis, FK, cum rectangulis bis sub, FK, KQ, fient omnia quadrata, FR, quæ tandem si iunxeris omnibus quadratis, DM, cum rectangulis bis sub, DM, MR, fient omnia quadrata, DS, quæ cum sint minora omnibus quadratis figuræ, α , hinc figuræ circumscriptæ omnia quadrata excedunt omnia quadrata inscriptæ minori quantitate, quam sint omnia quadrata, α , & ideo excedunt omnia quadrata trianguli, OES, multò minori quantitate: Quia ergo omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata trianguli, OES, cum omnibus quadratis, α , erant vt omnia quadrata, T β , ad omnia quadrata trianguli, & $\angle \beta$, hinc omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata figuræ circumscriptæ triangulo, OES, habebunt rationem, quam omnia quadrata, I β , ad omnia quadrata trianguli, & $\angle \beta$.

Nunc diuidatur similiter, & β , in punctis, R, Δ , Σ , ac, OS, in punctis, P, Q, R, & per puncta, R $\Delta\Sigma$, parallelæ ipsi, $\angle \beta$, ducantur, R ν , ΔX , ΣY , secantes, & Z, in punctis, T, 3, 6, per quæ vsque ad proximas parallelas ipsis, & β , TZ, æquidistantes ducantur, & T, A 3, 4 6, vt triangulo, & $\angle \beta$, sit circumscripta figura ex parallelogramis,

• R, $\Delta \Delta$, 4 Σ , Y β , cõposita, quia ergo, vt, OS, ad, SR; ita est, & β , ad, $\beta \Sigma$, vt autem, OS, ad, SR, ita sunt omnia quadrata, AS, ad omnia quadrata, DS, & vt, & β , ad, $\beta \Sigma$, ita sunt omnia quadrata, T β , ad omnia quadrata, Y β , ergo omnia

40. huius.



quadrata, AS, ad omnia quadrata, DS, sunt vt omnia quadrata, T β , ad omnia quadrata, Y β , quia verò omnia quadrata, Y β , ad omnia quadrata, 6 β , .i. ad omnia quadrata, 4 Σ , sunt vt quadratum, Z β , ad quadratum, 7 β , .i. ad quadratum, 6 Σ , .i. vt quadratum, $\beta \Sigma$, ad quadratum, & Σ , .i. vt quadratum, SO, ad quadratum, OR, idest vt quadratum, ES, ad quadratum, HR, idest, vt omnia quadrata, DS, ad omnia quadrata, FR, ergo ex æquali omnia

9. huius.

quadrata, AS , ad omnia quadrata, FR , erunt ut omnia quadrata, $T\beta$, ad omnia quadrata, 4Σ : Eodem pacto ostendimus omnia quadrata, AS , ad omnia quadrata, GQ , esse ut omnia quadrata, $T\beta$, ad omnia quadrata, $\Delta\Delta$, & tandem omnia quadrata, AS , ad omnia quadrata, LP , esse ut omnia quadrata, $T\beta$, ad omnia quadrata, ΘR , unde, colligendo, omnia quadrata, AS , ad omnia quadrata parallelogrammorum, DS , FR , GQ , LP , idest figurę circumscriptę, erunt ut omnia quadrata, $T\beta$, ad omnia quadrata parallelogrammorum, ΘR , $\Delta\Delta$, 4Σ , $Y\beta$, idest ad omnia quadrata figurę circumscriptę triangulo, & $Z\beta$, sed omnia quadrata, AS , ad omnia quadrata figurę circumscriptę triangulo, OES , ostensum habere maiorem rationem, quam omnia quadrata, $T\beta$, ad omnia quadrata trianguli, & $Z\beta$, ergo omnia quadrata, $T\beta$, ad omnia quadrata figurę circumscriptę triangulo, & $Z\beta$, habebunt maiorem rationem, quam ad omnia quadrata trianguli, & $Z\beta$, ergo omnia quadrata figurę circumscriptę triangulo, & $Z\beta$, minora erunt omnibus quadratis trianguli, & $Z\beta$, quod est absurdum, non ergo omnia quadrata, AS , ad maius, quam sint omnia quadrata trianguli, OES , habent eandem rationem, quam omnia quadrata, $T\beta$, ad omnia quadrata trianguli, & $Z\beta$.

Dico autem neque ad minus eiuſdem habere eandem rationem, sint enim defectus adhuc omnia quadrata figurę, α , & sit circumscripta triangulo, OES , figura ex parallelogrammis, LP , GQ , FR , DS , & alia inſcripta ex parallelogrammis, MQ , IR , HS , composita, ita ut omnia quadrata circumscriptę superent omnia quadrata inſcriptę minori quantitate, quam sint omnia quadrata, α , ergo omnia quadrata trianguli, OES , superabunt omnia quadrata inſcriptę figurę multo minori quantitate, sint autem omnia quadrata, AS , ad omnia quadrata trianguli, OES , detractis omnibus quadratis, α , ut omnia quadrata, $T\beta$, ad omnia quadrata trianguli, & $Z\beta$, ergo omnia quadrata, AS , ad omnia quadrata inſcriptę figurę habebunt minorem rationem, quam omnia quadrata, $T\beta$, ad omnia quadrata trianguli, & $Z\beta$. Diuidatur nunc pariter latus, & β , in punctis, R , Δ , Σ , ſimiliter ac, OS , diuidatur in, P , Q , R , & cætera, ut ſupra, ſint, ut habeamus figuram inſcriptam ex parallelogrammis, $\Gamma\Delta$, 3Σ , 6β , compositam, ostendemus igitur, ut ſupra, omnia quadrata, AS , ad omnia quadrata figurę inſcriptę triangulo, OES , esse ut omnia quadrata, $T\beta$, ad omnia quadrata figurę inſcriptę triangulo, & $Z\beta$, sunt autem omnia quadrata, AS , ad omnia quadrata figurę inſcriptę triangulo, OES , in minori ratione, quam sint omnia quadrata, $T\beta$, ad omnia quadrata trianguli, & $Z\beta$, ergo omnia quadrata, $T\beta$, ad omnia quadrata figurę inſcriptę

ptæ triangulo, & $Z\beta$, erunt in minori ratione, quam omnia quadrata, $T\beta$, ad omnia quadrata trianguli, & $Z\beta$, ergo figurę incriptæ triangulo, & $Z\beta$, omnia quadrata maiora erunt omnibus quadratis trianguli, & $Z\beta$, quod est absurdum, igitur omnia quadrata, AS , non ad minus, quam sint omnia quadrata trianguli, OES , erunt ut omnia quadrata, $T\beta$, ad omnia quadrata trianguli, & $Z\beta$, sed neque ad maius, ut ostensum est ergo ad ipsa erunt, ut omnia quadrata, $T\beta$, ad omnia quadrata, & $Z\beta$. Si autem comparentur omnia quadrata, AS , $T\beta$, ad omnia quadrata triangulorum, AEO , $TZ\epsilon$, eodem modo fiet demonstratio, igitur ostensum est, quod erat demonstrandum.

A. COROLLARI SECTIO I.

Hinc patet quæcumque de omnibus quadratis parallelogrammorum tales, vel tales conditiones habentium in Propos. 9. 10. 11. 12. 13. 14. huius Libri ostensa sunt, eadem de omnibus quadratis triangulorum, tanquam de eorundem partibus proportionalibus verificari, regula uno latere sumpta, dum triangula circa altitudines, & bases, siue à basibus descriptas figuras, & latera equaliter basibus inclinata, easdem obtinuerint conditiones ibi notatas.

B. SECTIO II.

Igitur triangulorum in eadem altitudine existentium omnia quadrata, vel omnes figura similes (siue sint similes ad inuicem, quæ sunt utriusque trianguli, siue dissimiles) erunt ut figura à basibus descripta.

C. SECTIO III.

Et si triangula fuerint in eadem, vel equalibus basibus, omnes figura similes, utriusque ad inuicem, erunt ut altitudines, vel ut latera basibus equaliter inclinata.

D. SECTIO IV.

Item triangulorum omnia quadrata, siue omnes figura similes, etiam si sint dissimiles, quæ sunt utriusque trianguli, habebunt rationem compositam ex ratione figurarum à basibus descriptarum, & altitudinum, siue laterum basibus equaliter inclinatarum.

E. S E C T I O V.

ET triangulorum, quorum basium figura altitudinibus, vel lateribus equaliter basibus inclinatis reciprocantur, omnes figurae, similes basium figuris, sunt aequales: Et si omnes figurae, similes basium figuris, sint aequales, figuras basium altitudinibus, vel lateribus equaliter basibus inclinatis reciprocè respondentes habebunt. 12. huius.

F. S E C T I O VI.

ET tandem similibus triangulorum omnia quadrata erunt in tripla ratione laterum homologorum, siue ut eorum cubi; regulas verò in supradictis suppono semper duo illorum triangulorum latera, quae bases voco; hic verò intellige illorum triangulorum latera homologa. His autem sequentem Propositionem subiungam, tum huius gratia, tum eorum, quae sequentur. Iuxta diffin. 1. Secti Elem. 12. huius.

THEOREMA XXIII. PROPOS. XXIII.

SI, exposita quacunque figura plana, in ea ducatur utcunque recta linea, quae sit sumpta pro regula, eadem verò in puncto, vel punctis diuisa, prout lib. 2. Elem. supponitur secari, per puncta diuisionum lineas duxerimus rectas, siue curuas, figuram diuidentes, & semel tantum secantes quamuis aliam regulam parallelam, si regula in vno puncto tantum diuisa sit, vel toties, quot sunt puncta diuisionum regulae (exceptis tamen extremis, in quibus linearum sectae partes in puncta aliquando degenerare possunt.) Quaecunque in dict. 2. lib. demonstrantur hac diuisione supposita circa vel quadrata, vel rectangula eidem rectae lineae applicata, eadem de omnibus quadratis dictae figurae, vel eiusdem partium, vel de rectangulis sub ipsis pariter verificabuntur. D. Diff. 2. huius.

Sit exposita utcunque figura plana, $ABCD$, in qua ducta, BD , recta linea utcunque; sit illa sumpta pro regula, & ea diuisa in vno, vel pluribus punctis, prout postulant Propos. 2. lib. Elem. per puncta diuisionum ducantur lineae siue rectae, siue curuae, AEC , AFI , toties quamuis aliam ipsi, BD , parallelam in figura, $BADC$, secantes

quoties, BD , secta esse supponitur, exceptis tamen extremis, vt ex gr. ipsa, CI , in qua parte, CI , quæ in recta, CI , separari debuissent per lineas, AEC , AFI , in puncta, C , I , partibus, BE , FD , respondentia degenerauerunt. Dico quæcunque demonstrantur in linea, BD , circa quadrata, vel rectangula, illi, vel illius partibus applicata, verificari de omnibus quadratis totius figure, $BAD C$, siue partium eiusdem figure per dictas lineas constitutarum, siue de rectangulis sub eiusdem partibus. Vt ex gr. quia in 3. Propos. lib. 2.

Vide D.
Defin. 8.
hujus.

Elem. ostenditur rectangulum sub, BD , DF , æquari rectangulo sub, BE , FD , cum quadrato, FD , sic dico verum esse rectangula sub figura, $ABCD$, & figura, ADI , æquari rectangulis sub figuris, $ABIF$, $ADIF$, cum omnibus quadratis figure, $ADIF$, si enim aliam utcunque duxerimus regulæ, BD , parallelam, vt, HO , secantem lineas, AC , in, M , &, AI , in, N , verum esse comperiemus rectangulum, HON , æquari rectangulo, HNO , cum quadrato, NO , & idem in ceteris regulæ, BD , parallelis in figura, $ABCD$, ductis reperiemus, ergo verum erit rectangula illa simul collecta, idest rectangula sub figura, $ABID$, & figura, ADI , æquari rectangulis sub figuris, $ABIF$, $ADIF$, cum omnibus quadratis, $ADIF$, quod 3. Proposit. 2. lib. Elem. respondet.



Coroll. 4.
hujus.

Similiter si supponamus, BF , bifariam secari in, E , cui adiungatur, FD , suppoluerimus etiam lineam, AC , bifariam secare quamlibet omnium linearum figure, ABI , regula, BD , supradictarum, quarum singulis aditur, quæ in directum manet in figura, ADI , veluti Propos. 6. ostenditur rectangulum, BEF , cum quadrato, ED , ita hic ad modum superioris ostendemus rectangula sub figura, $ABID$, &, ADI , cum omnibus quadratis figure, ACI , æquari omnibus quadratis figure, ACD , quod respondet Propos. 6. eiusdem lib. Consimiliter reliqua demonstrabimus, vnde iuxta 1. Propos. Secundi Elem. colligemus.

A. COROLLARI SECTIO I.

Rectangula sub figura indivisa, $ABID$, & sub diuisa, ACD , per lineam, AI , æquari rectangulis sub indivisa, $ABID$, & sub partibus diuisa, quæ sunt, ACI , AD .

B. SECTIO II.

Iuxta secundam habebimus omnia quadrata figura, $ABFD$, aequalia
 rectang. sub, $ABID$, & singulis partibus, ABI , AID .

C. SECTIO III.

Iuxta tertiam iam dictum est in Propositione quid colligamus.

D. SECTIO IV.

Iuxta quartam habemus omnia quadrata figura, $ABID$, per unicam
 lineam, AFI , diuise, aequali omnibus quadratis figurarum, ABI ,
 AID , & rectangulis bis sub dictis fig. ABI , AID .

E. SECTIO V.

Iuxta quintam, si supponamus lineam, AI , bisariam diuidere omnes
 lineas figura, $ABID$, regula, BD , sumptas, & easdem lineam,
 AC , non bisariam diuidere, colligemus rectangula sub inaequalibus par-
 tibus, ABC , ACD , cum omnibus quadratis figura, ACI , aequali omni-
 bus quadratis figura, ABI .

F. SECTIO VI.

Iuxta sextam quid colligatur iam dictum est in Propositione.

G. SECTIO VII.

Iuxta septimam colligemus, supposito, quod figura, $ABID$, secetur
 à sola linea, AI , utcumque, dummodo eadem secet omnes aequidi-
 stantes ipsi regula, BD , in figura, $ABID$, ductas, & in uno tantum
 puncto, colligemus inquam omnia quadrata figura, $ABID$, & omnia
 quadrata figura, ADI , aequali rectangulis bis sub figuris, $ABID$, ADI , una cum omnibus quadratis, ABI .

H. SECTIO VIII.

Iuxta octavam, si supponamus figuram, $ABCD$, utcunque sectam per lineam, AC , (quæ tamen secet omnes ipsi, BD , æquidistantes in figura, $ABCD$, ductas, & in uno tantum puncto uti dictum est) colligemus rectangula quater sub figuris, $ABCD$, ABC , cum omnibus quadratis, ACD , æquari omnibus quadratis figura composita ex figura, $ABCD$, & ABC , ita ut omnium linearum figura, $ABCD$, singulis intelligatur adiecta, qua nunc in figura, ABC , est cum illa in eadem rectitudine.

I. SECTIO IX.

Iuxta nonam, si supponamus lineam, AI , secare omnes æquidistantes ipsi, BD , in figura, $ABID$, ductas bisariam, & lineam, AC , easdem bisariam non secare, colligemus omnia quadrata figura, ACD , cum omnibus quadratis figura, ABC , dupla esse omnium quadratorum figura, AID , cum omnibus quadratis figura, ACI , intermedia.

K. SECTIO X.

Iuxta decimam, si supponamus, AC , lineam bisariam secare omnes æquidistantes ipsi, BD , in figura, ABI , ductas, & illis addi, qua in directum illis iacent in figura, AID ; colligemus omnia quadrata figura, $ABCD$, cum omnibus quadratis figura, ADI , dupla esse omnium quadratorum figura, ABC , cum omnibus quadratis figura, ACD .

L. SECTIO XI.

Iuxta undecimam, si supponamus, BD , in, E , ita sectam esse, ut reſtangulum, DBE , sit æquale quadrato, ED , qualibet autem æquidistantium ipsi, BD , in figura, $ABCD$, tali modo, & ad eandem partem dividitur per lineam, AEC , patet, quod etiam reſtangula sub figuris, $ABCD$, ABC , æquabuntur omnibus quadratis figura, ACD , regula, BD , igitur linea, AC , dividet superficiem planam, $ABCD$, (sit dicere liceat) secundum extremam, ac mediam rationem, h. ec. autem pro sequentibus accuratè memoria commendetur.

THEOREMA XXIV. PROPOS. XXIV.

EXposito parallelogrammo quocunq; in eoque ducta diametro; omnia quadrata parallelogrammi ad omnia quadrata cuiusvis triangulorum per dictam diametrum constitutorum erunt in ratione tripla, vno laterum parallelogrammi communi regula existente.

Sit parallelogrammum, AG , in eo ducta diameter, CE , regula utcumque latus, EG . Dico omnia quadrata, AG , esse tripla omnium quadratorum trianguli cuiusvis, AEC , siue, CEG . Diuidantur bifariam latera, AC , CG , in punctis, B , H , & per, B , ipsi, CG , perque, H , ipsi, CA , parallele ducantur, BF , DH , quæ se cum recta, CE , communiter bifariam secabunt in puncto, M . Quia igitur in figura, siue parallelogrammo, AG , ducitur linea, BF , quæ omnes æquidistantes ipsi, EG , bifariam secat, & CE , quæ easdem in partes inæquales diuidit, præterquam, DH , omnia quadrata trianguli, AEC , cum omnibus quadratis trianguli, CEG , & cum omnibus quadratis duorum triangulorum, CBM , EMF , dupla erunt omnium quadratorum, AF , licet enim, DH , per lineam, CE , sit non bifariam diuisa, nihil tamen hoc obstat nostro proposito, nam & ipsi, DH , contingit, veluti ijs, quæ inæqualiter secantur, quadratum sectionum partium, scilicet quadrata, DM ,

MH , dupla esse quadratorum dimidiæ, nempe quadrati, DM , & eius, quæ inter sectiones interijcitur, quæ hic nulla est, cum duæ secantes, BF , CE , vniantur in puncto, M : Sunt autem omnia quadrata trianguli, AEC , æqualia omnibus quadratis trianguli, CEG , quia sunt triangula in æqualibus basibus, EG , AC , & eadem altitudine licet euersè posita, & ideo omnia quadrata trianguli, CEG , sunt æqualia omnibus quadratis, AF , cum omnibus quadratis triangulorum, CBM , EMF . Quoniam verò omnia quadrata trianguli, BMC , sunt æqualia omnibus quadratis trianguli, CMH , omnia verò quadrata trianguli, CEG , ad omnia quadrata trianguli, CMH , sunt in tripla ratione eius, quam habet, GC , ad, CH , quæ est dupla. in ratione octupla, & hoc, quia triangula, CEG , CMH , sunt similia, ideo omnia quadrata, CEG , erunt octupla om-



Per I. Corol. antec.

Vide D. lib. 7. Annot. Proposit. 8.

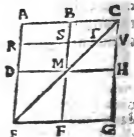
Ex B. vel C. Corol. Prop. 12. huius.

om.

omnium quadratorum, CMH , & quadrupla omnium quadrato-
rum, CMH , vel, CBM , & MEF , sunt autem omnia quadrata
trianguli, CEG , æqualia omnibus quadratis, AF , cum omnibus
quadratis triangulorum, CBM , MEF , ergo hæc erunt quadrupla
omnium quadratorum triangulorum, CBM , MEF , & diuidendo

huius.

omnia quadrata, AF , erunt illorum tripla,
sunt autem omnia quadrata, AG , ad om-
nia quadrata, AF , vt quadratum, GE , ad
quadratum, EF , idest quadrupla. vt 12.
ad 3. & omnia quadrata, AF , sunt omnium
quadratorum triangulorum, BMC , MEF ,
tripla, ergo omnia quadrata, AG , e-
runt duodecupla omnium quadratorum
triangulorum, BMC , MEF , & sunt ad
omnia quadrata, AF , vt 12. ad 3. ergo om-
nia quadrata, AG , ad omnia quadrata, A
 F , cum omnibus quadratis triangulorum, CBM , MEF , erunt vt
12. ad 4. sunt autem omnia quadrata, AF , cum omnibus quadratis
triangulorum, CBM , MEF , æqualia omnibus quadratis trian-
guli, CEG , vel, AEC , vt ostentum est, ergo omnia quadrata, A
 G , ad omnia quadrata trianguli, CEG , vel, AEC , sunt vt 12.
ad 4. i. sunt eorum tripla, quod ostendendum erat.



C O R O L L A R I V M.

Hinc patet, si ducamus intra parallelogrammum, AG , æquidistan-
tem ipsi, EG , utcumque, RV , secantem, CE , in, T , & BF ,
in, S , quod veluti ostendimus, RV , æquari vni maximarum abscissarum,
 CG , dum, EG , est æqualis ipsi, GC , ita nunc ostendemus quadratum,
 RV , æquari quadrato vnus maximarum abscissarum, CG , & quadra-
tum, TV , æquari quadrato vnus omnium abscissarum, CG , idest qua-
drato, VC ; quadratum verò, RT , æquari quadrato vnus residuarum
omnium abscissarum, CG , idest quadrato, VG , vnde concludemus om-
nia quadrata, AG , regula, EG , æquari quadratis maximarum abscif-
sarum, CG , & omnia quadrata trianguli, CEG , æquari quadratis om-
nium abscissarum, CG , & omnia quadrata trianguli, AEC , æquari
quadratis residuarum omnium abscissarum, CG , & reſtanguſa ſub tri-
angulis, AEC , CEG , æquari reſtanguſis ſub omnibus abſciſſis, & re-
ſiduis omnium abſciſſarum, CG , ita ſumptis, vt quoduis reſtanguſulum
intelligatur ſub vna abſciſſarum, & eius reſiduis: Vnde veluti oſtendi-
mus omnia quadrata, AG , tripla eſſe omnium quadratorum trianguli,
 CEG ,

CEC, vel trianguli, CAE, ex quo patet tripla etiam esse reſtangularum bis ſub triangulis, AEC, CEG, (ſunt enim omnia quadrata, AG, aequalia omnibus quadratis triangulorum, AEC, CEG, & reſtangularis bis ſub eiſdem triangulis) ita apparebit quadrata maximarum abſciſſarum, CG, tripla eſſe quadratorum omnium abſciſſarum, vel quadratorum reſiduorum omnium abſciſſarum, CG, & tripla etiam eſſe reſtangularum ſub dictis omnibus abſciſſis, reſiduiſque bis ſumptis, ſexcupla verò eorundem reſtangularum ſemel ſumptorum, ſunt autem maxima abſciſſarum, abſciſſa, & reſidua reſti tranſitus ſi angulus, EGC, ſit reſtus, vel eiſdem obliqui tranſitus, ſi ille non ſit angulus reſtus.

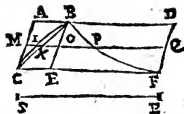
D. Coro.
23. huius.

Ex diſt. e.
huius.

THEOREMA XXV. PROPOS. XXV.

SI in duobus parallelogrammis ſumptis duobus lateribus pro baſibus, & regulis, ipſa parallelogramma fuerint in eadem altitudine ſumpta reſpectu dictarum baſium; in eiſdem autem baſibus, & altitudine fuerint aliæ duæ planæ figuræ ita ſe habentes, vt ſi ducatur vtcunq; parallela dictis baſibus (quæ in directum ſint conſtitutæ) reſta linea, eiſdem portiones dictis parallelogrammis, & figuris interceptæ, vel ab eiſdem deſcriptæ planæ figuræ, ſint proportionales, homologis exiſtentibus, quæ ſunt in parallelogrammis, & pariter quæ ſunt in figuris, in iſdem baſibus, & altitudine cum illis conſtitutis, dictorum parallelogrammorum, ac figurarum omnes lineæ, ſi lineæ, vel omnes figuræ planæ ſimiles, ſi iſtæ comparantur (ſimiles inquam exiſtentibus, quæ ſunt in vnaquaque figura) erunt proportionales.

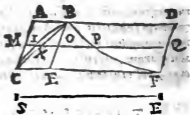
Sint parallelogramma, A E, E D, in baſibus, C E, E F, in directum iacentibus, & in eadem altitudine reſpectu dictarum baſium conſtituta, A E, E D, ſit autem regula, C E, vel B F, & in eiſdem tanquam in baſibus, & eadem altitudine cum parallelogrammis, A E, E D, ſint figuræ, B C E, B B F, cuiſmodi, vt ſi duxerimus vtcunq; ipſi, C F, parallelam, vt, M Q, cuius portiones interceptæ parallelogrammis,



X

A E,

$A E, E D$, sint, $M O, O Q$, & interceptæ figuris sint, $l O, O P$, res-
pertinens, $M O$, ad, $O I$, esse vt, $Q O$, ad, $O P$. Dico omnes li-
neas, $A E$, ad omnes lineas figuræ, $B C E$, esse vt omnes lineæ, $B F$,
ad omnes lineas figuræ, $B E F$, si verò vice linearum comparantur
ab eisdem descriptæ figuræ, simi-
libus existentibus, quæ ab omni-
bus lineis vniuscuiusque propo-
sitæ figurarum describuntur,
cuius describentes sint earum li-
neæ, vel latera homologa. Dico
omnes figuras similes ipsius,
 $A E$, ad omnes figuras similes
figuræ, $B C E$, esse vt omnes fi-
guras similes ipsius, $B F$, ad omnes figuras similes figuræ, $B E F$,



Coroll. 4.
huius.

quid enim, $M Q$, utcumque ducta est parallela ipsi, $C F$, & est, $M Q$,
 O , ad, $O I$, vt, $Q O$, ad, $O P$, permutando erit, vt, $M O$, ad, O ,
 Q , sic, $l O$, ad, $O P$, .i. vt, $C E$, ad, $E F$, sic, $l O$, ad, $O P$, & sic
ostendemus, vt, $C E$, ad, $E F$, ita esse quaslibet alias duas in figu-
ris, $B C E, B E F$, existentes ipsi, $C F$, parallelas, & vt vna ad vnâ
sic omnia ad omnia .i. vt, $C E$, ad, $E F$, ita omnes lineæ figuræ, B ,
 $C E$, ad omnes lineas figuræ, $B E F$, vt autem, $C E$, ad, $E F$, ita sunt
omnes lineæ, $A E$, ad omnes lineas, $E D$, ergo omnes lineæ, $A E$,
ad omnes lineas, $E D$, erunt vt omnes lineæ figuræ, $B C E$, ad om-
nes lineas figuræ, $B E F$.

Si verò vice linearum sumamus descriptas, vt dictum est, ab eisdem
figuris, ex. gr. si, vt quadratum, $M O$, ad triangulum æquilaterum,
cuius latus, $l O$, ita reperiamus esse circulum, cuius diameter, $O Q$,
ad polygonum, cuius latus, $O Q$, omnium autem linearum, $A E$,
singulæ describant quadrata, & omnium linearum figuræ, $B C E$,
singulæ describant, triangula æquilatera, & omnium linearum, $B F$,
singulæ describant circulos, & figuræ, $B E F$, singulæ describant po-
lygona prædicto similia, ita vt quæ in eadem figura sunt lineæ, vel
latera describentia sint homologa, erit vt quadratum, $M O$, permu-
tando, ad circulum, $O Q$, ita triangulum æquilaterum, $l O$, ad po-
lygonum, $O P$, quia verò, $M O$, æquatur ipsi, $C E$, &, $O Q$, ipsi,
 $E F$, idè quadratum, $M O$, æquatur quadrato, $C E$, & circulus,
 $O Q$, circulo, $E F$, & idè, vt quadratum, $C E$, ad circulum, $E F$,

ita erit triangulum æquilaterum, $l O$, ad polygonum, $O P$, vnde,
quia, $M Q$, utcumq; ducta est parallela ipsi, $C F$; concludemus om-
nia quadrata, $A E$, ad omnes circulos, $B F$, esse, vt omnia triangu-
la æquilatera figuræ, $B C E$, ad omnia polygona vni familia figuræ,
 $B E F$, & permutando omnia quadrata, $A E$, ad omnia triangula æ-
qui-

Ex 4. huius
lib.

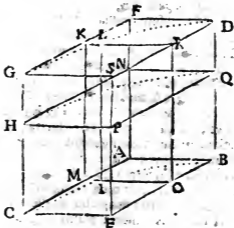
quilatera figuræ, B C E, esse, vt omnes circuli, B F, ad omnia polygona vni similia figuræ, B E F.

Eodem modo fiet demonstratio; si vice istarum alix assumantur figuræ planæ, quarum possunt etiam, quæ sunt duarum figurarum esse similes, vt si comparentur omnia quadrata parallelogrammorum, A E, E D, & omnia triangula æquilatera figurarum, B C E, B E F, vel si comparentur omnia quadrata, A E, & figuræ, B C E, & omnia triangula æquilatera; B F, & figuræ, B E F; potest etiam esse omnium quatuor figurarum omnes figuras esse similes, vt si comparentur omnia quadrata eorundem, vel omnes circuli, &c. patet autem hic demonstrationem currere quotiescunque ea, quæ comparantur sunt eiusdem generis .i. vel lineæ, vel superficies, si verò contingat magnitudines diuersi generis comparari, vt si comparentur omnes lineæ, A E, & figuræ, B C E, & omnia quadrata, B F, & figuræ, B E F, tunc quia à permutata ratione non possumus argumentari, cum lineam superficiem comparare sit absurdum, ideò demonstratio pro his non currit, quapropter aliud Theorema pro hoc subiungemus.

THEOREMA XXVI. PROPOS. XXVI.

IN eadem antecedentis Propos. figura si comparentur magnitudines diuersi generis, adhuc comparatæ magnitudines erunt proportionales.

Comparentur ex. gr. omnes lineæ, A E, regula, C E, ad omnes lineas figuræ, B C E, & omnia quadrata, B F, regula, E F, ad omnia quadrata figuræ, B E F, ita vt ducta vteunq. ipsi, C F, parallela, M Q, reperiamus, M O, ad, O I, esse vt quadratum, Q O, ad quadratum, O P. Dico adhuc omnes lineas, A E, ad omnes lineas figuræ, B C E, esse vt omnia quadrata, B F, ad omnia quadrata figuræ, B E F; ponatur scorsim parallelogram-



X 2

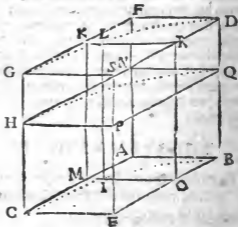
num,

B. Def. 4.
lib. 1.

rum, $A E$, simul cum figura, $B C E$, sed, ne fiat confusio, sint sub ampliori forma, & in ipsis tanquam in basibus constituti intelligantur duo cylindrici recti, $F E$, nempe in basi, $A E$, & $D G E$, in basi figura, $B C E$, & in eadem altitudine, quorum quod insitit ipsi, $A E$, est parallelepipedum, ut facile ostendetur, intelligatur nunc parallelepipedum, $F E$, tectari utcumque plano ipsi, $G E$, æquidistante, producetur ergo ex hac sectione in ipso parallelogrammum rectangulum, quod sit, $K O$, eodem autem plano fiat in cylindrico, $D G E$, rectangulum, $L O$, fiet autem & in hoc cylindrico rectangulum, quia dictum planum ducitur per latera basi, $B C E$, rectè insistentia, cum ducatur æquidistanter ipsi, $G E$, quod ducitur per latera, $G C$, $S E$, erit ergo rectangulum, $K O$, vnum ex ijs, quæ dicuntur omnia plana parallelepipedi, $F E$, regula, $G E$, & rectangulum, $L O$, erit vnum ex ijs, quæ dicuntur omnia plana cylindrici, $G D E$, regula, $G E$, quæ rectangula erunt æquæ alta, ac rectangulum, $G E$, omnia igitur plana parallelepipedi, $F E$,

Coroll. 6.
lib. 1.

(regula, $G E$,) sunt omnia rectangula æquæ alta, ac, $G E$, ipsius parallelogrammi, $A E$, (regula, $C E$,) & omnia plana cylindrici, $G D E$, sunt omnia rectangula figuræ, $B C E$, æquiangulara, & æquæ alta, ac ipsum, $G E$, regula eadem, $C E$: Secentur nunc dicti cylindrici planis basibus æquidistantibus, sient ergo communes eorum sectiones similes, & æquales basibus, sit in parallelepipedo, $F E$, producta, $N P$, & in cylindrico, $G D E$, producta figura, $H Q P$, erit ergo ut, $A E$, ad figuram, $B C E$, ita, $N P$, ad figuram, $H Q P$, & ita etiam quælibet aliæ figuræ in ipsis per plana æquidistanter basibus eisdem secantia productæ, & ut vna ad vnam, sic omnes ad omnes. \therefore ut, $A E$, ad figuram, $B C E$, ita omnia plana parallelepipedi, $F E$, regula, $A E$, ad omnia plana cylindrici, $G D E$, regula eadem basi, sunt autem omnia plana parallelepipedi, $F E$, regula, $A E$, æqualia omnibus eiusdem planis, regula, $G E$, quæ sunt omnia rectangula ipsius, $A E$, regula, $C E$, æquæ alta, ac ipsum, $G E$, & omnia plana cylindrici, $G D E$, regula basi, $C B E$, sunt æqualia omnibus



B. Def. 5.
huius.

De, sunt omnia rectangula figuræ, $B C E$, æquiangulara, & æquæ alta, ac ipsum, $G E$, regula eadem, $C E$: Secentur nunc dicti cylindrici planis basibus æquidistantibus, sient ergo communes eorum sectiones similes, & æquales basibus, sit in parallelepipedo, $F E$, producta, $N P$, & in cylindrico, $G D E$, producta figura, $H Q P$, erit ergo ut, $A E$, ad figuram, $B C E$, ita, $N P$, ad figuram, $H Q P$, & ita etiam quælibet aliæ figuræ in ipsis per plana æquidistanter basibus

Coroll. 2.
lib. 1.

eisdem secantia productæ, & ut vna ad vnam, sic omnes ad omnes. \therefore ut, $A E$, ad figuram, $B C E$, ita omnia plana parallelepipedi, $F E$, regula, $A E$, ad omnia plana cylindrici, $G D E$, regula eadem basi, sunt autem omnia plana parallelepipedi, $F E$, regula, $A E$, æqualia omnibus eiusdem planis, regula, $G E$, quæ sunt omnia rectangula ipsius, $A E$, regula, $C E$, æquæ alta, ac ipsum, $G E$, & omnia plana cylindrici, $G D E$, regula basi, $C B E$, sunt æqualia omnibus

Ex Coroll.
4. huius.

\therefore ut, $A E$, ad figuram, $B C E$, ita omnia plana parallelepipedi, $F E$, regula, $A E$, ad omnia plana cylindrici, $G D E$, regula eadem basi, sunt autem omnia plana parallelepipedi, $F E$, regula, $A E$, æqualia omnibus eiusdem planis, regula, $G E$, quæ sunt omnia rectangula ipsius, $A E$, regula, $C E$, æquæ alta, ac ipsum, $G E$, & omnia plana cylindrici, $G D E$, regula basi, $C B E$, sunt æqualia omnibus

Ex Coroll.
2. huius.

E. Def. 8.
lib. 1.

omnia plana cylindrici, $G D E$, regula basi, $C B E$, sunt æqualia omnibus

nibus eiusdem planis, regula, GE , quæ & ipsa sunt omnia rectan-
gula figuræ, CBE , regula, CE , æquæ alta, ac ipsum, GE , ergo Ex Cor. 2.
huius.
omnia rectangula ipsius, AE , regula, CE , æquæ alta, ac ipsum, GE ,
 AE , ad omnia rectangula figuræ, CBE , regula, CE , æquæ alta, ac
ipsum, GE , erunt vt, AE , ad figuram, BCE , .s. vt omnes lineæ, 3. huius.
 AE , ad omnes lineas, BCE , regula, CE , quod serua.

Conspiciatur nunc figura Theorematis anteced. in qua diximus,
 MO , ad, OI , esse vt quadratum, QO , ad quadratum, OP . Di-
co omnes lineas, AE , ad omnes lineas figuræ, BCE , regula, CE ,
esse vt omnia quadrata, BF , ad omnia quadrata figuræ, BEF , quia
enim, vt, MO , ad, OI , ita (sumpta quavis communi altitudine,
nempè ex. gr. altitudine constitutorum parallelepipedorum, quæ est,
 SE ,) rectangulum sub, MO , & SE , ad rectangulum sub, IO , SE ,
 SE , idè, vt rectangulum sub, MO , SE , ad rectangulum sub, IO ,
 SE , ita erit quadratum, OQ , ad quadratum, OP , sunt autem hæ
magnitudines eiusdem generis, nempè omnes superficies, ergo om-
nia rectangula ipsius, AE , regula, CE , æquæ alta, ac vnum eorum, Ex antec.
nempè, vt rectangulum sub, CE , ES , ad omnia rectangula figuræ,
 BCE , regula eadem, CE , æquæ alta, ac vnum eorum, vt, GE ,
erunt vt omnia quadrata, BF , ad omnia quadrata figuræ, BEF ,
omnia verò rectangula ipsius, AE , æquæ alta, ac vnum eorum, vt,
 GE , ad omnia rectangula figuræ, BCE , æquæ alta, ac ipsum, GE ,
 GE , sunt vt omnes lineæ ipsius, AE , ad omnes lineas figuræ, BCE , Ex proxi-
mè dictis.
regula, CE , ergo omnes lineæ, AE , ad omnes lineas figuræ, BCE ,
 AE , regula, CE , erunt vt omnia quadrata, BF , ad omnia quadrata
figuræ, BEF , sunt ergo proportionales, licet sint magnitudines di-
uersi generis, nempè lineæ, & superficies, quod ostendere opus erat.

COROLLARIUM I.

Hinc igitur primò habetur, si fuerint parallelogrammum, & figuræ
plana in eadem basi, & altitudine, regula sumpta basi, omnia
rectangula parallelogrammi æquæ alta ad omnia rectangula illius figu-
ræ æquæ alta ac predicta, esse vt dictum parallelogrammum ad dictam
figuram, quod patuit, dum ostensum est omnia rectangula ipsius, AE ,
a situdinis, SE , ad omnia rectangula figuræ, BCE , altitudinis eiusdem,
 SE , esse vt, AE , ad figuram, BCE .

COROLLARIUM II.

Habetur secundò cylindricos in eadem altitudine existentes esse inter se, ut bases, quod de cæteris, veluti de supradictis, FE, GD, E , ostendetur, quamvis aliter etiam id aliundè infra colligetur.

COROLLARIUM III.

Habetur tertiò, si non sint in supradictis duobus Theorematis expressa duo parallelogramma, & duæ figura, sed unum tantum, & una figura in eadem basi, & altitudine cum ipso, cuius basi posita pro regula, & sumpto utcumque puncto in uno laterum basi insistentium, perque ipsum basi ducta parallela, reperitur eam, quæ intercipitur parallelogrammo ad eam, quæ intercipitur figura, vel figuras similes ab ipsis descriptas, tanquam homologis lineis, vel lateribus, esse ut unam ex maximis abscissarum lateris, in quo sumptum est punctum, ad abscissam per ductam basi æquidistantem, vel ut istas adiuncta quadam recta linea, vel ut istarum figuras similes ab ipsis tanquam lineis, vel lateribus homologis descriptas, ita ut figura descripta à singulis earum, quæ dicuntur omnes lineæ parallelogrammi, & ducta figura, sint similes, ut pariter, quæ describuntur à singulis earum, quæ dicuntur maxima abscissarum, vel abscissa dicti lateris, quod adhuc dictæ magnitudines collectæ erunt proportionales: Ut ex. gr. si in Theorematis antecedentis figura habeamus tantum parallelogrammum, BEF , & in eiusdem basi, E, P , & eadem altitudine, figuram, BEF , & sumpto in uno laterum, E, F , DF , utcumque puncto, O , & per, O , ducta, OQ , parallela ipsi, EF , reperiamus, QO , ad, OP , esse ut, EB , ad, BO , vel figuras similes descriptas ab, OQ, OP , tanquam lineis, vel lateribus homologis, ut ex. gr. quadratum, QO , ad quadratum, OP , esse ut, EB , ad, BO , vel ut, EB , adiuncta quadam linea ad, BO , adiuncta eadem, vel ut ab istis descriptas similes figuras, dico collectas magnitudines, quæ comparantur esse proportionales: Nam si ipsi, BE , intelligatur applicatum parallelogrammum, AE , cuius basis sit, CE , in directum ipsi, EF , constituta, &, CE , æqualis ipsi, EB , tunc omnes lineæ, AE , regula, CE , sunt æquales maximis abscissarum, BE , ut probatum est, & omnes abscissæ æquales omnibus lineis trianguli BCE , si sit iuncta, BC , (quæ secet, MO , in, X .) unde vice earum, quæ dicuntur maxima abscissarum, vel abscissa ipsius, BE , rectè sumemus omnes lineas, AE , & trianguli, BCE , & ita reperiemus quadratum, QO , ad quadratum, OP , ex. gr. esse ut, MO , ad, OX , vel ut quadratum, MO , ad quadratum,

OX ,

Corol. 1.
19. huius.

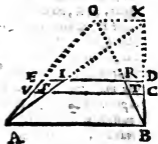
QX, vel ut alia figura similes ab ipsis descripta, sine ab ipsis simplicibus, sine ab ipsis adiuncta quadam linea, unde casus iste ad casum Theorematis presentis, vel antecedentis deductus erit, & ideo patebit, omnes lineas, *AE*, ad omnes lineas trianguli, *BCE*, vel omnes figuras similes, *AE*, ad omnes figuras similes trianguli, *BCE*, id est vel maximas abscissarum, *BE*, ad abscissas omnes ipsius, *BE*, vel earum figuras similes esse, ut omnia quadrata, *BF*, ad omnia quadrata figura, *BEF*. Vocantur autem ista; Quatuor ordinum magnitudines collecta iuxta quatuor magnitudines proportionales utrinque inuentas, quae fuerunt ex. gr. prima quadratum *OQ*, secunda quadratum, *OP*, tertia, *EB*, quarta, *BQ*, magnitudines autem collecta iuxta primam. s. ex. gr. omnia quadrata, *BF*, dicentur primi ordinis, collecta vero iuxta secundam. s. omnia quadrata figura, *BEF*, magnitudines secundi ordinis, collecta vero iuxta tertiam magnitudines tertij ordinis, & tandem collecta iuxta quartam magnitudines quarti ordinis, sic igitur appellabimus hos quatuor magnitudinum ordines. In supradictis autem, quod dicimus de abscissis, idem intellige de residuis abscissarum, & quod de ipsis simplicibus, idem de eisdem adiunctis alijs, siue sint recti, siue eiusdem obliqui transitus: Hoc autem Corollarium praeter ceteris summe animaduertendum est, ac memoria diligentissime commendandum, ex hoc enim patissimas demonstrationes tanquam ex fonte derivari studiosus in sequentium Librorum lectione facile comprehendet.

THEOREMA XXVII. PROPOS. XXVII.

SI duo trapezia fuerint in eadem basi, sumpto vno laterum æquidistantium pro basi, & regula, & fuerint etiam in eadem altitudine respectu illius basis, & latera basi parallela fuerint æqualia, trapezia erunt æqualia, & omnia eorundem quadrata erunt æqualia.

Sint duo trapezia, *AERB*, *IABD*, in eadem basi, *AB*, quæ sit sumpta pro regula, cuius latera, *ER*, *ID*, sint parallela, & inter se æqualia. Dico trapezia esse æqualia, & omnia eorundem quadrata esse æqualia. Producantur, *AE*, *BR*, donec sibi occurrant, ut in, *O*, &, *AI*, *BD*, donec simul incidant; ut in, *X*, & iungatur, *OX*, quia ergo, *ER*, parallela est ipsi, *AB*, erunt triangula, *Iux. dist. AOB*, *EOB*, similia, & eadem ratione similia erunt triangula, *A* Sexti Element.
XB, *IXD*, ergo ut, *AB*, ad, *ER*, vel ad, *ID*, illi æqualem, ita erit, *BO*, ad, *OR*, ut autem, *AB*, ad, *ID*, ita est, *BX*, ad, *XD*, 4. Sex. El.
ergo ut; *BO*, ad, *OR*, ita est, *BX*, ad, *XD*, ergo, *OX*, parallela

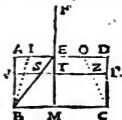
lela est ipsi, ED . Ducatur intra trapezia parallela ipsi, AB , utcu- que, VC , secans, XA , in, S , & O B , in, T , sunt igitur triangula, AOB , VOT , similia, & pariter sunt similia triangula, AXB , SXC , ergo, AB , ad, VT , erit ut, BO , ad, OT , \therefore ut, BX , ad, XC , (quia, VC , parallela est ipsi, AB , & consequenter ipsi, OX ,) \therefore ut, AB , ad, SC , ergo, VT , SC , erunt æquales, & eorum quadrata pariter æqualia, sic autem de cæteris ipsi, AB , parallelis idem ostendetur, ergo omnes lineæ trapezij, $AERB$, erunt æquales omnibus lineis trapezij, $AIDB$, regula, AB , & consequenter ipsa trapezia erunt æqualia, & omnia eorundem quadrata pariter æqualia, quod ostendere opus erat.



THEOREMA XXVIII. PROPOS. XXVIII.

SI parallelogrammum, & trapezium habuerint communem basim vnum æquidistantium laterum trapezij, quod sit sumptum pro regula; Omnia quadrata parallelogrammi ad omnia quadrata trapezij erunt, ut quadratum distæ basis ad rectangulum sub parallelis lateribus trapezij, cum, $\frac{1}{2}$, quadrati differentiæ dictorum laterum æquidistantium.

Sit parallelogrammum, AC , & trapezium, $IBCO$, cuius laterum æquidistantium alterum, ut, BC , sit communis basim ipsi, & trapezio, & regula. Dico ergo omnia quadrata, AC , ad omnia quadrata trapezij, $IBCO$, esse ut quadratum, BC , ad rectangulum sub, BC , IO , vna cum, $\frac{1}{2}$, quadrati differentiæ ipsarum, $BCIO$. Sumatur in, DA , ipsa, ED , æqualis ipsi, IO , & iungatur, BE , & per, E , ipsi, AB , DC , parallela ducatur, EM : Omnia ergo quadrata trapezij, $EBCD$, per lineam, EM , diuiduntur in omnia quadrata trianguli, EBM , & in omnia quadrata, MD , & in rectangula sub triangulo, EBM , & E , C , bis sumpta; ad horum ergo singula comparemus omnia quadrata, AC . Igitur omnia quadrata, AC , ad



Per D. Co
roll. 25.
huius.

9. huius.

om.

omnia quadrata, CE , sunt vt quadratum, BC , ad quadratum, CM , quod serua. Insuper omnia quadrata, AC , ad omnia quadrata, AM , sunt vt quadratum, CB , ad quadratum, BM , item omnia quadrata, AM , sunt tripla omnium quadratorum trianguli, EBM , .i. sunt ad illa, vt quadratum, BM , ad, $\frac{1}{3}$, quadrati, BM , ergo, ex æquali, omnia quadrata, AC , ad omnia quadrata trianguli, EBM , erunt vt, BC , ad, $\frac{1}{3}$, quadrati, BM , quod pariter serua. Tandem omnia quadrata, AC , ad rectangula sub, AM , MD , erunt vt quadratum, BC , ad rectangulum, BCM , rectangula verò sub, AM , MD , ad rectangula sub triangulo, EBM , & sub, MD , sunt vt, AM , ad triangulum, EBM , (quia illa sunt omnia rectangula parallelogrammi, AM , & trianguli, EBM , æquè alta, altitudinis nempe æqualis ipsi, MC , sumpta regula, BM ,).i. dupla .i. vt rectangulum, BCM , ad eiusdem dimidium, ergo, ex æquali, omnia quadrata, AC , ad rectangula sub triangulo, EBM , & sub, MD , erunt vt quadratum, BC , ad dimidium rectanguli, BCM , ad eadem verò bis sumpta erunt, vt quadratum, BC , ad rectangulum, BCM , ergo, colligendo, omnia quadrata, AC , ad omnia quadrata, EC , ad omnia quadrata trianguli, EBM , & ad rectangula bis sub triangulo, EBM , & sub, EC , erunt vt quadratum, BC , ad quadratum, CM , cum rectangulo, CBM , & $\frac{1}{3}$, quadrati, BM , sed rectangulum, BCM , cum quadrato, MC , conficit rectangulum sub, BC , CM , ergo omnia quadrata, AC , ad omnia quadrata trianguli, EBM , parallelogrammi, MD , & rectangula bis sub eisdem, .i. ad omnia quadrata trapezij, $EDCB$, .i. ad omnia quadrata trapezij, $IBCO$, (quia, IO , ED , sunt æquales) erunt, vt quadratum, BC , ad rectangulum sub, BC , CM , .i. sub, BC , ED , vel, IO , vna cum, $\frac{1}{3}$, quadrati, BM , quæ est differentia parallelarum, BC , ED , siue, BC , IO , ipsius trapezij, $IBCO$, quod ostendere opus erat.

9. huius.

24. huius.

14. huius.

Coroll. 1.

26. huius.

Per D. Co

roll. 23.

huius.

Ex antec.

COROLLARIUM.

Patet autem si ipsi, ME , adiungamus in directum, EF , æqualem ipsi, MC , & si supponamus, BM , æquari ipsi, ME , facillimè probari posse omnia quadrata, AC , æquari quadratis maximarum abscissurarum ipsius, ME , adiuncta, EF , & omnia quadrata trapezij, $EDCB$, æquari quadratis omnium abscissarum, ME , adiuncta, EF , nam ex. gr. ducta ipsi, BC , parallela utenque, VR , quæ secet, EB , in, S , & EM , in, T , patet, quod, VT , est æqualis ipsi, ME , & TR , adiuncta, EF , & ideo tota, VR , æqualis toti, MF ; similiter, ST , est æqualis ipsi, TE , & TR , adiuncta, EF , vnde patet, SR , æquari composita ex, TE , vna abscissarum, & adiuncta: Consimiliter in cæteris fa-

Y.

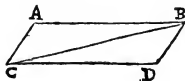
ita

Haec demonstratione propositum ostendemus; unde patebit pariter quadrata maximarum abscissarum propositæ rectæ lineæ, ut ipsius, EM , adiuncta quadam, ut, EF , ad quadrata omnium abscissarum eiusdem adiuncta eadem, esse ut quadratum unius maximarum abscissarum adiuncta iam dicta. i. ut quadratum compositæ ex proposita, & adiuncta, ad rectangulum sub hac composita, & sub adiuncta, una cum, $\frac{1}{2}$, quadrati differentia huius compositæ, & adiunctæ. s. ut quadratum, MF , ad rectangulum sub, MF, FE , una cum, $\frac{1}{2}$, quadrati, EM , quæ est differentia earundem, & est etiam proposita lineæ.

THEOREMA XXIX. PROPOS. XXIX.

Cuiuscunque parallelogrammi omnia quadrata regula uno laterum ad omnia quadrata eiusdem regula altero laterum cum prædicto angulum continentium, erunt ut prima regula ad secundam.

Sit quodcunque parallelogrammum, AD . Dico omnia quadrata eiusdem, regula, DB , esse ut, CD , ad, DB : Omnia enim quadrata, AD , regula, CD , ad omnia quadrata, AD , regula, DB , habent rationem compositam ex ea, quam habet quadratum, CD , ad quadratum, DB , & ex ea, quam habet, BD , ad, DC , (quia, BD , æqualiter inclinatur basi, CD , ac, CD , ipsi basi, DB , nam sunt circa eundem angulum) i. ex ea, quam habet quadratum, BD , ad rectangulum sub, BD, DC , duæ autem rationes, nempe quadrati, CD , ad quadratum, BD , & quadrati, BD , ad rectangulum sub, BD, DC , componunt rationem quadrati, CD , ad rectangulum sub, BD, DC , quæ est eadem ei, quam habet, CD , ad, DB , ergo omnia quadrata, AD , regula, CD , ad omnia quadrata eiusdem, AD , regula, DB , erunt ut, CD , primam regulam ad, DB , secundam, quod ostendere opus erat.



C O R O L L A R I U M.

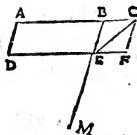
Hinc patet, si iungamus, CB , omnia quadrata trianguli, CBD , regula, CD , ad omnia quadrata trianguli eiusdem, regula, DB , esse ut, CD , primam regulam ad, DB , secundam, nam omnia quadrata trian-

triangulorum in eadem basi, & altitudine cum parallelogrammis constitutorum sunt omnium quadratorum dictorum parallelogrammorum sub tripla, sumpto communi latere pro regula, ut probatum est.

THEOREMA XXX. PROPOS. XXX.

SI intra parallelogrammum agatur à puncto basis lateribus oppositis parallela, & constitutorum hinc parallelogrammorum vnus ducatur diameter: Rectangula sub factis parallelogrammis ad rectangula sub trapezio, & triangulo in toto parallelogrammo per dictam diametrum constitutis, regula basi, habebunt eandem rationem, quam basis parallelogrammi, in quo non ducitur diameter ad compositam ex, $\frac{1}{2}$, eiusdem, & $\frac{1}{2}$, basis alterius: Rectangula verò sub toto parallelogrammo, & sub eo, in quo ducitur diameter, ad rectangula sub dicto trapezio, & sub triangulo, qui est trapeziji portio, erunt vt basis totius parallelogrammi ad compositam ex, $\frac{1}{2}$, basis parallelogrammi, in quo non ducitur diameter, & ex, $\frac{1}{2}$, basis alterius.

Sit ergo parallelogrammum, A F, in basi, D F, quæ sit regula, intra quam sumptum sit punctum, E, & per, E, iplis, A D, C F, acta parallela, B E, ducatur autem in alterutro parallelogrammorum, A E, E C, vt in, E C, diameter, E C. Dico ergo rectangula sub, A E, E C, ad rectangula sub trapezio, A D E C, & triangulo, C E F, esse vt, D E, ad compositam ex, $\frac{1}{2}$, D E, & $\frac{1}{2}$, E F. Rectangula enim sub trapezio, A D E C, diuisio per lineam, B E, & sub triangulo, C E F, indiuisio, æquantur rectangulis sub, A E, & triangulo, C E F, vel triangulo, B E C, & rectangulis sub triangulo, B E C, & triangulo, C E F, nunc patet rectangula sub, A E, E C, ad rectangula sub, A E, & triangulo, B C E, esse vt, B F, ad triangulum, B E C, .i. dupla .i. vt, D E, ad, $\frac{1}{2}$, D E, quod serua.



Per A.
Coroll.
13. huius.

Corol. 1.
16. huius.

Item rectangula sub, A E, E C, ad omnia quadrata, B F, sunt vt rectangulum, D E F, ad quadratum, E F, .i. vt, D E, ad, E F, omnia verò quadrata, B F, sunt sexcupla rectangulorum sub triangulis, B E

Elicitur BEC, CEF , .i. sunt ad illa, vt, EF , ad, $\frac{1}{2}$, eiusdem, EF , ergo ex æquali, rectangula sub, AE, EC , ad rectangula sub triangulis, BEC, CEF , erunt vt, DE , ad, $\frac{1}{2}$, EF , eadem verò ad rectangula sub, AE, EC , & triangulo, BEC , siue, CEF , ostensa sunt esse, vt, DE , ad, $\frac{1}{2}$, DE , ergo, colligendo, rectangula sub, AE, EC , ad rectangula sub, AE, EC , & triangulo, CEF , & sub triangulo, BEC , & eodem, CEF , .i. ad rectangula sub trapezio, $ADEC$, & triangulo, CEF , erunt vt, DE , ad compositam ex, $\frac{1}{2}$, DE , &, $\frac{1}{2}$, EF , quæ est Theorematis prima pars.

Per A. Co
roll. 23.
huius.

Dico ulterius rectangula sub, AF, FB , ad rectangula sub trapezio, $ADEC$, & triangulo, BEC , esse vt, DF , ad compositam ex, $\frac{1}{2}$, DE , &, $\frac{1}{2}$, EF ; rectangula .n. sub, AF, FB , ad rectangula sub, AE, EC , sunt vt rectangulum, $D FE$, ad rectangulum, $D EF$, .i. vt, FD , ad, DE , rectangula vero sub, AE, EC , ad rectangula sub, AE, EC , & triangulo, BEC , sunt vt, B

14. huius.
5. huius.

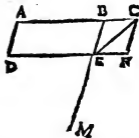
Coroll. 1.
26. huius.

F , ad triangulum, BEC , .i. dupla .i. vt, DE , ad, $\frac{2}{3}$, ipsius, DE , ergo, ex æquali rectangula sub, AF, FB , ad rectangula sub, AE, EC , & triangulo, BEC , erunt vt, FD , ad, $\frac{2}{3}$, DE , quod serua. Item rectangula sub, AF, FB , ad omnia quadrata, BF , sunt vt rectangulum, $D FE$, ad quadratum, FE , .i. vt, DF , ad, FE : Omnia verò quadrata, BF , sunt tripla omnium quadratorum trianguli, BEC , .i. sunt vt, FE , ad, $\frac{1}{3}$, FE , ergo ex æquali rectangula sub, AF, FB , ad omnia quadrata trianguli, BEC , sunt vt, DF , ad, $\frac{1}{3}$, FE , erant autem eadem ad rectangula sub, AE, EC , & triangulo, BEC , vt, DF , ad, $\frac{1}{3}$, DE , ergo, colligendo, rectangula sub, AF, FB , ad rectangula sub, AE, EC , & triangulo, BEC , vna cum omnibus quadratis trianguli, BEC , .i. ad rectangula sub trapezio, $ADEC$, & triangulo, BEC , erunt vt, DF , ad compositam ex, $\frac{1}{2}$, DE , &, $\frac{1}{2}$, EF , quæ est Theorematis secunda pars;

14. huius.
5. huius.
24. huius.

Per C.
Coroll.
23. huius.

hæc autem erant demonstranda.



C O R O L L A R I V M.

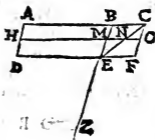
Colligimus autem ex hoc Theoremate rectangula sub maximis abscissarum proposita lineæ, adiunctis eisdem tot vni cuidam æqualibus, ad rectangula sub omnibus abscissis eiusdem adiuncta iam dicta lineæ, & sub residuis abscissarum eiusdem, esse vt adiuncta ad compositam ex, $\frac{1}{2}$, adiuncta, &, $\frac{1}{2}$, proposita lineæ, & hoc ex prima parte huius Theo-

Theorem. tri. nam ut alibi ostendimus, si supponamus ipsi, BE , adiungi rectam, EM , aequalem ipsi, DE , & BE , esse aequalem ipsi, EF , omnes lineae trapezii, $ADEC$, erunt aequales omnibus abscissis ipsius, BE , (quae sit proposita linea) adiuncta tamen, EM , & omnes lineae trianguli, CEF , (intellige semper regulam, DF ,) erunt aequales residuis omnium abscissarum propositae lineae, BE , item omnes lineae, AE , erunt aequales ijs, quae adiunguntur maximis abscissarum, BE , nam earum singulae sunt aequales ipsi, DE , vel, EM , & omnes lineae, EC , maximis abscissarum, BE , pariter aequales erunt, unde patet propositum. Exsecunda vero parte consimili ratione colligemus rectangula sub maximis abscissarum propositae lineae, ut, BE , adiuncta quadam, ut, EM , & sub maximis abscissarum eiusdem propositae, BE , ad rectangula sub omnibus abscissis, sumptis versus, E , eiusdem propositae, BE , adiuncta, EM , & sub eiusdem omnibus abscissis propositae, BE , esse: ut composita ex proposita, & adiecta .f. ut, BM , ad compositam ex, $\frac{1}{2}$, adiecta, quae est, ME , & $\frac{1}{2}$, propositae, quae est, BE .

THEOREMA XXXI. PROPOS. XXXI.

EXposita Proposit. antecedentis figura, & intra parallelas, AC, DF , eisdem aequidistanter ducta recta linea, HO , quae secet, BE , in, M , & CE , in, N , ostendemus, regula eadem, DF , rectangula sub parallelogrammis, AO, OB , ad rectangula sub trapezijs, $HACN, MBCN$, esse ut rectangulum, HOM , ad rectangulum sub, HO, MN , cum rectangulo sub composita ex, $\frac{1}{2}$, HM , & $\frac{1}{2}$, NO , & sub, NO .

Rectangula enim sub parallelogrammis, AO, OB , ad rectang. la sub parallelogrammis, AM, MC , sunt ut rectangulum, HOM , ad rectangulum, HMO , rectangula vero sub, AM, MC , ad rectangula sub parallelogrammo, AM , & trapezio, $BMNC$, sunt ut, BO , ad trapezium, $BMNC$, .i. ut, MO , ad, MN , cum, $\frac{1}{2}$, NO , vel ut rectangulum, HMO , ad rectangulum sub, HM , & sub composita ex, MN , & $\frac{1}{2}$, NO , ergo, ex aequali, rectangula sub, AO, OB , ad rectangula sub, AM , & trapezio, $BMNC$, sunt ut rectangulum, HOM , ad rectangulum sub, HM , & composita ex, MN , & $\frac{1}{2}$, NO , quod serua.



5. huius.

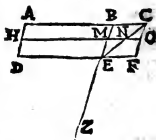
Coroll. i.
26. huius.

20. huius.

5. huius.

In:

14. huius. Insuper rectangula sub, A O, O B, ad omnia quadrata, O B, sunt vt rectangulum, H O M, ad quadratum, O M, & omnia quadrata, O B, ad omnia quadrata trapezij, B M N C, sunt vt quadratum, O M, ad rectangulum, O M N, cum, $\frac{1}{2}$, quadrati, N O, ergo, ex æquali rectangula sub, A O, O B, ad omnia quadrata trapezij, B M N C, sunt vt rectangulum, H O M, ad rectangulum, O M N, cum, $\frac{1}{2}$, quadrati, N O, ostensa sunt autem rectangula sub, A O, O B, ad rectangula sub, A M, & trapezio, B M N C, esse vt rectangulum, H O M, ad rectangulum sub, H M, & composita ex, M N, & $\frac{1}{2}$, N O, ergo, colligendo, rectangula sub, A O, O B, ad rectangula sub, A M, & trapezio, B M N C, cum omnibus quadratis eiusdem trapezij, idest ad rectangula sub trapeziji, A H N C, B M N C, erunt vt rectangulum, H O M, ad rectangulum sub, H M, & composita ex, M N, & $\frac{1}{2}$, N O, vna cum rectangulo sub, O M, & M N, & $\frac{1}{2}$, quadrati, N O, rectangulum autem sub, H M, & composita ex, M N, & $\frac{1}{2}$, N O, diuiditur in rectangula sub, H M, & M N, & sub, H M, & $\frac{1}{2}$, N O, si ergo iunxeris rectangulum sub, H M, M N, cum rectangulo sub, O M, M N, fiet rectangulum sub tota, H O, & sub, M N, & remanebit rectangulum sub, H M, & sub, $\frac{1}{2}$, N O, cum, $\frac{1}{2}$, quadrati, N O, idest cum rectangulo sub, N O, & $\frac{1}{2}$, N O, est autem rectangulum sub, H M, & $\frac{1}{2}$, N O, æquale rectangulo sub, $\frac{1}{2}$, H M, & sub, N O; hoc ergo si iunxeris rectangulo sub, N O, & $\frac{1}{2}$, N O, conficiemus rectangulum sub composita ex, $\frac{1}{2}$, H M, & $\frac{1}{2}$, N O, & sub, N O, totum igitur consequens iam dictum diuisum est in hæc duo rectangula, nempe vnum sub, H O, M N, aliud sub composita ex, $\frac{1}{2}$, H M, & $\frac{1}{2}$, N O, & sub, N O; ad hæc ergo simul sumpta rectangulum, H O M, erit vt rectangula sub, A O, O B, ad rectangula sub trapeziji, A H N C, B M N C, quod ostendendum erat.
- Per C. Corol. 23. huius.
1. Secundi Elem.
7. huius.



C O R O L L A R I V M.

Hinc etiam patet, si supponamus, FE, esse æqualem ipsi, EB, & ipsi, EB, in directum adiunctam ipsam, EZ, sumamus tamen cum, EZ, ipsam, EM, ex quibus conficiamus, MZ, adiunctam maximis abscissurum, vel abscissis ipsius, BM, propositæ utcumque lineæ, quod facile ostendemus omnes lineas parallelogrammi, AO, æuari maximis ab-

vt in Corol. 23. huius.

abscissarum, BM , adiuncta, MZ , & omnes lineas, BO , equari maximis abscissarum, BM , adiuncta, ME , & omnes lineas trapezij, $AHN C$, equari omnibus abscissis, BM , adiuncta, MZ , & omnes lineas trapezij, $BMNC$, equari omnibus abscissis ipsius, BM , adiuncta, ME , quorum exemplum patere potest in recta, HO , in qua, HO , equatur ipsi, BZ , &, HN , ipsi, MZ , &, MN , ipsi, ME , equari autem superaddita sic intellige, ut semper cuilibet assumpta in parallelogrammo, AO , reperitur sibi equalis respondens in recta, BZ , & sic cuilibet assumpta in trapezjis iam dictis, reperitur illi equalis correspondens in recta, BZ , qua erit una abscissarum, BM , adiuncta, MZ , vel, ME , ea nempe, que terminatur ad idem punctum, per quod transit ea, qua equidistat ipsi, DF , & cum eadem comparata illi reperitur equalis (sic autem intellige in ceteris, cum dicimus omnes lineas alicuius figurae, que est parallelogrammum, vel trapezium, vel triangulum equari omnibus abscissis, vel maximis, vel residuis omnium abscissarum alicuius lineae, adiuncta, vel non adiuncta aliqua linea.) Rectangula ergo sub maximis abscissarum, BM , adiuncta, MZ , & sub maximis abscissarum, BM , adiuncta, ME , ad rectangula sub omnibus abscissis, BM , adiuncta, MZ , & sub omnibus abscissis, BM , adiuncta, ME , erunt ut rectangulum sub, HO , OM , idest sub, ZB , BE , ad rectangulum sub, HO , MN , una cum rectangulo sub composita ex, $\frac{1}{2}$, HM , &, $\frac{1}{2}$, NO , & sub, NO , idest ad rectangulum sub, ZB , ME , una cum rectangulo sub composita ex, $\frac{1}{2}$, ZE , &, $\frac{1}{2}$, MB , & sub, MB .

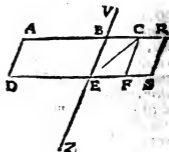
THEOREMA XXXII. PROPOS. XXXII.

Exposita adhuc antecedentis Theorematis figura, si ipsi, EF , ad punctum, F , iungatur in directum quaedam recta linea, ut, FS , & compleatur parallelogrammum, FR , regula sumpta, DS , ostendemus rectangula sub, AE , ER , ad rectangula sub trapezjis, $ADEC$, $CESR$, esse ut rectangulum, DES , ad rectangulum sub, DE , & composita ex, SF , &, $\frac{1}{2}$, FE , una cum rectangulo sub, EF , & composita ex, $\frac{1}{2}$, EF , &, $\frac{1}{2}$, FS .

Rectangula enim sub, AE , ER , ad rectangula sub, AE , & trapezium, $CESR$, sunt ut, ER , ad trapezium, $CESR$, .i. ut, ES , ad, SF , cum, $\frac{1}{2}$, FE , .i. sumpta, DE , communi altitudine, ut rectangulum, DES , ad rectangulum sub, DE , & sub composita ex, SF , &, $\frac{1}{2}$, FE , quod serua.

In:

14. huius. Insuper rectangula sub, $A E, E R$, ad rectangula sub, $B F, F R$, sunt vt rectangulum, $D E S$, ad rectangulum, $E F S$; item rectangula sub, $B F, F R$, ad rectangula sub triangulo, $B E C$, & trapezio, $C E S R$, sunt vt, $F S$, ad compositam ex, $\frac{1}{2}, S F$, &, $\frac{1}{2}, F E$, idest sumpta, $E F$, communi altitudine, vt rectangulum, $E F S$, ad rectangulum sub, $E F$, & composita ex, $\frac{1}{2}, E F$, &, $\frac{1}{2}, F S$, ergo ex æquali rectangula sub, $A E, E R$, ad rectangula sub triangulo, $B E C$, & trapezio, $C E S R$, erunt vt rectangulum, $D E S$, ad rectangulum sub, $E F$, & composita ex, $\frac{1}{2}, E F$, &, $\frac{1}{2}, F S$; erant autem eadem rectangula sub, $A E, E R$, ad rectangula sub, $A E$, & trapezio, $C E S R$, vt idem rectangulum, $D E S$, ad rectangulum sub, $D E$, & composita ex, $S F$, &, $\frac{1}{2}, F E$, ergo, colligendo, rectangula sub, $A E, E R$, ad rectangula sub, $A E$, & trapezio, $C E S R$, & sub triangulo, $B E C$, & eodem trapezio, $C E S R$, id est ad rectangula sub trapezio, $A D E C$, & trapezio, $C E S R$, erunt vt rectangulum, $D E S$, ad rectangulum sub, $D E$, & composita ex, $S F$, &, $\frac{1}{2}, F E$, vna cum rectangulo sub, $E F$, & composita ex, $\frac{1}{2}, E F$, &, $\frac{1}{2}, F S$, quod ostendere opus erat.
- Per A.
Corol.
23. huius.



C O R O L L A R I V M.

- Corol.
26. huius. **Q**uoniam verò si supponamus, $F E$, esse æqualem ipsi, $E B$, facti eodem modo ut supra ostendemus omnes lineas trapezij, $A D E C$, æquari residuis omnium abscissarum, $B E$, sumptis versus, E , adiuncti, $E Z$, & omnes lineas trapezij, $C E S R$, æquari omnibus abscissis, $E B$, adiuncta recta linea æquali ipsi, $F S$, ad punctum, B , qua sit, $B V$, & omnes lineas, $A E$, æquari tot æqualibus adiuncta, $Z E$, quot sunt omnes abscisse, $B E$, & omnes lineas, $E R$, æquari maximis abscissarum, $E B$, adiuncta, $B V$, idem rectangula sub istis erunt etiam æqualia rectangulis sub dictis trapezjjs, & parallelogrammis, vnde proposita utrunq; linea, $V Z$, eaq; utrunq; secta in duobus punctis, B, E , patebit rectangula sub tot æqualibus, $Z E$, quot sunt omnes abscisse, sine maxime abscissurum, $E B$, & sub maximis abscissurum, $E B$, adiuncta, $B V$, ad rectangula sub residuis omnium abscissarum, $B E$, adiuncta, $E Z$, & sub omnibus abscissis, $E B$, adiuncta, $B V$, esse vt rectangulum

lum, & ES, ad rectangulum sub, DE, & composita ex, SF, & 1/2 FE, una cum rectangulo sub, EF, & composita ex, 1/2 EF, & 1/2 FS. s. ut rectangulum, ZEV, quod est unum rectangulorum maximis aequalium, ad rectangulum sub, ZE, & sub composita ex, VB, & 1/2 BE, una cum rectangulo sub, EB, & composita ex, 1/2 EB, & 1/2 BV, regulam autem hic pariter suppone ipsam, DS, & abscissas, residuas & maximas abscissarum tum hic, tum in supradictis, & sequentibus, nisi aliud dicatur, semper intellige, vel recti, vel ei usdem obliqui transitus, recti Iux. diff. 1.
nempè, cum parallelogramma sunt rectangula, obliqui autem, cum huius.
non fuerint rectangula, cum diffinitiones de his allatas.

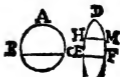
THEOREMA XXXIII. PROPOS. XXXIII.

EXpositis duabus utcumq; figuris planis, & in earum una: quaque sumpta utcumque regula, ut omnia quadrata earundem figurarum sumpta iuxta dictas regulas, ita erunt solida quæcumq; ad inuicem simularia ex eisdem figuris genita iuxta easdem regulas.

Sint duæ utcumque figuræ planæ, ABC, DEF, in quibus duæ utcumque sint sumptæ regulæ, BC, EF, rectæ lineæ. Dico igitur, ut omnia quadrata figuræ, ABC, regula, BC, ad omnia quadrata figuræ, DEF, regula, EF, ita esse solidum simile quodcumque genitum ex figura, ABC, iuxta regulam, BC, ad sibi simile genitum ex figura, DEF, iuxta regulam, EF. Ducatur in altera dictarum figurarum, ut in, DEF, utcumque regulæ, EF, parallela, HM, quia ergo quadrata habent inter se duplicem rationem laterum, à quibus describuntur, ideo quadratum, EF, ad quadratum, HM, habebit duplicem rationem eius, quam habet, EF, ad, HM, sed etiam aliæ duæ quæcumque figuræ planæ similes ab eisdem tanquam lineis, vel lateribus homologis earundem deier ptq; habeant duplicem rationem earundem, ergo, ut quadratum, EF, ad quadratum, HM, ita erit alia quælibet figura plana descripta ab, EF, ad similem sibi descriptam ab, HM, ita ut, EF, HM, sint earum homologæ, & permutando, quadratum, EF, ad aliam figuram descriptam ab, EF, erit ut quadratum, HM, ad figuram prædictæ similem ab, HM, descriptam. Sic etiam esse ostendemus quadratum cuiuscumque in figura, DEF, ductæ ipsi, EF, æquidistantis,

Vide B. Definit. 8. huius.

8. & 15. huius.



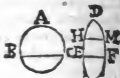
15. huius.

Z

tis,

Coroll. 4.
huius.

tis, ergo, vt vnum ad vnum, sic omnia ad omnia. 2. vt quadratum, E F, ad figuram aliam quamcumq; descriptam ab, E F, sic erunt omnia quadrata figuræ, D E F, regula, E F, ad omnes figuras similes eiusdem figuræ, D E F, regula eadem, E F, similes inquam descriptæ ab, E F, vt autem quadratum, E F, ad figuram descriptam ab, E F, ita quadratum, B C, ad figuram, quæ describitur à, B C, similis ei, quæ descripta est ab, E F, ita vt describentes sint earumdem homologæ, vt autem quadratum, B C, ad figuram descriptam à, B C, sic esse ostendemus omnia quadrata figuræ, A B C, regula, B C, ad omnes figuras similes eiusdem figuræ, A B C, similes inquam descriptæ à, B C, vel ab, E F, eodem modo, quo id ostendimus in figura, D E F, ergo omnia quadrata figuræ, A B C, ad omnes figuras similes alias quascunq; eiusdem figuræ, A B C, erunt, vt omnia quadrata figuræ, D E F, ad omnes figuras similes prædictis eiusdem figuræ, D E F, regulis prædictis, B C, E F, ergo permutando, vt omnia quadrata figuræ, A B C, ad omnia quadrata figuræ, D E F, ita erunt omnes figuræ similes quæcumq; figuræ, A B C, ad omnes figuras similes prædictis figuræ, D E F, quia verò omnes figuræ similes alicuius figuræ planæ regula quadam sumptæ, sunt omnia plana solidi, quod dicitur simile, &



B. Diff. 8.
huius.

Postulatū
2. huius.

3. huius.

genitum ex tali figura iuxta eandem regulam, idè, vt omnes figuræ similes quæcumq; ipsius figuræ, A B C, regula, B C, ad omnes figuras similes ipsius figuræ, D E F, regula, E F, similes inquam prædictis. i. vt omnia quadrata figuræ, A B C, regula, B C, ad omnia quadrata figuræ, D E F, regula, E F, ita erunt omnia plana solidi similis cuiuscumq; geniti ex figura, A B C, iuxta regulam, B C, ad omnia plana solidi similis geniti ex figura, D E F, iuxta regulam, E F, vt autem omnia plana duorum solidorum sic & ipsa solida, ergo etiam solida similaria genita ex figuris, A B C, D E F, (quæ sunt similaria ad inuicem, quia omnes figuræ similes figuræ, A B C, sunt etiam similes omnibus figuris similibus figuræ, D E F,) iuxta regulas, B C, E F, erunt ad inuicem, vt omnia quadrata earumdem figurarum eisdem regulis sumpta, quod erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Hinc patet, si in figura, A B C, utcumq; regula, B C, descripserit duas quascumq; figuras, quod vt vna ad aliam, ita erunt omnes figura ipsius, A B C, similes vni descriptarum ad omnes figuras eiusdem

ſdem ſimiles alteri deſcriptarum .i. ita omnia plana ſolidi ſimilaris geniti ex , A B C , iuxta regulam , B C , (ſimilibus exiſtentibus eiſdem figura ſimilibus vni deſcriptarum) ad omnia plana ſolidi ſimilaris geniti ex eadem figura iuxta eandem regulam (huius ſimilibus exiſtentibus figuris alteri deſcriptarum) ideſt ita erunt ſolida ſimilaria genita ex eadem figura , A B C , iuxta communem regulam , B C , non tamen ſimilaria ad inuicem , ſed , quarum omnia plana ſunt omnes figura ſimiles eiſdem , A B C , ſimiles inquam , qua ſunt vnius dictorum ſolidorum vni deſcriptarum à , B C , figurarum , & qua ſunt alterius , ſimiles alteri deſcriptarum figurarum .

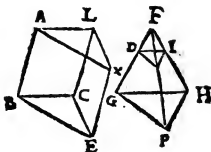
C O R O L L A R I V M II.

VNde ſolida ſimilaria , ſed non ad inuicem , genita ex .gr. à figuris , A B C , D E F , iuxta regulas , B C , E F , qua duas figuras planas diſſimiles deſcripſerint , quibus ſint ſimiles figura , qua dicuntur omnia plana dictorum ſimilarium ſolidorum , erunt ad inuicem , vt ipſa figura diſſimiles deſcripta ab ipſis , B C , E F , nam ſolidum ſimilare genitum ex , D E F , iuxta regulam , E F , ad ſibi ſimilare genitum ex figura , A B C , iuxta regulam , B C , erit vt figura deſcripta ab , E F , ad ſibi ſimilem figuram deſcriptam à , B C , item ſolidum hoc ſimilare genitum ex figura , A B C , iuxta regulam , B C , ad ſolidum ſimilare , ſed non ſibi , genitum ex eadem figura iuxta eandem regulam , B C , erit vt figura deſcripta à , B C , ſimilis deſcripta ab , E F , ad figuram ſibi diſſimilem deſcriptam ab eadem , B C , (quibus figuris diſſimilibus ſint ſimiles figura , qua dicuntur omnia plana ſolidorum ſimilarium genitorum ex eadem figura , A B C , iuxta communem regulam , B C ,) ergo , ex aequali ſolidum ſimilare genitum ex figura , D E F , ad ſolidum ſimilare , ſed non ſibi , genitum ex figura , A B C , (genita intellige iuxta regulas , E F , B C ,) erit vt figura deſcripta ab , E F , cui ſunt ſimiles figura huius ſolidi , ad figuram deſcriptam à , B C , prædicta diſſimilem , cui ſunt ſimiles figura ſolidi .
Uex , B A C , geniti iuxta regulam , B C .

THEOREMA XXXIV. PROPOS. XXXIV.

Solida ſimilaria genita ex parallelogrammis iuxta regulam vnum eorundem laterum , ſunt cylindrici ; & ſolida ſimilaria genita ex triangulis iuxta regulam vnum eorundem laterum . ſunt conici , quorum baſes erunt figura à regulis deſcriptæ , & latera , eorundem parallelogrammorum , vel triangulorum latera regulis inſiſtentia .

Sit ergo expositum quodcumq; parallelogrammum, AC , & tri-
 angulum, FGH , in quibus pro regulis sumantur latera, BC , GH .
 Dico solidum quodcumq; simile genitum ex parallelogrammo, A
 C , (iuxta regulam, BC ,) esse cylindricum, cuius basis erit a , BC ,
 descripta figura, & latus, utrumvis ipsorum, AB , LC , laterum a re-
 gulæ, BC , insistentium; Et genitum ex triangulo, FGH , iuxta
 regulam, GH , esse conicum, cuius basis erit a , GH , descripta fi-
 gura, & latus utrumvis duorum, FG , FH , regulæ, GH , insisten-
 tium. Decebat autem regulis, BC , GH , figuræ utcumque planæ,
 BCE , GHP , æqualiter inclinatę planis, AC , FGH , deinde per
 circuitum figuræ, BCE , feratur latus, AB , cui sit æquale latus, B
 X , quodque puncto, A , describat circuitum figuræ, AXL , & per
 circuitum figuræ, GHP , feratur utrumvis laterum, FG , FH , in-
 definite productum versus fi-
 guram, GHP , cuius portio
 inter, F , & punctum, P , sit,
 FP , erit ergo solidum quod
 clauditur superficie cylindrica,
 descripta latere, AB , &
 duabus figuris, ALX , BCE ,
 cylindricus; & quod clauditur
 superficie conica descripta
 altero laterum, FG ,
 FH , indefinite producto, &
 figura, GHP , erit conicus.



Ex def. 3.
 & 4. lib. 1.

A. def. 8.
 huius.

Coroll. 12.
 lib. 1.

Corollar.
 25. lib. 1.

Dico autem solidum simile genitum ex, AC , iuxta regulam, BC ,
 cuius omnia plana sint omnes figuræ ipsius, AC , similes figuræ, B
 C E , esse hunc cylindricum, ACE , nam quælibet earum, quæ di-
 cuntur omnes figuræ similes parallelogrammi, AC , regula, BC ,
 similes inquam figuræ, BCE , est etiam similiter posita, ac, BCE ,
 descripta latere homologo ipsi, BC , igitur eius perimenter erit in su-
 perficie cylindrica descripta latere, AB , si enim aliquid eius esset in-
 tra, vel extra illam superficiem, aliquid eius esset intra, vel extra com-
 mune in sectionem talis assumptę figurę, & superficie cylindricę,
 talis autem communis sectio est perimenter figurę similis, & similiter
 positę, ac, BCE , (quia si cylindricus plano secetur basi æquidistan-
 te concepta figura erit similis, & similiter posita, ac basis) ergo ha-
 beremus duas figuras ab eodem latere homologo descriptas, similes
 æquales, & similiter positas, & non congruentes, quod est absur-
 dum, congruent igitur, erit ergo assumpta figura, quæ est vna ear-
 um, quę dicuntur omnes figurę parallelogrammi, AC , similes ipsi,
 BCE , regula, BC , & est vnum eorum, quæ dicuntur omnia pla-

na 10.

na solidi similis geniti ex, AC , iuxta regulam, BC , erit, inquam, assumpta figura etiam vnum eorum, quæ dicuntur omnia plana cylindrici, ACE , regula, BCE , quod etiam de cæteris simili modo ostendetur, ergo solidum simile genitum ex, AC , iuxta regulam, BC , & cylindricus, ACE , habebunt omnia plana (regula, BCE , assumpta) communia, ergo solidum simile genitum ex, AC , iuxta regulam, BC , erit idem cylindrico, ACE , cuius basis est figura, BCE , & latus alterum laterum, AB , LC . Similiter ostendemus solidum simile genitum ex triangulo, FGH , iuxta regulam, GH , esse dem conico, $FGHP$, cuius latus alterum laterum, FG , FH , & basis est figura, GHP , consimili via supradictæ procedentes, quæ erant demonstraunda.

COROLLARIUM I.

Hinc manifestum est, si figura descripta à, BC , GH , sint circuli, quod solidum simile genitum ex, AC , erit cylindrus, & genitum ex triangulo, FGH , conus siue rekti, siue scaleni, si verò descripta figura sint rectilinea, genitum ex, AC , erit prisma, ex, FGH , autem pyramis siue recta, siue scalena cætera autem nomine communis vocantur solida similia genita ex eisdem fig. iuxta regulas, intellige, BC , GH .

COROLLARIUM II.

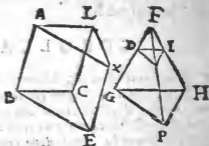
Si intra triangulum, FGH , ducamus ipsi, GH , parallelam utcumq; qua sit, DI , abscindens à triangulo, FGH , trapezium, DH , ostendemus eodem modo, quo supra, solidum simile genitum ex trapezio, DH , iuxta regulam, GH , esse frustum solidi similis geniti ex triangulo, FGH , iuxta eandem regulam, id si frustum conici, $FGHP$, B. def. 6. cont. cum figura descripta à, GH , est circulus, vel frustum pyramidis recta, siue scalena, cum illa est figura rectilinea, quæ facile ostendentur. l. 1.

COROLLARIUM III.

Tandem patet vice versa, si quis cylindricus, vel conicus, vel eius frustum, intelligatur secari per latera, de illo plano secante conceptam in secto solido figuram esse genitricem earundem per descriptionem similitum figurarum, & ipsa esse solida similia genita ex eisdem figuris genitricibus iuxta regulas communes sectiones planorum l. 1. l. 1.
l. 2. & Cor. l. 1.
secant.

Cor. 6. 1.
16. lib. 1.

secantium, & basium, qua figura genitrices in cylindricis erunt parallelogramma in conicis triangula, & in frustis conicis trapezia; igitur verum est quodlibet solidum simile genitum ex parallelogrammo iuxta regulam unum laterum esse cylindricum, & genitum ex triangulo iuxta regulam unum laterum esse conicum, & ex trapezio esse frustum conicum; & vice versa, quemlibet cylindrum esse solidum simile genitum ex parallelogrammo in ipso producto per planum per latera ductum, genitum inquam iuxta communem sectionem eius, & basis cylindrici; & quemlibet conicum esse solidum simile genitum ex triangulo in eodem producto per traiectionem plani per latera, genitum, inquam iuxta communem sectionem eius, & basis dicti conici; & quodlibet frustum conicum esse solidum simile genitum ex trapezio in ipso producto per traiectionem plani per latera eiusdem frusti, genitum inquam iuxta regulam communem sectionem eius, & unius basium eiusdem: Sine ergo, exposito parallelogrammo, & triangulo intellexeris iuxta diffu. 8. huius, describi omnes figuras similes eis qua describuntur à basibus dicti parallelogrammi, & trianguli, & sic conceperis effici solidum, cuius illa sunt omnia plana; siue intellexeris latus dicti parallelogrammi, vel trianguli indefinite productum revolvi per circuitum figurarum à basibus descriptarum, ut habeas solidum dicta Superficie descripta, & basi, vel basibus comprehensum, idem utroque modo tibi obvenit solidum, potest autem prior vocari generatio solidorum per descriptionem figurarum; posterior autem, generatio solidorum per revolutionem facta, qua maioris dilucidationis gratia hic apposui, ut ex hac declaratione aliquantulum pateat, in plurimis etiam alijs utramque generationem rite nos imaginari posse, ut in sphaera, spheroides, & conoidibus, & eiusdem frustis, & alijs quam plurimis, ut suo loco animadvertetur.



Diff. 3. &
4. lib. 1.

plurimis, ut suo loco animadvertetur.



A. COROLLARIUM IV. GENERALIS.

S E C T I O I .

ET quoniam, ut ostensum est Prop. 33. huius Libri, ut omnia quadrata duarum figurarum inter se sumpta cum datis regulis, ita sunt solida similitaria genita ex iisdem figuris iuxta easdem regulas, idem cum in Propositionibus huius Libri inuenta est ratio omnium quadratorum parallelogrammorum, vel triangulorum, vel trapeziorum, regulis eorum lateribus, eandem rationem comperimus habere solida similitaria genita ex parallelogrammis, idest cylindricis; vel ex triangulis, idest conicis; vel ex trapezibus, idest frustra conica, genita inquam iuxta easdem regulas, qua amplius dilucidabimus singula, qua opportuna fuerint, Theoremata denuo assumentes.

B. S E C T I O I I .

IN Propos. 9. igitur exposita denuo eius figura, intelligantur bases, GM, MH , describere similes figuras planas, qua sint, $GIMR, MTHS$, ut eorum linea, vel latera homologa, aequè erectas planis, AM, MC , & in ijs, tanquam in basibus consistere cylindricos, AM, BH , quorum latera sint, AG, CH , erunt igitur hi cylindrici solida similitaria genita ex parallelogrammis, AM, MC , iuxta regulas, GM, MH , igitur erunt, ut omnia quadrata eorundem regulis eisdem, GM, MH , sunt quætem omnia eorum quadrata, ut quadrata basium, GM, MH , ergo cylindrici, AM, MC , erunt ut quadrata basium, GM, MH , .i. ut figurae similes, $GIMR, MTHS$, igitur cylindrici in eadem altitudine, & similibus basibus insistentes sunt, ut ipsæ bases.



Coroll. 3. ant.

9. huius.

C. S E C T I O I I I .

IN Propos. 10. consimiliter procedentes colligemus, cylindricos in eadem, vel aequalibus, ac similibus basibus consistentes esse, ut altitudines, vel ut latera æqualiter eorundem basibus inclinata.

D. S E C T I O I V.

IN Propof. 11. deducimus cylindricos fimilibus bafibus infiftentē habere inter fe rationem compofitam ex ratione bafium, & altitudinum, vel laterum aqualiter diftis bafibus inclinatorum.

E. S E C T I O V.

IN Propof. 12. colligimus cylindricos, quorum fimiles bafes altitudinibus, vel lateribus aqualiter bafibus inclinatis reciproce respondent, effe aequales; & cylindricos aequales, fimilibus bafibus infiftentes, bafes habere altitudinibus, vel lateribus aqualiter bafibus inclinatis, reciprocas.

F. S E C T I O VI.

IN Prop. 13. habebimus fimiles cylindricos effe in tripla ratione laterum homologorum.

G. S E C T I O VII.

EX Prop. 14. colligimus fi praedicti cylindrici infiftant bafibus difsimilibus, adhuc praedictas paffiones de ipsis verificari; in quibus tamen non numerantur fimiles cylindrici, cum oporteat eosdem fimiles bafes habere.

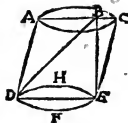
H. S E C T I O VIII.

IN Prop. 22. habemus in eius figura, folidi fimilariis genita ex parallelogramis, AS, TB , iuxta regulas, ES, ZB , eandem rationem habere ad folidi fimilariis genita ex triangulis OES , & ZB . id est cylindricos genitos ex, AS, TB id conicos genitos ex triangulis, OES , & ZB , eandem rationem habere, unde, cum conici fint partes proportionales cylindricorum in eadem altitudine cum ipsis exteatiu n, quae inq; de cylindricis in huius Coroll. Sectionibus 2. 3. 4. 5. 6. & 7. collecta funt, eadem & pro conicis tanquam collecta recipimus.

Ex hac
Propof.

I. S E C T I O IX.

IN Propof. 24. habemus quemcumque cylindricum esse triplum conici in eadem basi, & altitudine cum ipfo. Sit expositus quicumq; cylindricus, AE , in basi, $DHEF$, in eadem autem basi, & altitudine fit conicus, DBE , sic tamen basi insilens, ut ducto plano per latera conici, idem transeat per latera cylindrici, AE , sit autem ductum tale planum, quod faciat in conico, DBE , triangulum, DBE , & in cylindrico, AE , parallelogrammum, AE , erunt igitur, AE , & triangulum, DBE , genitricis figura eorundem solidorum, quae similia ad inuicem, vocantur, genita iuxta communem regulam, DE , quod ergo gignitur ex, AE , ad genitum ex triangulo, DBE , erit ut omnia quadrata, AE , ad omnia quadrata trianguli, DBE , regula, DE , idest triplum, solidum verò simile genitum ex, AE , iuxta regulam, DE , cuius figura sint similes figura, $DFEH$, est cylindricus, AE , & solidum simile genitum ex triangulo, DBE , iuxta regulam, DE , cuius figura sint similes pariter figura, $DFEH$, est conicus, DBE , ergo cylindricus, AE , triplus erit conici, DBE , & consequenter triplus erit cuiusuis alij in eadem basi, $DFEH$, & altitudine, cum conico, DBE , existentis, quoniam, ut ostensum est, conici in eadem altitudine stantes sunt, ut bases, unde cum bases sunt aequales, & conici sunt aequales, verum ergo est, quod proponebatur.

Cor. 6. &
16. lib. 1.Corol. 8.
34. huius.

44. huius

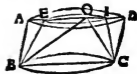
34. huius
1. er B. Co-
rollar. 27.
huius.

K. S E C T I O X.

IN Prop. 27. habemus solida ad inuicem similia genita ex trapezibus in eadem basi (quae sit unum laterum aequidistantium) & altitudine constitutis, quorum oppositae bases sint aequales, genita, inquam, iuxta communem regulam ipsam basim, idest frustra conicorum quorum oppositae bases sunt figurae descripta à lateribus duorum trapeziorum aequidistantibus, esse aequalia.

L. SECTIO XI.

IN Prop. 28. habetur cylindricum in eadem basi, & altitudine cum frusto conici constitutum, ad idem, esse (sumptis duabus homologis in oppositis frusti conici basibus) ut quadratum maioris dictarum homologarum ad rectangulum subditis homologis una cum, $\frac{1}{2}$, quadrati differentia earundem homologarum. Sit cylindricus, AC , in basi figura quacumque plani, BC , in eadem autem basi, & altitudine sit frustum conici, $EBCI$, sic tamen se habens, ut dicto plano per latera cylindrici, AC , idem transeat per latera frusti conici $BEIC$, sit autem dictum tale planum, quod faciat in cylindrico, AC , parallelogrammum, AC , & in frusto, $BEIC$, trapezium, $BEIC$, erunt igitur rectæ, BC , EI , lineæ



Corol. 21.

lib. 1.

Coroll. 3.

34 huius.

33. huius.

27. huius.

oppositarum basium frusti inter se homologæ, & quia cylindricus, AC , est solidum simile genitum ex, AC , iuxta regulam, BC , & frustum, $EBCI$, est solidum predicto simile genitum ex trapezio, $EBCI$, sunt autem hæc solida similia, ut omnia eorundem quadrata, & omnia quadrata, AC , regula, BC , ad omnia quadrata trapezii, $EBCI$, regula eadem sunt, ut quadratum, BC , ad rectangulum sub, BC , EI , una cum, $\frac{1}{2}$, quadrati differentia earundem, ergo cylindricus, AC , ad frustum conicum, $EBCI$, & ad quodvis aliud in eadem basi, & al-

K. Huius.

Coroll.

Gener.

Corol. 21.

lib. 1.

titudine cum hoc constitutum (quoniam existet huic æquale) erit ut quadratum, BC , ad rectangulum sub, BC , EI , una cum, $\frac{1}{2}$, quadrati differentia earundem, BC , EI , quæ sunt duarum oppositarum basium, $EBCI$, I , BC , homologæ utcumque sumptæ, nam planum eadem solida secans dictum est utcumque, dummodo per eorundem latera transeat.

M. SECTIO XII.

Hinc patet si in eadem basi, BC , figurâ, fuerit conicus, & eadem altitudine cum frusto, id est cum cylindrico, AC , qui sit conicus, BOC , quod hic erit, $\frac{1}{2}$, cylindrici, AC , & idem ad frustum, $EBCI$, erit ut, $\frac{1}{2}$, quadrati, BC , ad rectangulum sub, BC , EI , una cum, $\frac{1}{2}$, quadrati differentia, BC , EI , id est ut totum quadratum, BC , ad rectangulum sub, BC , & tripla, EI , una cum toto quadrato differentia earundem, BC , EI . Vide igitur quam sit amplior hæc demonstratio ea, qua alij ostenderunt cylindricum esse triplum conici, & prismæ pyramidis in eadem basi, & altitudine cum ipso constitutæ, nam ad tota varia solida hæc se ex-

I. Huius.

Coroll.

Gener.

se extendit, quot sunt figurarum planarum variationes, que nullo assignato coarctantur numero, cuius modi demonstrationis vniuersalitatem in alijs figuris quoque in posterum considerandis prosequemur, vt amplius infra patebit.

N. S E C T I O X I I I.

IN Prop. 29. & eius Corollario tandem edocemur solida similia genita ex parallelogrammo, vel triangulo eodem, iuxta duas regulas latera angulum continentia, id est cylindricos ab eodem parallelogrammo, & conicos ab eodem triangulo genitos, iuxta dictas regulas, esse inter se, vt easdem regulas.

T H E O R E M A X X X V. P R O P O S. X X X V.

Parallelepipedum sub basi rectangulo quodam, altitudine autem quadam recta linea æquatur parallelepipedis sub basi eodem rectangulo, & sub quocumq; partibus, in quas altitudo vtcumq; diuidui potest. Et si rectangulum, quod est basis, intelligatur vtcumq; diuisum in quocumq; rectangula, dictum parallelepipedum æquatur parallelepipedis sub singulis partibus altitudinis, & singulis partibus basis.

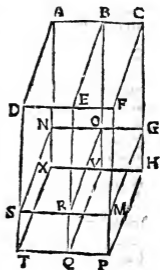
Sit parallelepipedum rectangulum, AP , cuius basis rectangulum, TH , supponatur pro nunc indiuita, & altitudo, DT , diuisa vtcumque in quocumq; partes, DS , ST . Dico parallelepipedum, AP , æquari parallelepipedis sub, DS , TH , & sub, ST , TH . Ducatur per, S , planum æquidistans basi, TH , quod in eo producet rectangulum, vt, SG , sunt igitur, AM , NP , parallelepipeda, & A Corol. 22
 M , est sub, DS , SG , vel, TH , & quia, SG , TH , sunt figuræ similes, & æquales) NP , vero sub, ST , TH , contentur, est autem Corol. 12, lib. 1.
 parallelepipedum, AP , contentum iuo, DT , TH , æquale parallelepipedis, AM , NP , suis partibus simul sumptis, ergo parallelepipedum sub, DT , TH , æquatur parallelepipedis sub, DS , TH , & sub, ST , TH .

Sit nunc basis, TH , diuisa vtcumque in quocumque rectangula, TV , VP . Dico parallelepipedum sub, DT , TH , æquari parallelepipedis sub, DS , TV , sub, DS , VP , sub, ST , TV , & sub, ST , VP . Ducatur per rectam, QV , planum æquidistans planis,

Coroll. 6. *V*, in parallelepipedo, *A M*, rectan-
lib. 1. gulum, *E O*, & in parallelepipedo,

ro. Lib. 1.

N P, rectangulum, *R V*, per plan-
um igitur, *E V*, diuiduntur paral-
lelepipedo, *A M*, *N P*, in paralle-
lepipedo, *A R*, *B M*, *N Q*, *O P*, est
autem totum parallelepipedum, *A P*,
æquale parallelepipedis, *A R*, *B M*,
N Q, *O P*, & est parallelepipedum,
A R, sub, *D S*, *S O*, idest sub,
D S, *T V*, & parallelepipedum, *B M*,
sub, *E R*, *R G*, hoc est sub, *D S*,
Q H, & parallelepipedum, *N Q*,
est sub, *S T*, *T V*, & *O P*, est sub,
R Q, *Q H*, hoc est sub, *S T*, *Q H*,
ergo parallelepipedum, *A P*, idest
sub, *D T*, *T H*, est æquale paralle-
lepipedis sub, *D S*, & *T V*, & sub,
D S, *V P*, & sub, *S T*, *T V*, & sub,
S T, *Q H*, idest parallelepipedis sub
singulis partibus altitudinis, & singulis partibus basis contentis.



S C H O L I V M.

Contineri autem parallelepipedum uoco sub tribus rectis eiusdem
angulum solidum continentibus, quarum dua qualibet rectum
angulum constituunt, siue sub earum quavis, & parallelogrammo re-
ctangulo sub reliquis duabus; ita ut, cum dico parallelepipedum sub
tali recta linea, & tali rectangulo, siue sub talibus tribus rectis lineis,
intelligam illud parallelepipedum habere angulum solidum rectis an-
gulis constitutum, ueluti in istis Theorematis ipsum assumo, igitur
patet nos ex tribus rectis parallelepipedum continentibus quamlibet
posse pro altitudine sumere, & rectangulum sub reliquis duabus pro
basi.

THEOREMA XXXVI: PROPOS. XXXVI.

Si recta linea in vno puncto secta sit utcumq; parallelepi-
pedum sub tota linea, & quadrato vnus factarum parti-
tium erit æquale parallelepipedo sub tali parte, & rectan-
gulo

gulo totius in talem partem ducta. Idem autem parallelepipedum sub tota, & talis partis quadrato, erit æquale parallelepipedo sub reliqua, & quadrato talis partis, vna cum cubo eiusdem partis.

Sit ergo recta linea, $A C$, utcumque secta in, B , dico parallelepipedum sub, $A C$, & quadrato, $C B$, æquari parallelepipedo sub, $B C$, & rectangulo, $B C A$, hoc autem patet

ex superiori Scholio, nam parallelepipedum sub, $A C$, & quadrato, $C B$, continetur sub



tribus his rectis lineis, nempe, $A C$, & duabus, $C B$, & idcirco idem continetur sub, $C B$, & rectangulo, $A C B$, siue est æquale contento sub, $B C$, & rectangulo, $A C B$.

Dico insuper parallelepipedum sub, $A C$, & quadrato, $C B$, æquari parallelepipedo sub, $A B$, & quadrato, $C B$, vna cum cubo, $C B$, quod patet nam parallelepipedum sub diuisa altitudine, $A C$, & indiuisa basi, nempe quadrato, $C B$, æquatur parallelepipedis sub partibus singulis, & basi, scilicet sub, $A B$, & quadrato, $B C$, & sub, $B C$, & quadrato, $B C$, idest cubo, $B C$, quod erat ostendendum. Ex antec.

THEOREMA XXXVII. PROPOS. XXXVII.

SI recta linea in vno puncto secta sit utcumq; cubus totius æquabitur parallelepipedis sub partibus, & quadrato eiusdem. Idem etiam erit æquale parallelepipedis sub tota, & partibus quadrati totius per talem diuisionem factis, idest parallelepipedis sub tota, & quadratis partium, & rectangulo sub partibus bis contento.

Sit recta linea, $A C$, utcumq; secta in, B , dico cubum, $A C$, æquari parallelepipedis sub partibus, $A B$, $B C$, & quadrato totius, quod patet nam cubus, $A C$, idest parallelepipedum sub diuisa, $A C$, & indiuisa basi quadrato, $A C$, est æquale parallelepipedis sub partibus, $A B$, $B C$, eiusdem, $A C$, diuisæ, & sub eadem basi quadrato, $A C$. 35. huius.

Dico etiam cubum, $A C$, æquari parallelepipedis sub, $A C$, & quadrato, $A B$, quadrato, $B C$, & rectangulo bis sub, $A B C$, nam cubus, $A C$, idest parallelepipedum sub indiuisa altitudine, $A C$, & indiuisa basi in dicta quatuor spatia, æquatur parallelepipedis sub eadem indiuisa altitudine, $A C$, & sub dictis basis partibus, nempe sub quadrato, $A B$, quadrato, $B C$, & rectangulo bis sub, $A B C$, quod erat ostendendum. 35. huius.

C O R O L L A R I V M.

Hinc patet cubum totius, AC , æquari parallelepipedis sub singulis partibus ipsius, AC , & singulis partibus quadrati, AC , quod etiam patet ex Theoremate 35.

THEOREMA XXXVIII. PROPOS. XXXVIII.

Si recta linea in vno puncto secta sit utcumq; cubus totius æquatur cubis partium, vna cum parallelepipedis ter sub qualibet partium, & quadrato reliquæ. Vel æquatur cubis partium vna cum tribus parallelepipedis, sub tota, & eiusdem partibus contentis.

Sit recta linea, AC , utcumque secta in puncto, B . Dico cubum, AC , æquari cubis, AB , BC , & parallelepipedis ter sub, AB , & quadrato, BC , & ter sub, BC , & quadrato, AB . Nam parallelepipedum sub, AC , & quadrato, AC , (qui est cubus, AC), æquatur parallelepipedis sub singulis partibus ipsius, AC , & sub singulis partibus quadrati, AC , ab hac diuisione prouenientibus, idest parallelepipedo sub, AB , & quadrato, AB , qui est cubus, AB , item sub, AB , & quadrato, BC , item sub, AB , & rectangulo, ABC , bis, idest sub, CB , & quadrato, BA , bis sumpto, habemus ergo vnum cubum, AB , vnum parallelepipedum sub, AB , & quadrato, BC , & duo sub, BC , & quadrato, BA ; transeamus nunc ad aliam partem, BC , remanent ergo parallelepipedum sub, BC , & quadrato, BC , idest vnus cubus, BC , item sub, CB , & quadrato, AB , & tandem sub, CB , & rectangulo, CBA , bis, idest sub, AB , & quadrato, BC , bis, si igitur hæc posteriora parallelepipeda prioribus iunxeris habebis cubum, AB , cubum, BC , parallelepipedum ter sub, AB , & quadrato, BC , & ter sub, BC , & quadrato, BA , quibus æquale erit parallelepipedum sub, AC , & quadrato, CA , idest cubus, CA . Quia verò parallelepipedum sub, CB , & quadrato, BA , idest sub, AB , & rectangulo, ABC , cum parallelepipedo sub, AB , & quadrato, BC , idest sub, CB , & rectangulo, ABC , æquatur, ex 35. huius, parallelepipedo sub tota, AC , & partibus eiusdem, AB , BC , æqualia erunt, quod demonstrare propositum fuit.



SCHO-

S C H O L I V M.

Quoniam posterior pars Tropos. antec. addita fuit post impressionem Lib. 3. 4. & 5. idèdè ne mireris, benigne Lector, si in eisdem aliquando Propositiones offenderis nonnihil prolixiores, quam si per banc posteriorem partem fuissent demonstrate, cum illa ex priori parte tunc deductæ fuerint, quod solerti Geometræ haud difficile erit in illis propositionibus animadvertere, in quibus hanc viderit adhiberi.

THEOREMA XXXIX. PROPOS. XXXIX:

Si recta linea bifariam, & non bifariam secta fuerit, parallelepipedum sub medietate propositæ lineæ, & sub rectangulo inæqualibus partibus contento, cum parallelepipedo sub eadem medietate, & sub quadrato sectionibus intermediæ, æquabitur cubo eiusdem medietatis propositæ lineæ.

Sit recta linea, A E, bifariam diuisa in, B, non bifariam in C. Dico parallelepipedum sub, B E, & rectangulo, A C E, vna cum parallelepipedo sub, B E, & sub quadrato, B C, cubo eiusdem, B E, æquale esse; Nam rectangulum, A C E, cum quadrato, B C, quadrato, B E, est æquale, vt autem rectangulum, A C E, cum quadrato, B C, ad quadratum, B E, ita (sumpta communi altitudine, B E,) parallelepipedum sub, B E, & rectangulo, A C E, & sub, B E, & quadrato, B C, ad parallelepipedum sub, B E, & quadrato, B E, idest ad cubum, B E, ergo parallelepipedum sub, E B, & sub rectangulo, A C E, vna cum parallelepipedo sub eadem, E B, & sub quadrato, B C, erit æquale cubo, E B, quod ostendendum erat.

s. Secundi
Elem.
s. huius



THEOREMA XL. PROPOS. XL:

SI recta linea bifariam secta fuerit, & illi in directum adiuncta quævis recta linea; parallelepipedum sub composita ex dimidia propositæ, & ex adiuncta linea, & sub rectangulo sub composita ex tota, & adiuncta, & sub adiuncta, vna cum parallelepipedo sub composito ex eadem propositæ medietate, & ex adiuncta, & sub quadrato eiusdem medietatis, æquabitur cubo compositæ ex dicta medietate, & adiuncta.

Sit recta linea proposita, AC , bifariam in B , diuisa, cui in directum sit adiuncta utcumq; CE . Dico parallelepipedum sub BE , & rectangulo AEC , vna cum parallelepipedo sub BE , & quadrato BC , æquari cubo ipsius BE . Nam rectangulum AEC , cum quadrato CB , æquatur quadrato BE , igitur (sumpta communi altitudine BE ,) parallelepipedum sub BE , & rectangulo AEC , vna cum parallelepipedo sub BE , & quadrato BC , æquabitur parallelepipedo sub BE , & quadrato BE , idest cubo BE , quod erat ostendendum.

¶. Secūdi Elem.
¶. huius.

C O R O L L A R I V M.

EX methodo in superioribus demonstrationibus adhibita manifestum est nos similiter ceteras Propositiones secundi Elementorum demonstrare posse, in quibus linea secta in vno, vel pluribus punctis consideratur, ad parallelepipeda eadem traducentes, nam si super spatia in illis considerata intelligantur constitui æquæ alta parallelepipeda, erunt illa, ut ipse bases, propterea que ibi de basibus demonstrantur, de parallelepipedis æquè altis eisdem basibus insistentibus rectè colligi possunt, quæ ob claritatem, & facilitatem à me relinquuntur.

THEOREMA XLI. PROPOS. XLI.

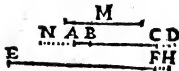
Parallelepipedum, quod sub tribus rectis lineis proportionalibus continetur, æquale est cubo mediæ.

Hæc manifesta est, nam habebunt bases ipsis altitudinibus reciprocas, quod etiam vniuersaliter ostenditur Vndecimo Elementorum Propos. 36.

THEOREMA XLII. PROPOS. XLII.

Data recta linea terminata, vtcumque in puncto diuisa, possibile est ipsam ad alteram eiusdem partium ita producere, vt cubus compositæ ex proposita linea, & adiuncta, sit æqualis cubo propositæ lineæ, simul cum cubo compositæ ex adiecta, & illi conterminante portione scilicet lineæ.

Sit data recta linea, A C, terminata, diuisaq; vtcumque in puncto, B, ostendendum est possibile esse ipsam ita producere ad alteram illius partium, vt ad, C, vt cubus compositæ ex, A C, & adiecta, sit æqualis cubo, A C, cum cubo compositæ ex eadem adiecta, & ex, B C, portione, A C, adiectæ conterminante. Producat ergo, C A, ad partes, A, vt in, N, ita quod, N B, sit tripla, B A, fiat deinde, vt, N B, ad, B C, ita quadratum, B C, ad quadratum rectæ lineæ, M, eorsum positæ: Vterius exponatur recta, E F, æqualis compositæ ex, A C, C B, cui applicetur rectangulum æquale quadrato, M, excedens figura quadrata, cuius latus sit, F H, producatur autem, A C, versus, C, vt in, D, ita nempe, vt, C D, sit æqualis, F H. Dico cubum totius, A D, æquari duobus cubis, A C, B D. Cum .n. sit, vt, N B, ad, B C, ita quadratum, B C,



39. Sex. lem.

ad quadratum, M, ideo parallelepipedum sub altitudine, A B, (quæ est, $\frac{1}{3}$ prædictæ altitudinis, N B,) & quadrato, M, æquabitur tertiæ parti cubi, B C. Quoniam verò quadratum, M, æquatur rectangulo, E H F, idest rectangulo sub composita ex, A D, B C, & sub, C D, ideo parallelepipedum sub altitudine, A B, & basi rectangulo sub composita ex, A D, B C, & sub, D C, æquabitur tertiæ parti cubi, B C, addatur commune parallelepipedum sub, B C, & basi rectangulo, B D C, erit ex vna parte hoc parallelepipedum cum, $\frac{1}{3}$ cubi, B C, ex alia verò hæc summa; scilicet parallelepipedum sub, A B, & sub rectangulo sub composita ex, A D, B C, & sub, D C, vna cum parallelepipedo sub, B C, & rectangulo, B D C, quæ quidem summa efficit parallelepipedum sub, A C, & rectangulo, A D C, iam

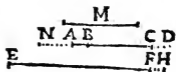
E. Coroll. Gen. 34. huius.

B b

.n. ha.

.n. habemus parallelepipedum sub, AB , & rectangulo, ADC , & sub, AB , & rectangulo, BCD , .i. sub, BC , & rectangulo sub, AB , CD , cui si iunxeris parallelepipedum sub, BC , & rectangulo sub, BD , DC , componetur parallelepipedum sub, BC , & rectangulo, ADC , quod additum parallelepipedo sub, AB , & eodem re-

35. huius. ctangulo, ADC , componet parallelepipedum sub, AC , & rectangulo, ADC , quod quidem æquale erit alteri tum in re predictæ, nempe parallelepipedo sub, BC , & rectangulo sub, BD , D



C , vna cum n , $\frac{1}{2}$, cubi, BC , ergo & eorum tripla æqualia erunt sci-

Schol. 35. licet parallelepipedum ter sub, AC , & rectangulo, ADC , seu ter

huius. sub, AD , & rectangulo, ACD , æquabitur parallelepipedo ter sub, BC , & rectangulo, BCD , seu ter sub, BD , & rectangulo, BCD ,

36. huius. cum cubo, BC , additis verò communibus cubis, AC , CD , fiet parallelepipedum ter sub, AD , & rectangulo, ACD , cum cubis, A

38. huius. C , CD , idest totus cubus, AD , æqualis parallelepipedo ter sub, B

D , & rectangulo, BCD , cum cubis, BC , CD , (quæ integrant cubum, BD ,) & cum cubo, AC , est igitur cubus, AD , æqualis duobus cubis, AC , BD . Possibile est ergo facere, quod propositum fuit.

C O R O L L A R I V M.

EX hoc manifestum est, si, AC , sit latus dati cubi, & sit etiã dâ-
tare ista linea, ut, AB , minor, AC , possibile esse inuenire duos
cubos, ut, AD , DB , ita ut eorum differentia sit æqualis cubo dato,
 AC , & laterum cubicorum, AD , DB , scilicet, AB , pariter diffe-
rentia sit data, est. n. cubus, AC , æqualis dicta cuborum, AD , DB ,
differentia, ut estensum est. Cum verò similia solida quæcunq; sint in
tripla ratione linearum, seu laterum homologorum eorundem, idem
erunt, ut cubi ipsarum linearum, seu laterum homologorum, & idem
eandem rationem, quam habet cubus, AD , ad cubum, DB , habebit
ex. gr. Icosædrum descriptum latere, AD , ad Icosædrum descriptum
latere, BD , prædicto homologo, & ut cubus, AD , ad cubum, AC ,
ita erit Icosædron, AD , ad Icosædron, AC , nec non colligendo, ut
cubus, AD , ad cubos, AC , BD , ita erit Icosædron, AD , ad Ico-
sædron, AC , BD , ergo Icosædron, AD , æquabitur Icosædron, AC ,
 BD , & superabit Icosædron, BD , Icosædron, AC , ergo si datum fuis-
set

set Icofacdram, *AC*, & *AB*, recta linea ipsius latere minor, non dissimiliter, ac in cubis inuenta essent Icofacdra, *AD*, *DB*, quorum differentia esset aequalis dato Icofacdro, *AC*, nec non eorumdem laterum homologorum differentia aequalis data recta linea, *AB*. Sic etiam data Sphæra Orbem data crassitici, minoris tamen illius semidiametro, æqualem possibile erit inuenire. Vniuersalissimè autem dato quocumq. solido, duorum ipsi dato similium differentiam æqualem possibile erit inuenire, quorum pariter linearum, seu laterum homologorum differentia sit data, dummodo ea sit minor linea, seu latere propositi solidi prædicti homologo, quod ex superius dictis faciliè constare potest.

SCHOLIUM.

Nonnulla autem ex præfatis proximis Propositionibus etiam ab alijs ostensa fuerunt, sed ne Lectori ad alios Libros pro harum captu esset recurrendum, hic eas adiungere placuit, præcipuè cum earum adductæ demonstrationes ab aliorum Auctorum rationibus, ni fallor, non parum sint differentes, cum serè omnes ex vnicâ Propos. 35. via satis compendiosa deductæ sint; quod olim me circa Propositiones Secundi Elem. à prima nempe vsq; ad 10. præstitisse memini, eas omnes ex prima compendiosissimè demonstrando, vt etiam postmodum, & Patrem Clauium fecisse animaduerti.

Finis Secundi Libri.



GEOMETRIÆ

CAVALERII

LIBER TERTIVS.

In quo de circulo, & Ellipsi, ac solidis ab eisdem genitis, traditur doctrina.



THEOREMA I. PROPOS. I.



Mnia quadrata portionis circuli, vel Ellipsis, ad omnia quadrata parallelogrammi in eadem basi, & altitudine cum portione constituti, regula basi, erunt, vt composita ex sexta parte axis, vel diametri eiusdem, & dimidia reliquæ portionis, ad axim, vel diametrum reliquæ portionis: Eadem verò ad omnia quadrata trianguli in iisdem existentis erunt, vt composita ex dimidia totius, & reliquæ portionis axi, vel diametro, ad axim, vel diametrum reliquæ portionis.

Sit circulus, vel ellipsis, $EDRP$, cuius axis, vel diameter, ER , ad quem ordinatim applicetur, DP , abscindens vtrumque portionem, DEP , quæ sumatur quoq; pro regula, & centrum sit, A , ac parallelogrammum, FP , in eadem basi, DP , cum portione, & eadem altitudine; sint autem primò, DF, PH , latera parallelogrammi, FP , parallela ipsi, ER . Dico ergo omnia quadrata portionis, DEP , ad omnia quadrata parallelogrammi, FP , esse, vt composita ex sexta parte, EB , & dimidia, BR , ad ipsam, BR . Sumatur
ergo

ergo intra, EB , utcumque punctum, C , & per, C , ducatur ipsi, DP , parallela, CM , secans guram circuli, vel ellipsis, $EDRP$, in, N ; Est igitur quadratum, BP , vel, MC , ad quadratum, CN , vt rectangulum, RBE , ad rectangulum, RCE ; est autem, EP , parallelogrammum in eadem basi, & altitudine, cum semiportione, EBP , regula est ipsa basis, &, CM , ducta utcumque parallela ipsi basi, repertumque est quadratum, CM , ad quadratum, CN , esse vt rectangulum, RBE , ad rectangulum, RCE , ergo magnitudines horum quatuor ordinum erunt proportionales. scilicet omnia quadrata parallelogrammi, EP , magnitudines primi ordinis collectæ, iuxta primam, nempe iuxta quadratum, CM , ad omnia quadrata semiportionis, EBP , magnitudines secundi ordinis collectas, iuxta secundam scilicet iuxta quadratum, CN , erunt vt rectangula sub maximis abscissarum, EB , & sub adiunctis, BR , magnitudines tertij ordinis collectæ, iuxta tertiam scilicet iuxta rectangulum, RBE , ad rectangula sub omnibus abscissis, EB , & residuis earundem, adiuncta, BR , (recti, vel obliqui transitus supradictis existentibus) quæ sunt magnitudines quarti ordinis collectæ, iuxta quartam scilicet iuxta rectangulum, RCE ; quoniam verò rectangula sub maximis abscissarum, EB , & sub adiunctis, BR , ad rectangula sub omnibus abscissis, EB , adiuncta, BR , & sub earum residuis, sunt vt, BR , ad compositam ex dimidia, BR , & sexta parte, EB , ergo conuertendo omnia quadrata semiportionis, EBP , ad omnia quadrata parallelogrammi, EP , vel istorum quadrupla scilicet omnia quadrata portionis, DEP , ad omnia quadrata parallelogrammi, FP , erunt vt composita ex, $\frac{1}{2}$, BE , &, $\frac{1}{3}$, BR , ad eandem, BR ; iungantur nunc, DE , EP .

Coroll. 3.
26. lib. 2.

Dico ulterius omnia quadrata portionis, EDP , ad omnia quadrata trianguli, DEP , esse vt composita ex dimidia totius, ER , & ipsa, BR , ad eandem, BR . Cum enim ostenderit omnia quadrata parallelogrammi, FP , ad omnia quadrata portionis, DEP , esse

Cor. 30.
lib. 2.

8. lib. 2.



esse vt, BR, ad compositam ex, $\frac{1}{2}$, BR, & $\frac{1}{2}$, BE, idè omnia quadrata trianguli, DEP, cum sint, $\frac{1}{2}$, omnium quadratorum parallelogrammi, FP, erunt ad omnia quadrata portionis, DEP, vt, $\frac{1}{2}$, RB, ad compositam ex, $\frac{1}{2}$, RB, & $\frac{1}{2}$, BE, idest vt tota, RB, ad compositam ex, $\frac{1}{2}$, RB, & $\frac{1}{2}$, BE, sed, $\frac{1}{2}$, RB, .f. $\frac{1}{2}$, RB, cum, $\frac{1}{2}$, BE, constituunt, $\frac{1}{2}$, integre, ER, scilicet, $\frac{1}{2}$, eiusdem, ER, què idè cum, $\frac{1}{2}$, ipsius, BR, .f. cum, BR, ad ipsam, BR, erit, vt omnia quadrata (conuertendo) portionis, DEP, ad omnia quadrata trianguli, DEP.

Quoniam verò, si in parallelogrammi, vel trianguli dicti, basi, D. 9. Lib. 1. P, sit parallelogrammum, vel triangulum, & in eadem altitudine, per B. Co omnia quadrata dictorum parallelogrammorum inter se aquantur, roll. 22a sicut etiam omnia quadrata triangulorum, regula eorundem basi, lib. 2. idè ostensum est omnia quadrata portionis, DEP, ad omnia quadrata parallelogrammi in eadem basi, & altitudine cum ipsa constituti esse, vt composita ex, $\frac{1}{2}$, BE, & $\frac{1}{2}$, BR, ad eandem, BR, ad omnia verò quadrata trianguli in ipsdem positi, vt composita ex, B R, & dimidia, RE, ad ipsam, BR, quod ostendere opus erat.

COROLLARIUM.

HINC patet in figura, in qua basis portionis constituta per centrum circuli, vel ellipsis transeat, quoniam omnia quadrata parallelogrammi, FP, ad omnia quadrata portionis, DEP, sunt vt, AR, ad compositam ex, $\frac{1}{2}$, AR, & $\frac{1}{2}$, AE, scilicet, $\frac{1}{2}$, AR, quia, EA, est aequalis ipsi, AR, $\frac{1}{2}$, AR, autem, & $\frac{1}{2}$, AR, constituunt, $\frac{1}{2}$, vel, $\frac{1}{2}$, ipsius, AR, idè omnia quadrata parallelogrammi, FP, esse ad omnia quadrata portionis, DEP, vt, AR, ad, $\frac{1}{2}$, AR, idest esse eorundem sexquialtera; quia verò omnia quadrata trianguli, DEP, 24. Lib. 1. sunt, $\frac{1}{2}$, omnium quadratorum parallelogrammi, FP, idè omnia quadrata trianguli, DEP, ad omnia quadrata portionis, DEP, sunt vt 1. ad 2. & conuertendo omnia quadrata portionis, DEP, sunt dupla omnium quadratorum trianguli, DEP, & sub sexquialtera omnium quadratorum parallelogrammi, FP, dummodo in eadem basi, & altitudine cum portione sint constituti parallelogrammum, & triangulum, vt paulò supra in fine demonstrationis subiunximus.

THEOREMA II. PROPOS. II.

Si à circulo, vel ellipsi per lineam ad eorum axim, vel diametrum ordinatim applicatam utcumque portio abscindatur, sit autem parallelogrammum in eadem altitudine cum dicta portione, sed in basi æquali secundæ diametro, & regula basis ipsius portionis; Omnia quadrata dicti parallelogrammi ad omnia quadrata dictæ portionis erunt, ut rectangulum sub dimidia eiusdem axis, vel diametri, & sub eiusdem dimidiæ tripla, ad rectangulum sub axi, vel diametro abscissæ portionis, & sub composita ex axe, vel diametro reliquæ portionis, & dimidia totius axis, vel diametri.

Sit igitur circulus, vel ellipsis, $BVOR$, eius axis, vel diameter, BO , ordinatim ad ipsum applicata, VR , utcumq; abscindens portionem, VB , sit verò secunda diameter, CF , & producta, VR , ita ut, PN , sit æqualis ipsi, CP ; & PM , ipsi, CA , in basi, PN , & altitudine portionis, VB , sit parallelogrammum, DN , & circa axim, vel diametrum, BM . Dico ergo omnia quadrata parallelogrammi, DN , regula, VR , ad omnia quadrata portionis, VB , esse ut rectangulum sub, BA , & tripla, AO , ad rectangulum sub, BM , & sub composita ex, MO , OA ; iungantur, VB , PB ; Omnia ergo quadrata semiportionis, $BCVM$, ad omnia quadrata trianguli, BVM , sunt ut, AO , OM , ad, OM , i. sumpta, BM , communi altitudine, ut rectangulum sub, BM , MOA , ad rectangulum, BMO , omnia autem quadrata trianguli, BVM , ad omnia quadrata trianguli, BPM , sunt ut quadratum, VM , ad quadratum, PM , vel ad quadratum, CA , i. ut rectangulum, OMB , ad rectangulum, OAB , ergo ex æquali, & convertendo omnia quadrata trianguli, BPM , ad omnia quadrata semiportionis, BVM , erunt ut rectangulum, BAO , ad rectangulum sub, BM , & MOA , & antecedentium tripla i. omnia quadrata parallelogrammi, DN , ad omnia quadrata semiportionis, BVM , vel omnia quadrata parallelogrammi, DN , ad omnia quadrata portionis, VB , erunt ut rectangulum sub, BA , & tripla, AO ,



Ex aut.

j. Lib. 2.

Per B. Co.
rollar. 22.
lib. 2.Ex 40. li.
& eiusdē
Scholio.

24. Lib. 2.

8. Lib. 2.

ad

ad rectangulum sub $B M$, & $M O A$, quod verum esse ostendetur, vt in antecedente, etiam si parallelogrammum, $D N$, non sit circa axim, vel diametrum, $B M$, vnde patet, &c.

THEOREMA III. PROPOS. III.

SI intra circulum, vel ellipsim, duæ ad axim, vel diametrum ordinatim applicentur rectæ lineæ, sit autem parallelogrammum, & triangulum in eadem altitudine cum portione inter applicatas conclusa, sed in basi altera applicatarum: Omnia quadrata dicti parallelogrammi ad omnia quadrata conclusæ portionis (regula basi) erunt, vt rectangulum sub partibus axis, vel diametri per basim constitutis ad rectangulum sub abscissa per basim ab extremitate axis, vel diametri, & sub composita ex medietate portionis axis, vel diametri eisdem applicatis intermediæ, & abscissa per aliam applicatam ab eiusdem extremitate, vna cum rectangulo sub eadem intermediâ, & sub composita ex, $\frac{1}{2}$, eiusdem, & $\frac{1}{2}$, abscissæ per eandem applicatam ab eiusdem extremitate: Omnia verò quadrata inclusæ portionis ad omnia quadrata dicti trianguli erunt, vt rectangulum sub composita ex abscissis ab axi, vel diametro per ordinatim applicatas versus terminum, cui basis propinquior est, & sub sexquialtera abscissæ ab alio extremo per applicatam, quæ non est basis, vna cum rectangulo sub huius reliqua, & sub dupla abscissæ per basim ab extremo, cui ipsa basis propinquior est, ad rectangulum sub partibus axis, vel diametri per basim constitutis.

Sit ergo circulus, vel ellipsis, $A C D F$, centrum, O , axis, vel diameter, $A D$, duæ ad ipsam ordinatim applicatæ sint, $I S$, $C F$, intercipientes portionem, $I C F S$, sit autem parallelogrammum, $B F$, in basi vtrauis applicatarum, vt in, $C F$, & eadem altitudine cum fructo, $C I S F$, sit etiam nunc circa axim, vel diametrum, $M R$, regula verò, $C F$; Dico ergo omnia quadrata parallelogrammi, $B F$, ad omnia quadrata portionis, $I C F S$, esse vt rectangulum, $D R A$, ad rectangulum



C c

lum

lum sub, DR , & sub composita ex, $\frac{1}{2}$, RM , & ex, MA , vna cum
 rectangulo sub, RM , & sub composita ex, $\frac{1}{2}$, RM , & $\frac{1}{2}$, MA . Su-
 matur in, MR , vtcunque punctum, T , per quod agatur ipsi, CF ,
 parallela, TX , secans curuam, SF , in, V , erit ergo quadratum, R
 F , vel quadratum, TV , ad quadratum, TX , vt rectangulum, D
 RA , ad rectangulum, DTA ; & quoniam, MF , est parallelogram-
 urum in eadem basi, RF , & altitudinis cum semiportione, $MRFS$
 S , &, TX , ducta fuit vtcunque parallela
 ipsi, RF , repertumque est quadratum, T
 V , ad quadratum, TX , esse vt rectangu-

Coroll. 3.
26. Lib. 2.
 structis quatuor magnitudinum ordinibus,
 vt in antecedente, coclademus omnia qua-
 drata parallelogrammi, MF ; ad omnia
 quadrata semiportionis, $MRFS$, esse vt
 rectangula, DRA , tot, quot sunt omnes
 abscissæ ipsius, MR , ad rectangula sub re-
 siduis omnium abscissarum, MR , adiun-

Cor. 32.
lib. 2.
2. Lib. 1.
 ctæ, RD , & sub omnibus abscissis, MR , adiuncta, MA ; quia ve-
 rō, DA , diuisa est vtcumque in duobus punctis, R , M , rectangula
 sub, DRA , tot, quot sunt omnes abscissæ, RM , ad rectangula sub
 residuis omnium abscissarum, MR , adiuncta, RD , & sub omnibus
 abscissis, MR , adiuncta, MA , sunt vt rectangulum, DRA , ad re-
 ctangulum sub, DR , & sub composita ex, $\frac{1}{2}$, RM , & MA , vna
 cum rectangulo sub, RM , & sub composita ex, $\frac{1}{2}$, RM , & $\frac{1}{2}$, MA ,
 ergo omnia quadrata parallelogrammi, MF , ad omnia quadrata
 semiportionis, $MRFS$, vel omnia quadrata parallelogrammi, BF ,
 ad omnia quadrata portionis, $ICFS$, erunt vt rectangulum, DR
 A , ad rectangulum sub, DR , & sub composita ex, $\frac{1}{2}$, MR , & ex,
 MA , vna cum rectangulo sub, RM , & sub composita ex, $\frac{1}{2}$, RM ,
 & $\frac{1}{2}$, MA .

Iungantur nunc, CM , MF . Dico insuper omnia quadrata por-
 tionis, $ICFS$, ad omnia quadrata trianguli, $MCFF$, esse vt rectan-
 gulum sub composita ex, MD , DR , & sub sexquialtera, MA , vna
 cum rectangulo sub composita ex, MD , & dupla, DR , & sub, $\frac{1}{2}$,
 MR , ad rectangulum, DRA ; omnia.n. quadrata parallelogram-
 mi, BF , ad omnia quadrata portionis, $ICFS$, ostensa sunt esse vt
 rectangulum, DRA , ad rectangulum sub, DR , & sub composita
 ex, $\frac{1}{2}$, RM , & ex, MA , vna cum rectangulo sub, RM , & sub com-
 posita ex, $\frac{1}{2}$, RM , & $\frac{1}{2}$, MA , ergo eorum tertia pars ad eadem conse-
 quentia erunt vt tertia pars rectanguli, DRA , ad eadem conse-
 quentia rectangula. s. vt integrum rectangulum, DRA , ad illa re-
 ctan-



angula triplicata , rectangulum autem sub , D R , & sub compo-
 sita ex , $\frac{1}{2}$, R M , & , M A , diuiditur in rectangula sub , D R , & , $\frac{1}{2}$, R 1. elem.
 M , & sub , D R , & , M A , triplicetur rectangulum sub , D R , & ,
 $\frac{1}{2}$, R M , fit rectangulum sub tripla , D R , & sub , $\frac{1}{2}$, R M , cui si ad-
 datur rectangulum sub , M R , & , $\frac{1}{2}$, R M , fit rectangulum sub compo-
 sita ex tripla , R D , & ex , R M , .i. sub composita ex , M D , &
 dupla , R D , & sub , $\frac{1}{2}$, R M , quod serua : Remanent rectangula ad-
 huc sub , D R , M A , & sub , M R , & , $\frac{1}{2}$, M A , triplicanda , quod 7. Lib. 2.
 sic fiet ; rectangulum sub , D R , M A , æquatur rectangulo sub dupla ,
 D R , & , $\frac{1}{2}$, M A , cui si addatur rectangulum sub , $\frac{1}{2}$, M A , & sub ,
 M R , fiet rectangulum sub , $\frac{1}{2}$, M A , & sub composita ex , M R , &
 dupla , R D , .i. sub composita ex , M D , D R , quod triplicatum fit 8. elem.
 rectangulum sub composita ex , M D , D R , & sub sexquialtera , M
 A , quod simul cum rectangulo sub composita ex , M D , & dupla , D
 R , & sub , $\frac{1}{2}$, M R , ad rectangulum , D R A , conuertendo , habe-
 bit eandem rationem , quam omnia quadrata portionis , I C F S , ad
 omnia quadrata trianguli , C M F ; quod etiam verificabitur , si di-
 & um parallelogrammum , & triangulum , sint quidem in eadem basi
 cum portione , sed non circa eundem axim , vel diametrum cum ea-
 dem portione , vt supra patere potest in antecedentibus , quod erat
 ostendendum . Ex 9. & 2.
Coroll.
22. lib. 2.

THEOREMA IV. PROPOS. IV.

IN eadem antecedentis figura si parallelogrammum sit
 quidem in eadem altitudine cum portione , sed in basi æ-
 quali secundæ diametro ; omnia quadrata dicti parallelo-
 grammi ad omnia quadrata dictæ portionis erunt , vt quadra-
 tum dimidij axis , vel diametri eorundem ad eadem conse-
 quentia rectangula , retenta eadem regula .

Exponatur denuò antecessentis figura ,
 & producat , C F , ita vt , V X , sit æqua-
 lis secundæ diametro , quæ sit , E H , &
 V R , æqualis , R X , & in , V X , basi sit
 constructum parallelogrammum , G X ,
 in altitudine eadem cum portione , I C F
 S , sit etiam circa eandem axim , vel dia-
 metrum , M R , cum portione , I E C F H
 S : Omnia ergo quadrata parallelogram-
 mi , G R , ad omnia quadrata parallelogrammi , B R , (regula , C F)



9. Lib. 2.

Ex 40.11. sunt vt quadratum, V R, ad quadratum, C R, .f. vt rectangulum,
& eiusdē A O D, vel quadratum, A O, ad rectangulum, D R A, omnia au-
Scholio. tem quadrata parallelogrammi, B R, ad omnia quadrata semipor-
tionis, I C R M, sunt vt rectangulum, D

R A, ad rectangulum sub, D R, & sub
composita ex, $\frac{1}{2}$, R M, & ex, M A, vna
cum rectangulo sub, R M, & sub com-

posita ex, $\frac{1}{2}$, R M, & $\frac{1}{2}$, M A, ergo ex
Ex antec. æquali omnia quadrata parallelogram-
mi, G R, ad omnia quadrata semipor-
tionis, I C R M, vel omnia quadrata paral-
lelogrammi, G X, ad omnia quadrata
portionis, I C F S, erunt vt quadratum,

Ex 9.&B. A O, ad rectangulum sub, D R, & sub composita ex, $\frac{1}{2}$, R M, &
Cor. 21. ex, M A, vna cum rectangulo sub, R M, & sub composita ex, $\frac{1}{2}$, R
lib. 4. M, & $\frac{1}{2}$, M A; quod etiam patet, si parallelogrammum, G X, non
fit circa axim, vel diametrum, M R, quod erat ostendum.

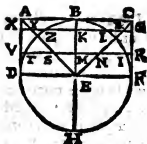


THEOREMA V. PROPOS. V.

SI in circulo, vel ellipsi ducantur coniugati axes, vel dia-
metri, in altera autem eorundem sit tamquam in basi pa-
rallelogrammum circa eundem axim, vel diametrum cum cir-
culo, vel ellipsi, circa quæm sit etiam triangulus, sed in basi
opposita basi parallelogrammi, sumatur autem in dicta axi,
vel diametro vtcunq; punctum, per quod basibus dictis aga-
tur parallela; quadratum eiusdem parallelæ trianguli lateri-
bus interceptæ æquabitur reliquo quadrati eius, quæ inter-
cipitur lateribus parallelogrammi, dempto quadrato eius,
quæ intra circulum, vel ellipsim concludetur.

Sit circulus, vel ellipsis, B D H F, eius coniugati axes, vel diame-
tri, B H, D F, in altera autem earum, vt in, D F, tanquam in basi,
& circa axim, vel diametrum, B E, sit parallelogrammum, A F, cir-
ca eundem verò, sed in basi, A C, sit triangulum, A E C, sumatur
autem in, B E, vtcunque punctum, M, per quod ipsi, D F, agatur
parallela, V R, secans curuam, D B F, in, T, I, & latera trianguli,
A E C, in, S, N. Dico ergo quadratum, S N, æquari reliquo qua-
drati, V R, dempto quadrato, T I. Nam rectangulum, H E B, ad
rectangulum, H M B, est vt quadratum, F E, vel quadratum, R M,
ad

ad quadratum, $I M$, ergo per conuersionem rationis rectangulum, $H E B$, i. quadratum, $B E$, ad quadratum, $M E$, (quod est excessus. rectanguli, $H E B$, sub rectangulum, $H M B$,) erit ut quadratum, $R M$, ad sui reliquum, dempto quadrato, $M I$, sed ut quadratum, $B E$, ad quadratum, $E M$, ita quadratum, $B C$, idest quadratum, $M R$, ad quadratum, $M N$, quia triangula, $B E C$, $M E N$, sunt æquiangula, ergo quadratum, $B C$, idest quadratum, $M R$, ad quadratum, $M N$, erit ut idem quadratum, $M R$, ad sui reliquum, dempto quadrato, $M I$, & eorum quadrupla. s. quadratum, $S N$, æquabitur reliquo quadrati, $V R$, dempto quadrato, $T I$, quod erat ostendendum.



Ex 4. 1. 1.
& ex eius
Scholio.

6.2. elem.

4.6. elem.

C O R O L L A R I V M.

QUONIAM autem punctum, M , sumptum est utcumque hinc patet, quod omnia quadrata trianguli, $A E C$, (regula, $D F$,) æquantur reliquo omnium quadratorum parallelogrammi, $A F$, demptis omnibus quadratis semicirculi, vel semiellipsis, $D B F$, & duabus utcumq; ductis ipsis, $D F$, parallelis, ut, $X G$, $V R$, patet, quod omnia quadrata trapezium, $T S N R$, æquabuntur residuo omnium quadratorum parallelogrammi, $X R$, demptis omnibus quadratis portionis semicirculi, vel semiellipsis inter, $Z L$, $T I$, conclusa: Quia verò ostensa est ratio omnium quadratorum cuiusvis parallelogrammorum in altitudine eadem cum portionibus, basi autem equali secunda diametre, 24. & 28. ad omnia quadrata trapeziorum, vel triangulorum in iisdem existentium, hinc manifesta est ratio eorundem ad dicta residua, & consequenter ad omnia quadrata portionum semicirculi, vel semiellipsis, $D B F$, dictis parallelis interpositarum, ut ex gr. nota erit ratio, quam habent omnia quadrata parallelogrammi, $X R$, ad omnia quadrata portionis, $Z T I L$, & sic in reliquis. Quia verò omnia quadrata trianguli, $A E C$, ad omnia quadrata trianguli, $S E N$, sunt in tripla ratione ipsius, $B E$, ad, $E M$, idem etiam parebit, quod omnia quadrata parallelogrammi, $A F$, demptis omnibus quadratis semicirculi, vel semiellipsis, $D B F$, ad omnia quadrata parallelogrammi, $V F$, demptis omnibus quadratis frusti, $T D F R$, sint in tripla ratione ipsius, $B E$, ad, $E M$, idest ut cubus, $B E$, ad cubum, $E M$.

lib. 2.

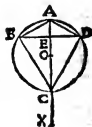
F. Cor. 2.
lib. 2.

THEO.

THEOREMA VI. PROPOS. VI.

SI in circulo, vel ellipsi ad axim, vel diametrum eiusdem ordinatim applicetur utcumque recta linea, quæ sumatur pro regula; Omnia quadrata eiusdem ad omnia quadrata alterutrius portionis per eam constitutæ, erunt ut parallelepipedum sub quadrato totius axis, vel diametri, altitudine eiusdem dimidia, ad parallelepipedum sub quadrato assumptæ portionis, altitudine autem linea composita ex reliquæ portionis axi, vel diametro, & dimidia totius: Vel erunt, ut cubus totius axis, vel diametri ad parallelepipedum sub quadrato assumptæ portionis axis, vel diametri, & sub altitudine linea composita ex tripla axis, vel diametri reliquæ portionis, cum cubo axis, vel diametri reliquæ portionis.

Sit circulus, vel ellipsis, $A B C D$, cuius axis, vel diameter, $A C$, eentrum, O , & ordinatim utcumq; ad ipsam applicata, $B D$, constituens duas portiones, $B A D$, $B C D$; quæ quoque sit regula. Dico ergo omnia quadrata circuli, vel ellipsis, $A B C D$, ad omnia quadrata portionis, $B A D$, ex duabus portionibus, $B A D$, $B C D$, ad libitum sumptæ, esse, ut parallelepipedum sub basi quadrato, $A C$, altitudine, CO , vel, $C X$, quæ sit æqualis, CO , & illi in directum constituta, ad parallelepipedum sub basi quadrato, $A E$, altitudine, $E X$, vel ut cubus, $A C$, ad parallelepipedum sub basi quadrato, $A E$, altitudine tripla. $E C$, cum cubo, $A E$; iungantur; $B A$, $A D$, $B C$, $C D$: Omnia ergo quadrata portionis, $B C D$, ad omnia quadrata portionis, $B A D$, habent rationem compositam ex ea, quam habent omnia quadrata portionis, $B C D$, ad omnia quadrata trianguli, $B C D$, & ex ea, quam habent hæc ad omnia quadrata trianguli, $B A D$, & ex ratione istorum ad omnia quadrata portionis, $B A D$: Omnia verò quadrata portionis, $B C D$, ad omnia quadrata trianguli, $B C D$, sunt ut composita ex, $O A$, $A E$, ad, $A E$: Omnia item quadrata trianguli, $B C D$, ad omnia quadrata trianguli, $B A D$, (quia trianguli sunt in eadem basi, $B D$,) sunt ut, $C E$, ad, $E A$: Omnia denique qua-



Diff. 1a.
lib. 1.

1. huius.

Per C. Co
rollar. 2a.
lib. 2.

quadrata trianguli, $BA D$, ad omnia quadrata portionis, $BA D$, sunt vt, $E C$, ad compositam ex, $E C$, $C O$; harum autem trium rationum componentium rationem supradictam illam, quam habet, $C E$, ad, $E A$, &, $C B$, ad, $E C O$, componit rationem quadrati, $C E$, ad rectangulum sub, $A E$, & sub, $E C O$, habemus ergo illas tres rationes in has duas resolutas scilicet in eam, quam habet quadratum, $E C$, ad rectangulum sub, $A E$, &, $E C O$, & in eam, quam habet composita ex, $O A$, $A E$, ad, $A E$, ratio autem in quadrato, $E C$, ad rectangulum sub, $A E$, &, $E C O$, & ratio ipsius, $O A E$, sumptæ pro altitudine ad, $A E$, pariter pro altitudine sumptam, componunt rationem parallelepipedum sub basi quadrato, $C E$, altitudine autem, $E A$ Per D. Co
 O , ad parallelepipedum sub basi quadrato, $A E$, altitudine autem, E rollar. 4.
 $C O$, quod serua. Gen. 34.
 lib. 2.

Duplicentur nunc horum parallelepipedorum altitudines, omnia ergo quadrata portionis, $B C D$, ad omnia quadrata portionis, $B A D$, erunt vt parallelepipedum sub quadrato, $E C$, altitudine vero dupla, $E A$, & dupla, $A O$, quæ est, $A C$, ad parallelepipedum sub basi quadrato, $A E$, altitudine dupla, $E C$, & dupla, $C O$, quæ est, $A C$; parallelepipedum autem sub quadrato, $C E$, & sub composita ex dupla, $A E$, &, $A C$, æquatur parallelepipedis sub quadrato, $C E$, & sub, $A E$, bis, vna cum parallelepipedo sub, $A C$, & sub quadrato, $C E$, idest vna cum parallelepipedo sub, $A E$, adhuc semel, & sub quadrato, $E C$, cum cubo, $E C$, quæ simul cum prædictis conficiunt parallelepipedum ter sub, $A E$, & sub quadrato, $E C$, cum cubo ipsius, $E C$: Similiter ostendimus parallelepipedum sub quadrato, $A E$, & sub composita ex, $C A$, & dupla, $C E$, æquari parallelepipedis ter sub, $C E$, & sub quadrato, $E A$, cum cubo, $E A$, ergo omnia quadrata portionis, $B C D$, ad omnia quadrata portionis, $B A D$, erunt vt parallelepipedum ter sub quadrato, $C E$, altitudine, $E A$, cum cubo, $C E$, ad parallelepipedum ter sub quadrato, $A E$, altitudine, $E C$, cum cubo, $A E$, ergo, componendo, omnia quadrata circuli, vel ellipsis, $A B C D$, ad omnia quadrata portionis, $B A D$, erunt vt parallelepipedum ter sub altitudine, $A E$, & quadrato, $E C$, cum cubo, $E C$, simul cum parallelepipedo ter sub altitudine, $C E$, & sub quadrato, $E A$, cum cubo, $E A$, ad parallelepipedum ter sub quadrato, $A E$, altitudine, $E C$, cum cubo, $A E$, illa autem simul sumpta conficiunt cubum, $A C$, ergo omnia quadrata circuli, vel ellipsis, $A B C D$, ad omnia quadrata portionis, $B A D$, erunt vt cubus, $A C$, ad parallelepipedum sub basi quadrato, $A E$, altitudine linea composita ex dupla, $E C$, & ex, $A C$, ergo (dimidiatis huius rationis terminis) omnia quadrata circuli, vel ellipsis, $A B C D$, ad omnia quadrata portionis, $B A D$, erunt vt parallelepipedum

Per C. Co
rollar. 4
Gen. 34.
lib. 2.

pedum sub basi quadrato, AC , altitudine, CO , vel, CX , (quod est dimidium cubi, AC .) ad parallelepipedum sub basi quadrato, AE , altitudine, EX , (quæ est dimidia altitudinis parallelepipedum sub basi quadrato, AE ; altitudine dupla, EC ; & ipsa, CA , simul) patet ergo, quod omnia quadrata circuli, vel ellipsis, $ABCD$, ad omnia quadrata portionis, BAD , erunt ut parallelepipedum sub basi quadrato, AC , altitudine, CX , ad parallelepipedum sub basi quadrato, AE , altitudine, EX , vel (ut probauimus) ut cubus, AC , ad parallelepipedum sub basi quadrato, AE , altitudine linea composita ex dupla, EC , & ex, AC , .i. ad parallelepipedum sub basi quadrato, AE , altitudine tripla, EC , cum cubo, AE , quæ erant demonstranda.

C O R O L L A R I V M.

Hinc etiam patet portionis, BCD , omnia quadrata ad omnia quadrata portionis, BAD , esse ut parallelepipedum sub basi quadrato, CE , altitudine autem, EO , ad parallelepipedum sub basi quadrato, AE , altitudine autem, EO , patet ergo si circulus, vel ellipsis per applicatam ad eorum axim, vel diametrum in duas portiones utcumque diuidantur, quæque sumatur pro regula, quod nota erit ratio omnium quadratorum utriusque portionis inter se.

T H E O R E M A V I I . P R O P O S . V I I .

SI in circulo, vel ellipsi duæ ad eundem axim, vel diametrum ordinatim applicentur rectæ lineæ; Omnia quadrata vnus portionis (regula basi) ad omnia quadrata alterius portionis erunt, ut parallelepipedum sub basi quadrato axis, vel diametri illius, & sub composita ex axi, vel diametro reliquæ portionis, & dimidia totius, ad parallelepipedum sub basi quadrato axis, vel diametri alterius portionis, & sub composita ex axi, vel diametro reliquæ portionis, & dimidia totius.

Sit circulus, vel ellipsis, $ACND$, cuius axis, vel diameter, AN ; centrum, O , duæ ad ipsum utcumque ordinatim applicatæ sint, BF , CD , sit autem producta, AN , in, X , ita ut, XN , sit æqualis, NO ; regula vero alterutra applicatarum, ut, CD . Dico ergo omnia quadrata portionis, BAF , ad omnia quadrata portionis, CAD , esse.

esse, vt parallelepipedum sub basi quadrato, $A E$, altitudine autem, $E X$, ad parallelepipedum sub basi quadrato, $A M$, altitudine, $M X$. Nam omnia quadrata portionis, $B A F$, ad omnia quadrata circuli, vel ellipsis, $A C N D$, sunt vt parallelepipedum sub basi quadrato, $A E$, altitudine, $E X$, ad parallelepipedum sub basi quadrato, $A N$, altitudine, $N X$, item omnia quadrata circuli, vel ellipsis, $A C N D$, ad omnia quadrata portionis, $C A D$, sunt vt parallelepipedum sub basi quadrato, $A N$, altitudine, $N X$, ad parallelepipedum sub basi quadrato, $A M$, altitudine, $M X$, ergo ex æquali omnia quadrata portionis, $B A F$, ad omnia quadrata portionis, $C A D$, erunt vt parallelepipedum sub basi quadrato, $A E$, altitudine, $E X$, ad parallelepipedum sub basi quadrato, $A M$, altitudine, $M X$, quod erat ostendendum.



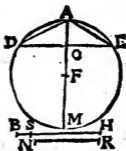
Ex antec.

Ex antec.

PROBLEMA I. PROPOS. VIII.

A Dato circulo, vel ellipsi portionem abscindere per lineam ad eiusdem axim, vel diametrum ordinatim applicatam; cuius omnia quadrata ad omnia quadrata trianguli in eadem basi, & altitudine cum ipsa portione, habeant rationem datam; oportet autem hanc esse maiorem sexquialtera, existente regula ipsa ordinatim applicata.

Sit circulus, vel ellipsis, $A D M E$, axis, vel diameter, $A M$, centrum, F , oportet igitur ad ipsum axim, vel diametrum, lineam ordinatim applicare, quæ ab ipso circulo, vel ellipsi abscindat, portionem, cuius omnia quadrata (regula ipsa applicata) ad omnia quadrata trianguli in eadem basi, & altitudine cum ipsa habeant rationem datam; hanc dico prius oportere esse maiorem sexquialtera, nam cuiuslibet abscissæ portionis (vt ostentum est) omnia quadrata ad omnia quadrata trianguli in eadem basi, & altitudine cum ipsa sunt, vt composita ex dimidia totius axis, vel diametri, & ex diametro reliquæ portionis, ad axim, vel diametrum reliquæ portionis, & dividendo excessus omnium quadratorum

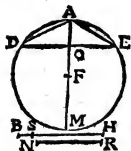


1. Huius.

D d

di-

dictæ portionis super omnia quadrata dicti trianguli, ad omnia quadrata dicti trianguli, sunt vt d. midia totius axis, vel diametri ad axim, vel diametrum reliquæ portionis, oportet ergo, quod dicta ratio diuisa sit maior ea, quam habet, FM , ad, MA , quæ componendo euadit sexquialtera: sit ergo data ratio, quam habet, BH , ad, NR , maior sexquialtera, & abscindatur, HS , æqualis ipsi, NR , & fiat, vt, BS , ad, SH , ita, FM , ad, MO , & ducatur per, O , ipsa, DE , ad axim, vel diametrum, AM , ordinatim applicata, & iungantur, DA , AE ; quoniam ergo, vt, BS , ad, SH , ita est, FM , ad, MO , componendo, BH , ad, HS , vel, NR ,

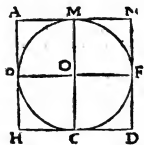


erit, vt, FM , MO , ad, MO , sunt autem omnia quadrata portionis, DAE , (regula, DE ,) ad omnia quadrata trianguli, DAE , vt, FM , MO , ad, MO , & ideo sunt ad ea in ratione data, in ea. ſ. quam habet, BH , ad, NR , quod efficere opus erat.

THEOREMA VIII. PROPOS. IX.

Omnia quadrata circuli, vel ellipsis, regula altero axium, vel diametrorum, ad omnia quadrata eiusdem, regula reliquo axium, vel diametrorum, erunt, vt dictus primus axis, vel diameter, ad dictum secundum axim, vel diametrum.

Sit circulus, vel ellipsis, $MPCF$, cuius axes, vel diametri coniugati, MC , PF . Dico ergo omnia quadrata circuli, vel ellipsis, MP , CF , regula, MC , ad omnia quadrata eiusdem, regula, PF , esse, vt, MC , ad, PF ; ducantur per puncta, M , P , C , F , tangentes circulum, vel ellipsim, $MPCF$, quæ sint, AN , ND , DH , HA , constituentes parallelogrammum, AD , circulo, vel ellipsi, $MPCF$, circumscriptum, cuius latera parallela sint ipsis, PF , MC , axibus, vel diametris coniugatis: Omnia ergo quadrata circuli, vel ellipsis, $MPCF$, regula, MC , sunt sexquialtera



tera

tera omnium quadratorum parallelogrammi, $A D$, regula eadem, $M C$, omnia verò quadrata eiusdem circuli, vel ellipsis, regula, $P F$, sunt subsexquialtera omnium quadratorum parallelogrammi, $A D$, regula eadem, $P F$, ergo omnia quadrata circuli, vel ellipsis, $M P C F$, regula, $M C$, ad omnia quadrata eiusdem regula, $P F$, erunt, vt omnia quadrata parallelogrammi, $A D$, regula, $M C$, ad omnia quadrata eiusdem, regula, $P F$, sed omnia quadrata parallelogrammi, $A D$, regula, $M C$, ad omnia quadrata eiusdem, regula, $P F$, sunt, vt, $M C$, ad, $P F$, ergo omnia quadrata circuli, vel ellipsis, $M P C F$, regula, $M C$, ad omnia quadrata eiusdem, regula, $P F$, erunt, vt, $M C$, ad, $P F$, quod ostendit oportebat.

Iuxta 1.
lib. 1.
Corell. 1.
huius.
29. Lib. 2.

C O R O L L A R I V M .

HINC patet, si ad, $M C$, $T F$, ordinatim applicentur recta linea portiones abscindentes à dicto circulo, vel ellipsis, quoniam ostensa est ratio omnium quadratorum abscissa portionis, regula basi, ad omnia quadrata circuli, vel ellipsis, $M T C F$, & item ostensa est ratio omnium quadratorum circuli, vel ellipsis, $M T C F$, regula altero axium, vel diametrorum, ad omnia quadrata eiusdem, regula reliquo axi, vel diametro, & deniq; ostensa est ratio omnium quadratorum eiusdem circuli, vel ellipsis, ad omnia quadrata portionis per aliam ordinatim applicatam abscissa, regula basi dictae portionis, quod ideo nota erit ratio omnium quadratorum duorum portionum per dictas applicatas abscissarum, regulis dictarum portionum basibus, quod, &c.

6. Huius.
Ex antec.
6. Huius

T H E O R E M A I X . P R O P O S . X .

SI circulus, & ellipsis, vel duæ ellipses fuerint circa eundem axim, vel diametrum, illi erunt inter se, vt eorum secundi axes, vel diametri.

Sint circulus, & ellipsis, vel duæ ellipses, $A F V T$, $A G V S$, circa eundem axim, vel diametrum, $A V$, sint verò secund axes, vel diametri, $F T$, $G S$. Dico circulum, vel ellipsim, $A F V T$, ad circulum, vel ellipsim, $A G V S$, esse, vt, $F T$, ad, $G S$; duæ igitur, $D A$, $D F$, tangentes eundem in terminis coniugarum axium, vel diametrorum, inter se conueniant in, D , erit ergo, $D H$, parallelogrammum, ducatur etiam per, G , ipsa, $G C$, parallela ipsi, $A V$, quæ tanget ellipsim, $A G V S$, in, G , erit ergo etiam, $C H$, parallelogrammum in eadem basi, & altitudine eum semiportione, $A G$

Vi te d.
eta lib. 7.
Annot.
Prop. 26.
17. 1. Con-
nicorum.

D d a

H, vt

H, vt etiam parallelogrammum, DH, est in eadem basi, & altitudine cum semiportione, AFH; sumatur vtcunque in, AH, punctum, O, & per ipsum ducatur ipsi, FT, parallela, OE, secans curuam, AG, in, N, CG, in, I, curuam, AF, in, M, &, DF, in,

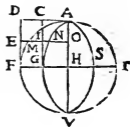
Ex 40. lib. 1. E. Igitur quadratum, FH, ad quadratum, MO, erit vt rectangulum, VHA, ad rectangulum, VO A, .i. vt quadratum, GH,

16. Lib. 2. ad quadratum, NO, ergo quadratum, FH, vel quadratum, EO, ad quadratum, MO, erit vt quadratum, IO, ad quadratum, ON, ergo, EO, ad, OM, erit vt, IO, ad, ON, est autem, EO, ducta vtcunque parallela, FT, & sunt parallelogramma, DH, CH, in istdem basibus, & altitudinibus cum semiportionibus, AFH,

Coroll. 3. AGH, ergo omnes lineæ parallelogrammi, DH, ad omnes lineas semiportionis, FAH, erunt vt omnes lineæ parallelogrammi, CH, ad omnes lineas semiportionis, AGH, erit vt parallelogrammum, CH, ad semiportionem, AGH, ergo, permutando, DH, ad, CH, parallelogrammum erit, vt semiportio,

3. Lib. 2. AFH, ad semiportionem, AGH, ergo vt, DH, ad, CH, .i. vt basis, FH, ad basim, HG, vel vt, FT, ad, GS, ita erit semiportio, AFH, ad semiportionem, AGH, vel sic eorum quadrupla .i. ita erit circulus, vel ellipsis, AFVT, ad circulum, vel ellipsim, AGVS, quod, &c.

3. Lib. 2. ita erit circulus, vel ellipsis, AFVT, ad circulum, vel ellipsim, AGVS, quod, &c.



C O R O L L A R I V M.

HINC etiam habetur, quoniam quadratum, EO, ad quadratum, OM, est vt quadratum, IO, ad quadratum, ON, idcirco, quod eodem pacto, iuxta Tb. antecedens, concludere possumus omnia quadrata, DH, ad omnia quadrata, CH, esse, vt omnia quadrata semiportionis, AFH, ad omnia quadrata semiportionis, AGH, vel vt omnia quadrata circuli, vel ellipsis, AFVT, ad omnia quadrata circuli, vel ellipsis, AGVS, sunt autem omnia quadrata parallelogrammi, DH, ad omnia quadrata parallelogrammi, CH, vt quadratum, FH, ad quadratum, GH, habetur ergo inquam, quod omnia quadrata circuli, vel ellipsis, AFVT, ad omnia quadrata circuli, vel ellipsis, AGVS, sunt vt quadratum, FH, ad quadratum, HG, vel vt quadratum, FT, ad quadratum, GS, scilicet sunt vt quadrata secundorum axium, vel diametrorum.

9. Lib. 2. ita erit circulus, vel ellipsis, AFVT, ad circulum, vel ellipsim, AGVS, quod, &c.

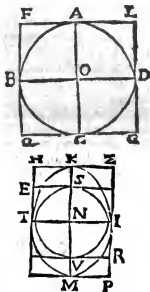
THEO-

THEOREMA X. PROPOS. XI.

Circulus, vel ellipsis ad quemlibet circulum, vel ellipsum habet eandem rationem, quam rectangulum sub ipsius coniugatis axibus, vel diametris, ad rectangulum sub istius coniugatis axibus, vel diametris, æquè tamen diametris ad inuicem inclinatis.

Sit circulus, $ABCD$, cuius axes coniugati sint, AC, BD , centrum, O , ductis verò per puncta, A, C , parallelis ipsi, BD, FL, QG , & per puncta, B, D , parallelis ipsi, AC, LG, FQ , ut sit, FG , rectangulum circulo, $ABCD$, circumscriptum, sit, $STVI$, quilibet circulus, vel ellipsis, cui rectangulum, ER , sit circumscriptum, habens latera parallela coniugatis axibus, SV, TI . Dico circulum, $ABCD$, ad ellipsem, $STVI$, esse vt rectangulum, FG , ad rectangulum, ER ; producat, SV , hinc inde, ita vt, NK , sit æqualis, OA , & NM , ipsi, OC , & circa, KM, TI , axes intelligatur, KT, MI , ellipsis, vel circulus, & productis tangentibus, TE, IR , vt occurrant ipsi, HK, MP , sit rectangulum, HP , circumscriptum ipsi, $KTMI$, ellipsi, vel circulo, habens latera coniugatis axibus, KM, TI , parallela: Est ergo vt rectangulum, FG , ad rectangulum, HP , ita circulus, $ABCD$, ad circulum, vel ellipsem, $KTMI$, quia sunt ambo circa, AC, KM , axes æquales; item parallelogrammum, HP , ad parallelogrammum, ER , est vt circulus, vel ellipsis, $KTMI$, ad circulum, vel ellipsem, $STVI$, ergo ex æquali rectangulum, FG , ad rectangulum, ER , erit vt circulus, $ABCD$, ad circulum, vel ellipsem, $STVI$.

Sit nunc, $ABCD$, ellipsis, vt etiam, $STVI$, poterit esse, quod, AC, BD , sint non axes, sed coniugatæ diametri, & FG , parallelogrammum, oportet autem lumere in ellipsi, ST, VI , coniugatas diametros, SV, TI , ita vt æqualiter sint inclinatæ ac ipsæ, AC, BD , tunc enim circumscripta parallelogramma, licet



Ex antec.

Ex antec.

licet non sint rectangula, tamen erunt æquiangula, unde æquiangulum erit parallelogrammum, HP , ipsi, FG , & ellipses, $ABCD$, KMI , erunt circa, AC , KM , æquales diametros, ita ut si superponerentur ad inuicem isti ellipses, ut, KM , esset in, AC , ipsa, TI , esset in, BD , & ideò eodem modo ostendemus, ut supra ellipses, $ABCD$, $STVI$, esse inter se, ut parallelogramma illis circumscripta, FG , ER , & quia illa sunt æquiangula habebunt rationem ex ratione laterum compositam, sed

6. Lib. 2. etiam parallelogramma rectangula sub eisdem lateribus habent rationem compositam ex ratione eorundem laterum, ergo ellipsis, $ABCD$, ad ellipsum, $STVI$, erit ut parallelogrammum, FG , ad parallelogrammum, ER , sibi æquiangulum, ut rectangulum sub, FL , LG , vel sub, BD , AC , diametris, ad rectangulum sub, TI , SV , diametris, patet igitur circulum, vel ellipsum, $ABCD$, ad circulum, vel ellipsum, $STVI$, esse ut rectangulum sub axibus, vel diametris, AC , BD , ad rectangulum sub axibus, vel diametris, SV , TI , quæ diametri æquè ad inuicem inclinantur, quod ostendere opus erat.



COROLLARIUM I.

HINC ergo colligitur, quod quando circulus comparatur ad circulum, illi sunt inter se, ut rectangula sub eorum axibus. i. ut quadrata axium, & ideò sunt in dupla ratione axium siue diametrorum, quando verò circulus comparatur ad ellipsum, erit ad illum, ut sui axis quadratum ad rectangulum sub axibus ellipsis. Denique, si ellipsis comparatur ad ellipsum, erit ad illum, ut rectangulum sub axibus illius ad rectangulum sub axibus alterius, vel ut rectangulum sub diametris (coniugatis semper intellige, nisi aliud addatur) illius ad rectangulum sub diametris alterius, quæ ut predicti aequaliter ad inuicem sunt inclinata; vel tandem, ut parallelogramma illis circumscripta, quo-

quorum latera sint prædictis diametris parallela, quæ idem sunt æquiangula, vniuersaliter igitur prædicta sunt ueræ, ut parallelogrammæ re-
ctangula, vel æquiangula illis circumscripta; Vnde etiam habetur pa-
rallelogrammæ rektangula illis circumscripta esse, ut parallelogramma-
æquiangula pariter illis circumscripta.

COROLL. II. A. SECTIO I.

A.

HINC ulterius colligitur, quod quæcunque de binis parallelo-
grammæ offensa sunt in Theorem. 5. 6. 7. 8. lib. 2. præsuppositis
conditionibus illis consideratis circa eorum bases, & altitudines, vel
circa eorum latera, eadem & de ellipsis verificabuntur easdem con-
ditiones in proprijs axibus, vel diametris habentibus; nam his positis
parallelogrammæ illis circumscripta, & æquiangula habent in suis la-
teribus, vel in basi, & altitudine easdem conditiones, unde sicuti di-
ctæ conclusiones sequuntur pro parallelogrammæ circumscriptis, ita
etiam verificantur pro inscriptis ellipsis, ad quas dicta parallelo-
gramma habent easdem rationes, ut probatum est, quæ igitur hic non
sunt pro ellipsis ad inuicem comparatis offensa, per supradicta
Theoremata supplentur, pro circulis autem hoc tantum habemus, quod
sint, ut eorum axium, vel (si minus dicere) diametrorum quadrata,
non aliaque circa eosdem variatio contingit.

Hujus.

B. SECTIO II.

B.

Colliguntur ergo hac de binis ellipsis s. quod quæ sunt circa ean-
dem diametrum, sunt ut reliquæ secunda diametri.

C. SECTIO III.

C.

Quæcunque ellipses habent rationem ex axibus, vel diametris con-
iugatis, æqualiter ad inuicem inclinatis compositam.

D. SECTIO IV.

D.

Èllipses habentes axes, vel diametros coniugatas, quæ æqualiter
sunt inclinata, reciprocè respondentes, sunt æquales; & quæ
sunt æquales, & habent axes, vel diametros ad inuicem æqualiter in-
clinatas, easdem habent reciprocè respondentes.

E. SE-

E.]

E. S E C T I O V.

Similes ellipses sunt in dupla ratione suorum axium, vel diametrorum homologarum, vel ut eorundem quadrata.

F.

F. S E C T I O V I.

Pro circulis autem (ut supra dictum est) hoc tantum habetur, quod sint ut diametrorum quadrata, vel in dupla ratione diametrorum; neque illis alia variatio contingit, sicuti ellipsis competere ex superioribus compertum est.

THEOREMA XI. PROPOS. XII.

Quæcumq; de omnibus quadratis parallelogrammorum, appositas ibi condiciones habentium, ostensa sunt in Theor. 9. 10. 11. 12. 13. lib. 2 eadem de omnibus quadratis circularum, vel ellipsium illis inscriptorum (regula in utrisque altero axium, vel diametrorum coniugarum) verificabuntur.

Patet hæc propositio, nam omnia quadrata circularum, vel ellipsium (regula altero axium, vel diametrorum) sunt sub æquivalentia omnium quadratorum parallelogrammorum, quibus inscribuntur; latera habentium dictis axibus, vel diametris parallela; habentibus autem illis appositas ibi condiciones in suis lateribus, eadem adsunt in axibus, vel diametris circularum, vel ellipsium, quibus circumscribuntur, & è contra; & ideo conclusiones, quæ collectæ sunt pro illis in dictis Theor. etiam pro omnibus quadratis circularum, vel ellipsium illis inscriptorum, ut demonstratè recipi possunt, cum sint eorum partes proportionales, iisdem regulis pro omnibus quadratis circularum, vel ellipsium, & pro omnibus quadratis parallelogrammorum illis circumscriptorum, assumptis, quod, &c.

Coroll. 1.
huius.



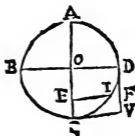
THEO.

THEOREMA XII. PROPOS. XIII.

SI circulum, vel ellipsim duæ rectæ lineæ in terminis coniugarum diametrorum tetigerint inter se conuenientes, eisdem diametris ductis. Omnia quadrata constituti parallelogrammi ad omnia quadrata trilinei à dictis tangentibus, & ab inclusa curua comprehensi, regula altera diametrorum, erunt vt dictum parallelogrammum ad sui reliquum, dempto quadrante circuli, vel ellipsis iam dictæ, quod inscribitur prædicto parallelogrammo, simul cum excessu dicti quadrantis super duas tertias iam dicti parallelogrammi, quæ ratio erit proximè, vt 21. ad 2.

Sit circulus, vel ellipsis, $ABCD$, cuius diametri coniugatæ, A C , B D , in quorum terminis, C , D , duæ rectæ lineæ ipsam tangentes inter se conueniant in, V . Dico ergo (sumpta regula qualibet diametrorum, vt, B D ,) quod omnia quadrata parallelogrammi, OV , ad omnia quadrata trilinei, DCV , duabus tangentibus, DV , VC , & ab ijs inclusa curua, DC , comprehensi sunt, vt idem parallelogrammum, OV , ad sui reliquum dempto quadrante, OCD , circuli,

vel ellipsis, $ABCD$, simul cum co spatio, quo idem quadrans excedit duas tertias parallelogrammi, OV . Sumatur intra, OC , vtcunque punctum, E , & per, E , ducatur ipsi, B D , parallela, EF , secans curuam, DC , in, I . Omnia ergo quadrata parallelogrammi, OV , ad reatungula sub parallelogrammo, OV , & semiportione, OCD , sunt vt parallelogrammum, OV , ad eandem semiportionem, OCD ; sed eadem ad omnia quadrata semiportionis, OCD , sunt sexquialtera, ergo ad residuum erunt vt parallelogrammum, OV , ad residuum semiportionis, OCD , demptis ab eâ, $\frac{2}{3}$, parallelogrammi, OV , quarum idem parallelogrammum, OV , est sexquialterum; residuum autem reatungulorum sub parallelogrammo, OV , & semiportione, OCD , demptis omnibus quadratis semiportionis, OCD , sunt reatungula sub semiportione, OCD , & trilinea, CDV , nam veluti in, dicta.



Coroll. 1.
16. lib. 2.
Coroll. 10
huius.

vide ibid.

E e

E F,

EF, ducta, utcumque quadratum, EI, detractum à rectangulo sub, IE, EF, relinquit rectangulum sub, EI, IF, ita in cæteris sequitur;

Per C. 23. *lib. 2.* & illis simul collectis sequitur etiam, quod detractis omnibus quadratis semiportionis, OCD, à rectangulis sub parallelogrammo, OV, & semiportione, OCD, relinquuntur rectangula sub semiportione, OCD, & trilineo, DCV, ad hæc igitur, quæ sunt dictum

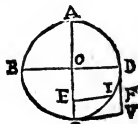
residuum, omnia quadrata parallelogrammi, OV, erunt ut parallelogrammum, OV, ad residuum semiportionis, OCD, ab ea demptis, $\frac{1}{2}$, parallelogrammi, OV; eadem autem omnia quadrata parallelogrammi, OV, ad rectangula sub parallelogrammo,

Per C. 13. *lib. 2.* OV, & semiportionem, OCD, .i. ad omnia quadrata semiportionis, OCD, vna cum rectangulis sub semiportionem, OCD, & trilineo, CVD, sunt ut parallelogrammum, OV, ad

semiportionem, OCD, ut paulò supra in hac demonstratione ostendimus, ergo, colligendo, omnia quadrata parallelogrammi, OV, ad omnia quadrata semiportionis, OCD, vna cum rectangulis bis sub semiportionem, OCD, & trilineo, CVD, sumptis, erunt ut parallelogrammum, OV, ad semiportionem, OCD, vna cum excessu, quo dicta semiportio, OCD, excedit, $\frac{1}{2}$, parallelogrammi, OV, ergo, per conuersionem rationis, omnia quadrata parallelogrammi, OV, ad omnia quadrata trilinei, DCV, quæ remanent detractis omnibus quadratis semiportionis, OCD, vna cum rectangulis sub illa, & sub trilineo, DCV, bis sumptis, ab omnibus quadratis parallelogrammi, OV; (veluti detracto quadrato, EI, vna cum rectangulo bis sub, EI, IF, remanet quadratum, IF,) ad omnia quadrata trilinei, DCV, erunt ut parallelogrammum, OV, ad residuum, detracta semiportionem, OCD, vna cum excessu, quo ipsa superat duas tertias parallelogrammi, OV, à dicto parallelogrammo, OV.

Per D. 13. *lib. 2.* Est verò parallelogrammum, OV, ad dictum spatium residuum proximè, ut 21. ad 2. nam si supponamus parallelogrammum, OV, esse 21. erit semiportio, OCD, earundem partium proximè 16. $\frac{1}{2}$,

§ 1. huius. est .n. ad eam, sicut rectangulum, quod esset circulo, vel ellipsi, ABCD, circumscriptum, habens latera ipsis, AC, BD, axibus parallela ad eundem circulum, vel ellipsim .i. ut 14. ad 11. proximè, ut ostendit Archimedes lib. de Dimensione Circuli, est .n. ut 14. ad 11. ita 21. ad 16. $\frac{1}{2}$, rursus duæ tertias parallelogrammi, OV, sunt 14. lelo.



semiportio verò, OCD , quæ est proximè $16\frac{1}{2}$, excedit, $\frac{1}{2}$, parallelogrammi, OV , scilicet 14 . per $2\frac{1}{2}$, si ergo semiportioni, OCD , quæ est proximè $16\frac{1}{2}$, iunxerimus excessum eiusdem semiportionis super, $\frac{1}{2}$, parallelogrammi, OV , .i. $2\frac{1}{2}$, fiet totum consequens proximè 19 . hoc si detrahatur à toto parallelogrammo, OV , quod est 21 . relinquentur 2 . erit ergo parallelogrammum, OV , ad hoc residuum proximè, vt 21 . ad 2 . vnde & omnia quadrata parallelogrammi, OV , ad omnia quadrata trilinei, DCV , erunt proximè vt 21 . ad 2 . quod erat ostendendum .

C O R O L L A R I V M .

HINC patet, si nos præcisè sciamus, quam rationem habeant omnia quadrata parallelogrammi, OV , ad omnia quadrata trilinei, DCV , quia etiam scimus, quam rationem habeant omnia quadrata, CD , ad omnia quadrata semiportionis, OCD , scimus etiam, quam rationem habeant eadem ad rectangula sub semiportione, OCD , & trilineo, DCV , bis sumpta, & item nota erit ratio ad eadem semel sumpta, qua si iungantur omnibus quadratis semiportionis, OCD , componentur rectangula sub parallelogrammo, OV , & semiportione, OCD , & fiet nota ratio omnium quadratorum, OV , ad rectangula sub parallelogrammo, OV , & semiportione, OCD , qua est eadem ei, quam habet parallelogrammum, OV , ad semiportionem, OCD , & idè hæc erit nota, sicut etiam erit nota ratio parallelogrammi circulo, vel ellipsi, $ABCD$, circumscripti, habentis latera parallela ipsis, AC, BD , ad eundem circulum, vel ellipsim, AED , & hinc haberetur circuli quadratura; idè quærendum est, quam rationem habeant præcisè omnia quadrata, OV , ad omnia quadrata trilinei, CDV ; quod hæc usque nec alijs, nec mihi compertum esse potuit.

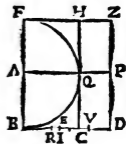
Per C. 23.
lib. 2.Coroll. 1.
26. lib. 2.

THEOREMA XIII. PROPOS. XIV.

SI circa parallelogrammi rectanguli quodlibet laterum, tamquam circa diametrum integrorum, semicirculus, vel semiellipsis, etiam ipso non existente rectangulo, descripti fuerint, circumscriptentia autem circuli, vel curua ellipsis non pertingant, neque secet oppositum prædicto latus, sit autem regula parallelogrammi basis: Omnia quadrata dicti parallelogrammi ad omnia quadrata figuræ, quæ reliquis tribus parallelogrammi lateribus (dempto eo, quod

pro axi sumptum est) & curua circuli, vel ellipsis continetur, erunt proximè, vt basis eiusdem parallelogrammi ad sui reliquum, demptis ab ea, $\frac{1}{2}$, rectæ lineæ, quæ sit æqualis dimidiæ secundæ diametri prædicti circuli, vel ellipsis, simul cum excessu, quo dicti, $\frac{1}{2}$, excedunt, $\frac{2}{7}$, tertiæ proportionalis duarum, quarum prima est dicta basis, secunda autem dicta secundæ diametri dimidia.

Sit parallelogrammum, $F D$, & circa latus, $F B$, vtcunque tamquam circa diametrum (intellige autem semper diametrum hic, & in sequentibus, vt est nomen commune diametro, & axi) integri sit descriptus semicirculus, vel semiellipsis, $F Q B$, cuius curua, $F Q B$, neque tangat, neque secet latus, $Z D$, oppositum lateri, $F B$, bifariam autem diuisa, $F B$, in, A , & per, A , ipsi, $B D$, basi ducta parallela, $A P$, secetur à curua, $F Q B$, vtcunq; in, Q ; erit autem, $A Q$, dimidia secundæ axis circuli, vel ellipsis, cuius centrum, A ; ducatur insuper per, Q , ipsi, $F B$, parallela, $H C$, quæ tanget circulum dictum, vel ellipsim, & erit, $B C$, æqualis ipsi, $A Q$; fiat deinde, vt, $D B$, ad, $B C$, ita, $B C$, ad, $B I$, & sumatur, $B R$, quæ sit, $\frac{2}{3}$, $B I$, &, $B E$, quæ sit, $\frac{1}{3}$, ipsius, $C B$, &, $E V$, quæ sit æqualis ipsi, $E R$, regula verò sit, $B D$. Dico ergo omnia quadrata parallelogrammi, $F D$, ad omnia quadrata figuræ, quæ comprehenditur tribus lateribus, $F Z$, $Z D$, $D B$, & curua, $F Q B$, esse, vt, $B D$, ad, $D V$, proximè. Omnia .n. quadrata parallelogrammi, $F D$, ad rectangula sub parallelogrammo, $F D$, & semicirculo, vel semiellipsis, $F Q B$, sunt vt parallelogrammum, $F D$, ad eundem semicirculum, vel semiellipsim, $F Q B$; quia verò parallelogrammum, $F D$, ad parallelogrammum, $F C$, est vt, $D B$, ad, $B C$, & item parallelogrammum, $F C$, ad semicirculum, vel semiellipsim, $F Q B$, est proximè vt 14. ad 11. idest vt, $C B$, ad, $B E$, ergo ex æquali parallelogrammum, $F D$, ad semicirculum, vel semiellipsim, $F Q B$, erit vt, $D B$, ad, $B E$, & ideò omnia quadrata parallelogrammi, $F D$, ad rectangula sub parallelogrammo, $F D$, & semicirculo, vel semiellipsi, $F Q B$, erunt vt, $D B$, ad, $B E$, .i. sumpta, $D B$, communi altitudine erunt, vt quadratum, $D B$, ad rectangulum sub, $D B$, $B E$, quod serua.



Coroll. 1.
2. lib. 2.

5. Lib. 2.
Arch. de
Dim. Cir.

3. Lib. 2.

Aduerte nunc, quod rectangula sub parallelogrammo, $F D$, & semi-

micirculo, vel semiellipfi, FQB , diuiduntur per curuam, FQB , in
 rectangula sub quadrilineo, $FQBDZ$, & semicirculo, vel semiel-
 lipfi, FQB , & in omnia quadrata semicirculi, vel semiellipfis, FQ
 B , videndum ergo nunc est, quam rationem habeant omnia quadra-
 ta, FD , ad omnia quadrata semicirculi, vel semiellipfis, FQB ,
 quod sic patet; omnia quadrata, FD , ad omnia quadrata, FC ,
 sunt vt quadratum, DB , ad quadratum, BC , .i. ad rectangulum sub,
 DB, BI , nam tres, DB, BC, BI , sunt continuè proportionales,
 omnia item quadrata, FC , omnium quadratorum semicirculi, vel
 semiellipfis, FQB , sunt sexquialtera .i. sunt vt rectangulum, DBI ,
 ad rectangulum, DBR , quia, BR , est, $\frac{2}{3}$, BI , ergo ex æquali om-
 nia quadrata, FD , ad omnia quadrata semicirculi, vel semiellipfis,
 FQB , sunt vt quadratum, DB , ad rectangulum sub, DB, BR ,
 omnia autem quadrata, FD , ad rectangula sub, FD , & semicircu-
 lo, vel sem.ellipfi, FQB , erant vt idem quadratum, DB , ad rectan-
 gulum sub, DB, BE , ergo omnia quadrata, FD , ad rectangula sub
 semicirculo, vel semiellipfi, FQB , & sub quadrilineo, $FQBDZ$,
 erunt vt idem quadratum, DB , ad rectangulum sub, $DB, \&, RE$,
 ad eadem verò bis sumpta, vt idem quadratum, DB , ad rectangu-
 lum sub, $DB, \&, RV$, quia verò omnia quadrata, FD , ad omnia
 quadrata semicirculi, vel semiellipfis, FQB , sunt vt quadratum, D
 B , ad rectangulum sub, DB, BR , ergo colligendo omnia quadra-
 ta, FD , ad omnia quadrata semicirculi, vel semiellipfis, FQB , vna
 cum rectangulis sub semicirculo, vel semiellipfi, FQB ; & quadri-
 lineo, $FQBDZ$, bis sumptis, erunt vt quadratum, DB , ad rectan-
 gula sub, DB, BR, DB, RV , .i. ad rectangulum sub, DB, BV ;
 quia verò si ab omibus quadratis, FD , subtraxeris omnia quadrata
 semicirculi, vel semiellipfis, FQB , vna cum rectangulis bis sub eo-
 dem semicirculo, vel semiellipfi, FQB , & sub quadrilineo, FQB
 DZ , remanent omnia quadrata quadrilinei, $FQBDZ$, ideò, per
 conuersionem rationis, omnia quadrata parallelogrammi, FD , ad
 omnia quadrata quadrilinei, $FQBDZ$, erunt vt quadratum, BD ,
 ad rectangulum sub, BD, DV , .i. vt, BD , ad, DV , quod tantum
 proximè verificatur, non .n. parallelogrammum, FC , ad semicir-
 culum, vel semiellipsum, FQB , est præcisè, vt 14. ad 11. sed tantum
 proximè, ideò, &c.

Per C. 2.
lib. 2.

9. Lib. 2.
Elici etiã
poteſt ex
12. lib. 2.

Coroll. 1.
huius.

1. Lib. 2.

Per D. 13.
lib. 2.

5. Lib. 2.

Defiderari nunc tantum videtur in hac demonstratione, quod pro-
 betur punctum, R , non identificari puncto, E , sed cadere inter, B
 E , quod sic facile patet, cum .n. ostentum sit omnia quadrata, FD ,
 ad rectangula sub parallelogrammo, FD , & semicirculo, vel semiel-
 lipfi, FQB , esse vt quadratum, DB , ad rectangulum sub, DB, B
 E , insuper ostentum sit omnia quadrata, FD , ad omnia quadrata
 semi-

semicirculi, vel semiellipsis, FQB , esse vt quadratum, DB , ad res angulum sub, DB , BR , quoniam rectangula sub, FD , & semicirculo, vel semiellipsi, FQB , sunt maiora omnibus quadratis semicirculi, vel semiellipsis, FQB , ideo etiam rectangulum sub, DB , BE , semper maius est rectangulo sub, DB , BR , & ideo punctum, R , semper cadet inter punctum, B , & punctum, E , quocunque deinde cadat punctum, I , vnde patet, &c.

Similiter, quia omnia quadrata semicirculi, vel semiellipsis, FQB , vna cum rectangulis sub eodem, & sub quadrilinetico, $FQBDZ$, bis sumptis, minora sunt omnibus quadratis, FD , ideo, BV , composita ex tribus, BR , RE , EV , minor est ipsa, BD , nam, DB , ad, BV , est, vt omnia quadrata, FD , ad compositum ex omnibus quadratis semicirculi, vel semiellipsis, FQB , & ex rectangulis sub eodem, & sub quadrilinetico, $FQBDZ$, bis sumptis, vnde omnia clarè patent.

C O R O L L A R I V M.

H *INC* habetur omnia quadrata, FD , ad reliquum sui, demptis omnibus quadratis quadrilinetici, $FQBDZ$, esse, vt, DB , ad, BV .

T H E O R E M A X I V . P R O P O S . X V .

S I circulo, vel ellipsi circumscribatur parallelogrammum, habebit latera eorundem diametris parallela; sumpto autem quolibet laterum pro regula; omnia quadrata dicti parallelogrammi rectanguli, ad omnia quadrata circuli, vel ellipsis inscripti, vna cum rectangulis bis sub eodem circulo, & duobus trilinetis cuiuslibet laterum adiacentibus, quæ non fuerunt sumpta pro regula, erunt, vt dictum parallelogrammum ad dictum circulum, vel ellipsim.

Sit circulus, vel ellipsis, $M B E G$, cuius centrum, A , per quod transeant diametri, ME , BG , ductis autem tangentibus circulum, vel ellipsim in punctis, M , B , E , G , donec concurrant, sit eidem circulo, vel ellipsi circumscriptum parallelogrammum, $H F$, quod habebit latera parallela ipsis axibus, ME , BG , sit autem regula vtcunque, DF . Dico ergo omnia quadrata parallelogrammi, $H F$, ad omnia quadrata circuli, vel ellipsis, $M B E G$, vna cum rectangulis bis sub eodem circulo, vel ellipsi, $M B E G$, & sub trilinetis, MGN , GFE , adiacentibus lateri, NF , sumpto vtcunque ex duobus, HD , NF , quæ non

ion sunt regula, esse vt parallelogrammum, H F, ad circulum, vel ellipsum, M B E G. Omnia .n. quadrata parallelogrammi, H F, sunt exqualtera omnium quadratorum circuli, vel ellipsis, M B E G, & sed sunt ad illa, vt parallelogrammum, H F, ad sui ipsius duas tertias, quod serua.

Coroll. 7.
mult.

Quoniam vero omnia quadrata parallelogrammi, A F, ad rectangula sub eodem, & sub semiportione, A E G, sunt vt parallelogrammum, A F, ad semiportionem, A E G, eadem vero ad omnia quadrata semiportionis, A E G, sunt sexqualtera .i. sunt vt parallelogrammum, A F, ad sui ipsius, $\frac{2}{3}$, igitur eadem ad reliqua .f. ad rectangula sub semiportione, A E G, & trilineo, G E F, erunt vt parallelogrammum, A F, ad excessum, quo semiportio, A E G, excedit, $\frac{1}{3}$, parallelogrammi, A F, omnia autem quadrata, B F, sunt quadrupla omnium quadratorum, A F, ergo omnia quadrata, B F, ad rectangula sub semiportione, A E G, & trilineo, G E F, erunt vt quater parallelogrammum, A F, ad dictum excessum .i. vt parallelogrammum, H

Coroll. 12.
16. 1. 2.

7. 1. 2.

ad dictum excessum, & consequentibus quadruplicatis, omnia quadrata parallelogrammi, B F, ad rectangula quater sub semiportione, A E G, & trilineo, G E F, .i. ad rectangula bis sub portione, B E G, & trilineo, G E F, erunt vt, H F, ad dictum excessum quater sumptum, quia enim, A E, est diameter bifariam diuidit in portione, B E G, omnes ipsi, D F, æquidistantes, & sed rectangula quater sub semiportione, A E G, & trilineo, G E F, sunt rectangula



is sub portione, B E G, & trilineo, G E F, omnia ergo quadrata parallelogrammi, B F, ad rectangula bis sub portione, B E G, & trilineo, G E F, vel eorum dupla .f. omnia quadrata parallelogrammi, H F, ad rectangula bis sub circulo, vel ellipfi, M B E G, & sub trilineis, M G N, G E F, erunt vt parallelogrammum, H F, ad quatuor excessus semiportionis, A E G, super duas tertias parallelogrammi, A F, .i. ad excessum circuli, vel ellipsis, M B E G, super, $\frac{2}{3}$, parallelogrammi, H F, erant autem omnia quadrata parallelogrammi, H F, ad omnia quadrata circuli, vel ellipsis, M B E G, vt idem parallelogrammum, H F, ad, $\frac{2}{3}$, sui ipsius, ergo omnia quadrata parallelogrammi, H F, ad omnia quadrata circuli, vel ellipsis, M B E G, simul cum rectangulis bis sub eodem circulo, vel ellipfi, M B E G, & sub trilineis, M N G, G F E, erunt vt parallelogrammum, H F, ad sui ipsius, $\frac{2}{3}$, vna cum excessu circuli, vel ellipsis, M B E G, super eadem duas tertias .i. erunt vt parallelogrammum, H

10. 1. 2.

ad circulum, vel ellipsum, M B E G, quod erat ostendendum.

ALL

Coroll. 1. **O**mnia quadrata, BF , ad rectangula sub, BF , & sub portione, BEG , sunt vt, BF , ad portionem, BEG , rectangula verò sub portione, BEG , & parallelogrammo, BF , diuiduntur in rectangula sub, BEG , & BDE , trilineo .i. sub trilineo, GEF , & sub, BEG , & trilineo, GEF , & sub, BEG , & eadem portione, BEG , .i. in omnia quadrata portionis, BEG , ergo omnia quadrata, BF , ad omnia quadrata portionis, BEG , simul cum rectangulis sub portione, BEG , & trilineo, GEF , bis sumptis, vel omnia quadrata, HF , ad omnia quadrata circuli, vel ellipsis, $M B E G$, simul cum rectangulis sub circulo, vel ellipsi, $M B E G$, & trilineis, $M N G$, $G F E$, bis sumptis, erunt vt, BF , ad portionem, BEG , vel vt, HF , ad circulum, vel ellipsim, $M B E G$, quod erat ostendendum.

THEOREMA XV. PROPOS. XVI.

Si à parallelogrammo per lineam lateribus parallelam parallelogrammum abscindatur, quod intelligatur circulo, vel ellipsi circumscriptum, regula autem sit parallelogrammi basis: Omnia quadrata circumscripti parallelogrammi, simul cum rectangulis bis sub eodem, & sub reliquo parallelogrammo per dictam parallelam constituto, ad omnia quadrata dicti circuli, vel ellipsis, simul cum rectangulis bis sub eodem circulo, vel ellipsi, & sub quadrilineo duabus parallelis circulum, vel ellipsim tangentibus, inclusaque ab iisdem curua, & latere totius parallelogrammi, quod circulum, vel ellipsim non tangit, comprehenso, erunt, vt dictum circumscriptum parallelogrammum ad eundem circulum, vel ellipsim.

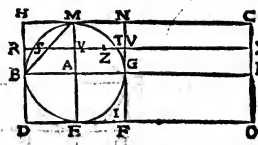
Sit ergo parallelogrammum, HO , cuius basis, & regula, DO , ductaque, NF , intra ipsum lateribus, HD , CO , parallela, sit abscissum à toto parallelogrammo, HO , parallelogrammum, HF , intelligatur autem circumscriptum circulo, vel ellipsi, $M B E G$, cuius centrum, A , per quod transeant diametri, ME , & BG , quæ sit producta vsque in, P , erunt autem dictæ diametri parallelæ parallelogrammi, HO , lateribus, transibuntque per puncta contactuum, M, B ,

M, B, E, G. Dico igitur omnia quadrata parallelogrammi, H F, simul cum rectangulis bis sub, H F, & parallelogrammo, F C, ad omnia quadrata circuli, vel ellipsis, M B E G, simul cum rectangulis bis sub eodem circulo, vel ellipsi, M B E G, & sub quadrilineo, M G E O C, esse vt parallelogrammum, H F, ad circumulum, vel ellipsim, M B E G: Omnia .n. quadrata parallelogrammi, H O, ad omnia quadrata parallelogrammi, M O, sunt vt quadratum, D O, ad quadratum, O E, omnia item quadrata parallelogrammi, M O, ad rectangula sub parallelogrammo, M O, & portione, M G E, sunt vt, M O, ad portionem, M G E, fiat vt, M F, ad portionem, M G E, ita, F E, ad, E I, erit ergo vt, M O, ad portionem, M G E, ita, O E, ad, E I, ergo omnia quadrata, M O, ad rectangula sub, M O, & portione, M G E, erunt vt, O E, ad, E I, .i. vt quadratum, O E, ad rectangulum sub, O E, E I, erant autem omnia quadrata, H O, ad omnia quadrata, O M, vt quadratum, D O, ad quadratum, O E, ergo ex æquali omnia quadrata, H O, ad rectangula sub, M O, & sub portione, M G E, erunt vt quadratum, D O, ad rectangulum sub, O E, E I, ad eadem verò quater sumpta, vt quadratum, D O, ad rectangulum sub, O E, & quadrupla, E I; rectangula autem sub, M O, & portione, M G E, æquantur rectangulis sub quadrilineo, M G E O C, & portione, M G E, vna cum omnibus quadratis portionis, M G E, illa igitur quater sumpta reddunt

9. Lib. 2.
Coroll. 1.
26. lib. 2.

5. Lib. 2.

Per C. 23.
lib. 2.



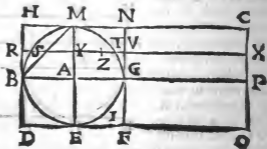
quater rectangula sub portione, M G E, & quadrilineo, M G E O C, vna cum omnibus quadratis portionis, M G E, quater sumptis, quia verò omnia quadrata circuli, vel ellipsis, M B E G, æquantur omnibus quadratis portionis, M B E, & portione, M G E, vna cum rectangulis bis sub vtriusq; portione .i. vna cum omnibus quadratis portionis, M G E, bis sumptis, & omnia quadrata portionis, M B E, æquantur omnibus quadratis portionis, M G E, ideò omnia quadrata portionis, M G E, quater sumpta æquantur omnibus quadratis circuli, vel ellipsis, M B E G, item rectangula sub portione, M G E, & quadrilineo, M G E O C, quater æquantur rectangulis sub toto circulo, vel ellipsi, M B E G, & sub quadrilineo, M G E O C, bis sumptis, ita ut hucusq; probauerimus rectangula sub portione, M G E, & parallelogrammo, M O, quater sumpta æquari omnibus quadratis circuli,

Per D. 23.
lib. 2.

F f vel

vel ellipsis, M B E G, vna cum rectangulis bis sub eodem circulo, vel ellipsi, & sub quadrilineo, M G E O C, quoniam verò ostensum est omnia quadrata, H O, ad rectangula sub portione, M G E, & parallelogrammo, M O, quater sumpta esse, vt quadratum, D O, ad rectangulum sub, O E, & quadrupla, E I, idè ex æquali omnia quadrata, H O, ad omnia quadrata circuli, vel ellipsis, M B E G, vna cum rectangulis bis sub eodem circulo, vel ellipsi, & sub quadrilineo, M G E O C, erunt vt quadratum, D O, ad rectangulum sub, O E, & sub quadrupla, E I, quod serua.

14. Lib. 2. Quoniam verò omnia quadrata, H F, vna cum rectangulis bis sub parallelogrammis, H F, F C, ad omnia quadrata, H O, sunt, vt vnum, ad vnum .i. vt quadratum, D F, vna cum rectangulo bis sub, D F, F O, ad quadratum, D O, omnia quadrata verò parallelogrammi, H O, ad omnia quadrata circuli, vel ellipsis, M B E G, vna cum rectangulis bis sub eodem circulo, vel ellipsi, & sub quadrilineo, M G E O C, esse ostensa sunt, vt idem quadratum, D O, ad rectangulum sub, O E, & quadrupla, E I, ergo ex æquali omnia quadrata parallelogrammi, H F, vna cum rectangulis bis sub parallelogrammis, H F, F C, ad omnia quadrata circuli, vel ellipsis, M B E G, vna cum rectangulis bis sub eodem circulo, vel ellipsi, & sub quadrilineo, M G E O C, erunt vt quadratum, D F, vna cum rectangulo sub, D F, F O, bis, ad rectangulum sub, O E, & quadrupla, E I, vel erunt, vt eorum dimidia .i. vt dimidium quadrati, D F,



quod erit rectangulum, D F E, vna cum rectangulo sub, D F O, semel (ex quibus componetur rectangulum sub, O E, F D,) ad rectangulum sub, O E, & dupla, E I, vel, vt adhuc horum dimidia .i. vt rectangulum sub, O E, &, E D, ad rectangulum sub, O E, &, E I, .i. vt, D E, ad, E I, quia, O E, altitudo est communis, ostensum ergo est omnia quadrata, H F, vna cum rectangulis bis sub parallelogrammis, H F, F C, ad omnia quadrata circuli, vel ellipsis, M B E G, vna cum rectangulis bis sub eodem, & sub quadrilineo, M G E O C, esse, vt, D E, vel, F E, ad, E I, .i. vt parallelogrammum, M F, ad portionem, M G E, vel vt parallelogrammum, H F, ad circulum, vel ellipsim, M B E G, quod erat propositum.

THEO.

THEOREMA XVI. PROPOS. XVII.

OMnia quadrata parallelogrammi circulo, vel ellipsi circumscripti (regula basi) ad omnia quadrata figuræ compositæ ex circulo, vel ellipsi, & ex duobus trilineis adjacentibus lateri, quod non est regula, nec ipsi parallelogrammum, veluti dicitur in Th. 14. erunt, vt idem parallelogrammum ad circulum, vel ellipsim, cui circumscribitur, vna cum eo spatio, quod relinquitur, dempto à quarta parte dicti parallelogrammi circuli, vel ellipsis quadrante, simul cum excessu, quo idem quadrans superat duas tertias dicti parallelogrammi id est erit, proximè, vt 21. ad 17.

Exponatur denuò figura Theor. 14. Dico omnia quadrata parallelogrammi, HF , ad omnia quadrata figuræ compositæ ex circulo, vel ellipsi, $MBEG$, & trilineis, MGN , EGF , esse vt, HF , ad circulum, vel ellipsim, $MBEG$, vna cum residuo, dempto à parallelogrammo, MG , circuli, vel ellipsis, quadrante, MA , simul cum eo excessu, quo idem quadrans superat duas tertias parallelogrammi, MG . Etenim ostensum est omnia quadrata, HF , ad omnia quadrata circuli, vel ellipsis, $MBEG$, vna cum reſtāgulis bis sub eodem, & sub trilineis, MNG , GFE , esse vt, HF , ad circulum, vel ellipsim, $MBEG$, quod ærua. 15. huius.

Vtcrius, quia omnia quadrata, HG , ad omnia quadrata, MG , sunt vt quadratum, BG , ad quadratum, GA , . . . vt parallelogrammum, HF , ad parallelogrammum, MG ; insuper omnia quadrata, MG , ad omnia quadrata trilinei, MGN , sunt vt, MG , ad residuum dempto quadrante, MA , simul cum eo spatio, quo idem superat duas tertias reſtāguli, MG , ab eodem reſtāgulo, MG , ergo ex æquali omnia quadrata, HG , ad omnia quadrata trilinei, MGN , erunt vt, HF , ad residuum, dempto quadrante, MA , simul cum eo spatio, quo idem superat, reſtāguli, MG , ab eodem reſtāgulo, MG , & duplicatis proportionis terminis, omnia quadrata, HF , ad omnia quadrata trilineorum, MNG , GFE , erunt vt duplum, HF , ad duplum



10. Lib. 2.

F f 2

illius

illius residui .i. vt, HF , ad vnum illud residuum; omnia autem quadrata eiusdem, HF , ad omnia quadrata circuli, vel ellipsis, $M B E G$, simul cum reſtāngulis bis sub eodem, & sub trilineis, $M N G, G F E$, sunt vt, HF , ad circulum, vel ellipſim, $M B E G$, ergo, colligendo, omnia quadrata, HF , ad omnia quadrata circuli, vel ellipsis, $M B E G$, & ad omnia quadrata trilineorum, $M N G, G F E$, simul cum reſtāngulis bis sub circulo, vel ellipsi, $M B E G$, & trilineis, $M N G, G F E$, idest ad omnia quadrata figuræ, $N M B E F$,
 Per D. 23. erunt vt, HF , ad circulum, vel ellipſim, $M B E G$, simul cum reſtāngulo, dempto à parallelogrammo, $M G$, quadrante, $M A G$, & eo spatio, quo idem excedit duas tertias parallelogramm, $M G$.
 lib. 2.

Dico nunc hanc rationem esse, vt 21. ad 17. proximè, parallelogrammum enim, $M G$, ad dictum residuum est, vt 21. ad 2. proximè, vt ostendimus Theor. 12. parallelogrammum vero, HF , quadruplum est ipsius, $M G$, ergo, HF , ad illud residuum est, vt 84. ad 2. proximè, est autem idem, HF , ad circulum, vel ellipſim, $M B E G$, vt 14. ad 11. proximè .i. vt 84. ad 66. ergo parallelogrammum, HF , ad compositum ex circulo, vel ellipsi, $M B E G$, & dicto residuo est, vt 84. ad 68. proximè .i. vt 21. ad 17. proximè, ideò omnia quadrata, HF , ad omnia quadrata figuræ, $N M B E F$, sunt proximè, vt 21. ad 17. patet ergo propositum.

C O R O L L A R I V M I.

2. Lib. 8. **H**INC patet, quoniam omnia quadrata, HF , omnium quadratorum, $M F$, sunt quadrupla, quod sunt ad illa, vt, HF , ad $M G$, & ideò, si dempseris omnia quadrata, $M F$, ab omnibus quadratis figuræ, $N M B E F$, omnia quadrata, HF , ad residuum erunt, vt, HF , ad illud, quod relinquitur, dempto, $M G$, à circulo, vel ellipsi, $M B E G$, & residuo sapius dicto .s. quod remanet ablato ab, $M G$, quadrante, $M A G$, & eo excessu, quo idem superat, $M G$, est autem, HF , ad hac remanentia spatia proximè, vt 84. ad 47.

Constituē .n. HF , 84. erit circulus, vel ellipsis, $M B E G$, 66. & dictum residuum 2. vt supra ostendimus (proximè semper intellige) est autem, $M G$, 21. demas ergo 21. à composito ex 66. & 2. idest à 68. remanent 47 est ergo, HF , ad remanentia spatia, vt 84. ad 47. vnde omnia quadrata, $M F$, ad residuum, demptis omnibus quadratis, $M F$, ab omnibus quadratis figuræ, $N M B E F$, erunt, proximè, vt 84. ad 47. quod est propositum.

COROLLARIUM II:

HINC etiam patet, quoniam omnia quadrata, MF , ad omnia quadrata trilineorum, MNG , GFE , sunt, ut 21. ad 2. proximè, quod ad sui reliquum erunt, ut 21. ad 19. proximè, sunt autem omnia quadrata, HF , quadrupla omnium quadratorum, MF , & ided omnia quadrata, HF , ad residuum, demptis omnibus quadratis trilineorum, MNG , GFE , ab omnibus quadratis, MF , erunt proximè, ut 84. ad 19. sunt autem omnia quadrata, HF , ad residuum, demptis omnibus quadratis, MF , ab omnibus quadratis figura, $NMBEF$, ut 84. ad 47. proximè, ergo residuum primum .i. quod relinquitur, demptis omnibus quadratis trilineorum, MNG , GFE , ab omnibus quadratis, MF , ad residuum secundum .i. ad id, quod relinquitur, demptis omnibus quadratis, MF , ab omnibus quadratis figura, $NMBEF$, erit proximè, ut 19. ad 47. unde patet, &c.

THEOREMA XVII. PROPOS. XVIII.

EXponatur denuo figura Prop. 16. Dico omnia quadrata, HO , (regula eadem ibi sumpta) ad omnia quadrata figuræ compositæ ex parallelogrammo, MO , & semicirculo, vel semiellipsi, MBE , esse, ut quadratum, DO , ad rectangulum sub, DO , OE , vna cum rectangulo sub, OE , & sub excessu, quo dupla, EI , superat, EF , cum, i , quadrati, DE .

Quoniam ergo omnia quadrata figuræ, $CMBEO$, diuiduntur per lineam, ME , in omnia quadrata parallelogrammi, MO , in omnia quadrata semicirculi, vel semielliptis, MBE , & in rectangula bis sub, MO , & sub semicirculo, vel semiellipsi, MBE , patet primò, quod omnia quadrata, HO , ad omnia quadrata, MO , sunt, ut quadratum, DO , ad quadratum, OE . Insuper omnia quadrata, HO , ad omnia quadrata, HE , sunt ut quadratum, OD , ad quadratum, DE , omnia verò quadrata, HE , ad omnia quadrata semicirculi, vel semielliptis, MBE , sunt ut quadratum, DE , ad sui ipsius, i , ergo ex æquali omnia quadrata, HO , ad omnia quadrata semicirculi, vel semielliptis, MBE , sunt ut quadratum, OD , ad, i , quadrati, DE . Vltcrius omnia quadrata, HO , ad omnia

Per D. 17.
lib. 2.

Coroll. 1.
hu. us.

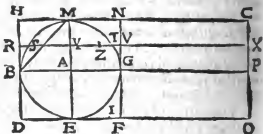
nia

nia quadrata, MO , sunt vt quadratum, DO , ad quadratum, OE ; omnia item quadrata, MO , ad rectangula sub, MO , & semicirculo, vel semiellipsi, MBE , sunt vt, OM , ad semicirculum, vel semiellipsim, MBE , .i. vt, OE , ad, EI , nam facta est, FE , ad, EI ,

Coroll. 1. vt, MF , ad semicirculum, vel semiellipsim, MGE ; ad eadem vero

16. lib. 2. rectangula bis sumpta, erunt vt, OE , ad duplam, EI ; igitur, colligendo, omnia quadrata, HO , ad omnia quadrata semicirculi, vel semiellipsi, MBE ,

ad omnia quadrata, MO , & ad rectangula bis sub semicirculo, vel semiellipsi, MBE , & sub, MO , simul sumpta .i. ad omnia quadrata figuræ, $CMBE O$, erunt vt quadratum,



OD , ad quadratum, OE , ad, $\frac{1}{2}$, quadrati, DE , cum rectangulo sub, OE , & dupla, EI , simul sumpta; quia verò semicirculus, vel semiellipsi, MGE , est plusquam dimidium parallelogrammi, MF , etiam, EI , erit plusquam dimidia, EF ; & ideò dupla, EI , excedet ipsam, EF , vel ipsam, DE , rectangulum ergo sub, OE , & dupla, EI , poterimus dividere in rectangulum sub, OE , & ED , & in rectangulum sub, OE , & excessu, quo dupla, EI , superat, ED , iungamus rectangulum sub, DE , EO , cum quadrato, EO , fiet rectangulum sub, DO , OE ; quadratum ergo, OE , $\frac{1}{2}$, quadrati, ED , & rectangulum sub, OE , & dupla, EI , commutata sunt vt in, $\frac{1}{2}$, quadrati, ED , in rectangulum sub, DO , OE , cum rectangulo sub, OE , & sub excessu duplæ, EI , super, ED . Omnia ergo quadrata, HO , ad omnia quadrata figuræ, $CMBE O$, erunt vt quadratum, DO , ad rectangulum sub, DO , OE , cum rectangulo sub, OE , & sub excessu duplæ, EI , super, ED , vel, EF , cum, $\frac{1}{2}$, quadrati, DE , quod erat ostendendum.



COROLLARIUM.

PATET autem omnia quadrata, HP , ad omnia quadrata figura, $BMC P$, esse pariter, ut quadratum, BP , ad rectangulum sub, BP , PA , una cum rectangulo sub, PA , & sub excessu, quo dupla, EI , superat, EF , cum, $\frac{1}{4}$, quadrati, BA . Et quoniam, iuncta, BM , obversum est omnia quadrata, HP , ad omnia quadrata trapezij, MB , PC , esse ut quadratum, BP , ad rectangulum, $BP A$, una cum $\frac{1}{4}$, qua-
drati, AB , idè eadem omnia quadrata, HP , ad residuum omnium quadratorum figura, quæ eisdem, $MCPB$, & curva, MB , continetur, demptis ab iisdem omnibus quadratis trapezij, $BMC P$, erunt ut idem quadratum, BP , ad rectangulum sub, AP , & sub excessu du-
pla, EI , super, EF , una cum, $\frac{1}{4}$, quadrati, BA . 28. lib. 2.

THEOREMA XVIII. PROPOS. XIX.

EXposita adhuc figura Propos. 15. & intra circulum, vel ellipsum, $M BEG$, ducta, RV , utrunq; regulæ, DF , parallela, diuidente ipsum circulum, vel ellipsum in duas utrunque portiones, SMT , SET . Dico omnia quadrata portionis, SMT , cum rectangulis bis sub eadem portione, & sub quadrilineo, $MTVN$, ad omnia quadrata portionis, SET , cum rectangulis bis sub eadem portione, & sub trilincis, TGV , GEF , esse ut portio, SMT , ad portionem, SET .

Quoniam .n. rectangula sub portione, SMT , & parallelogrammo, HV , ad omnia quadrata, HV , sunt ut portio, SMT , ad parallelogrammum, HV , rectangula verò sub, SMT , & parallelogrammo, HV , diuiduntur in rectangula sub, SMT , & sub, SMT , idest in omnia quadrata, SMT , & in rectangula sub, SMT , & sub quadrilincis, $HRS M$, $MTVN$, idest bis sub, SMT , & sub quadrilineo, $MTVN$; nam cum, ME , sit diameter, bifariam didit tum ordinatim applicatas in parallelogrammo, HF , tum in circulo, vel ellipsi, $M BEG$, & idè excessus earundem linearum tunc inde relinquuntur æquales, vnde in quadrilincis, $HRS M$, $MTVN$, lineæ in eadem rectitudine sumptæ sunt æquales, idè omnia quadrata portionis, SMT , & rectangula sub eadem, & sub qua-
dri-
Coroll. 1.
26. lib. 2.
per A. 23.
lib. 2.

Eol. 2.

drilineo, $MTVN$, bis sumpta, sunt ad omnia quadrata, HV , $\bar{v}E$ portio, SMT , ad parallelogrammum, HV . Omnia insuper quadrata, HV , ad omnia quadrata, VD , sunt vt, HR . ad, RD , .i. vt, HV , ad, VD ; eodem deniq; modo, quo supra, ostendemus omnia quadrata, RF , ad omnia quadrata portiois, SET , cum reſtangulis bis sub eadem, & sub trilineis, TGV , $G E F$, eſſe vt, RF , ad portionem, SET , ergo ex æquali, omnia quadrata portiois, SMT , cum reſtangulis bis sub eadem, & sub quadrilineo, $MTVN$, ad omnia quadrata portiois, SET , cum reſtangulis bis sub eadem, & sub trilineis, TGV , $G E F$, erunt vt portio, SMT , ad portionem, SET , quod ostendere opus erat.



COROLLARIUM.

HINC patet omnia quadrata parallelogrammorum in eadem altitudine cum portionibus, vel frustibus portionum existentium, ad omnia quadrata earundem simul cum reſtangulis bis sub iſdem, & sub quadrilineis, vel trilineis, quæ illis è regione respondent lateri, NF , adiacentia, veluti supra fuerunt quadri in eum, $MTVN$, & trilineum, TGV , $G E F$, eſſe, vt eadem parallelogramma ad easdem portiones, vel portionum frusta, quod ex supra dictis clarè patet.

THEOREMA XIX. PROPOS. XX.

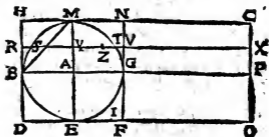
EXposita adhuc figura Propof. 16. & intra circulum, vel ellipſim ducta quacunq; regulæ parallela, RX , diuidente ipſum utcunq; in duas portiones, SMT , SET . Dico omnia quadrata portiois, SMT , cum reſtangulis bis sub eadem, & sub quadrilineo, $MTXC$, ad omnia quadrata portiois, SET , cum reſtangulis bis sub eadem, & sub quadrilineo, $TGE O X$, eſſe vt portio, SMT , ad portionem, SET .

Coroll. 1.
26. l. 2.

Fiat prius, vt, MV , ad ſemiportionem, MYT , ſic, VY , ad, YZ . Omnia ergo quadrata, MX , ad reſtangula sub, MX , & ſemiportionem, MYT , ſunt vt, MX , ad, MYT , diuide reſtangula sub,

sub, MX , & MYT , in omnia quadrata, MYT , & in rectangula sub, MYT , & sub, $MTXC$, omnia ergo quadrata, MX , ad omnia quadrata, MYT , cum rectangulis sub, MYT , & sub quadrilineo, $MTXC$, erunt vt, MX , ad, MYT , .i. vt, XY , ad, YZ , .i. vt quadratum, XY , ad rectangulum sub, XY , & YZ , eadem verò ad hæc quater sumpta erunt, vt quadratum, XY , ad rectangulum sub, XY , & quadrupla, YZ , sunt autem omnia quadrata semiportionis, MYT , quater sumpta æqualia omnibus quadratis portionis, MYT , & rectangula sub, MYT , & quadrilineo, $MTXC$, quater sumpta æqualia rectangulis sub eodem quadrilineo, & sub portione, MYT , bis sumptis, nam portio, MYT , bis continet semiportionem, MYT , ergo conuertendo, omnia quadrata portionis, MYT , cum rectangulis bis sub eadem, & quadrilineo, $MTXC$, ad omnia quadrata, MX , erunt vt rectangulum sub quadrupla, YZ , & sub, YX , ad quadratum, YX , omnia autem quadrata, MX , ad omnia quadrata, HV , cum rectangulis bis sub parallelogrammis, HV, VC , sunt vt vnum ad vnum .i. vt quadratum, YX , ad quadratum, RV , cum rectangulis bis sub, RV, VX , ergo ex æquali omnia quadrata portionis, MYT , cum rectangulis bis sub eadem, & sub

D. 23. huius.



quadrilineo, $MTXC$, ad omnia quadrata, HV , cum rectangulis bis sub parallelogrammis, HV, VC , erunt vt rectangulum sub, XY , & quadrupla, YZ , ad quadratum, RV , cum rectangulis bis sub, RV, VX , vel vt eorum dimidia .i. vt rectangulum sub, XY , & dupla, YZ , ad dimidium quadrati, RV , scilicet ad rectangulum sub, RV, VY , cum rectangulo sub, RV, VX , vel adhuc, vt horum dimidia (componere autem rectangulum sub, RV, VY , cum rectangulo sub, RV, VX , ex quibus fit rectangulum sub, RV, YX ,) .i. vt rectangulum sub, ZY, YX , ad rectangulum sub, RY, YX , .i. vt, ZY , ad, YR , .i. vt semiportio, MYT , ad, MV , vel vt portio, MYT , ad, HV .

Insuper omnia quadrata, HV , cum rectangulis bis sub parallelogrammis, HV, VC , ad omnia quadrata, RF , cum rectangulis bis sub parallelogrammis, RF, FX , sunt vt, HR , ad, RD , & tandem modo superiori ostendemus omnia quadrata, RF , cum rectangulis bis sub parallelogrammis, RF, FX , ad omnia quadrata portionis, MYT , cum rectangulis bis sub eadem, & sub quadrili-

G g neo,

neo, T G E O X, eise vt, R F, ad portio.nem, S E T, ergo ex æquali
omnia quadrata portio.nis, S M T, cum reſtangulis bis ſub eadem,
& ſub quadrilineo, M T X C, ad omnia quadrata portio.nis, S E T,
cum reſtangulis bis ſub eadem, & ſub quadrilineo, T G E O X,
erunt vt portio, S M T, ad portio.nem, S E T, quod oſtendere o-
portebat.

C O R O L L A R I V M.

H I N C patet omnia quadrata parallelogrammorum in eadem al-
titudine cum portio.nibus, vel portio.num fruſtibus exiſtentium,
vna cum reſtangulis bis ſub iſdem parallelogrammis, & reliquis pa-
rallelogrammis illis in directum exiſtentibus, ad omnia quadrata por-
tio.num, vel fruſtorum eorundem; ſimul cum reſtangulis bis ſub iſdem;
& ſub quadrilineis illis in directum iacentibus, veluti fuerunt quadri-
lineum, M T X C, T G E O X, eſſe; vt dicta parallelogramma ad di-
ſtis portio.nes, vel portio.num fruſta; quod ex prædiſtis clarè patet;
Vnde ex.g. omnia quadrata, R G, ſimul cum reſtangulis bis ſub paral-
lelogrammis, R G, G X, ad omnia quadrata fruſti, S B G T, cum re-
ſtangulis bis ſub; S G B T, & quadrilineo, T G, P X, erunt vt paral-
lelogrammum, R G, ad fruſtum, S B G T, hoc .n. pariter oſtendetur,
veluti probatum eſt omnia quadrata, H V, ſimul cum reſtangulis bis
ſub, H V, V C, ad omnia quadrata portio.nis, S M T, ſimul cum re-
ſtangulis bis ſub eadem, & ſub quadrilineo, M T X C, eſſe vt, H V,
ad portio.nem, S M T, vnde manuſcriptum eſt, quod in hoc Corollario
colligitur.

THEOREMA XX. PROPOS. XXI.

S I in circulo, vel ellipſi aptetur reſta linea, per cuius ex-
trema puncta ducantur duæ reſtæ lineæ, quæ ſint (exi-
ſtente apta parallela vni axium, vel diametrorum) paralle-
læ ſecundo axi, vel diametro, quæ ſumatur pro regula: Re-
ſtæ angula ſub portio.nem minori abſciſſa per aptatam, & ſub
quadrilineo, quod aptata, & duabus dictis parallelis vſque
ad curuam circuli, vel ellipſis productis, & ab iſdem inclu-
ſa curua comprehenditur, in circulo, erunt æqualia reſtan-
gulis ſub duobus triangulis per diametrum quadrati, vel
rhombi (& hoc in ellipſi cum diametri coniugate ſe oblique
ſecabunt, quibus latera dicti rhombi ſint æquidistantia) ab
eadem

eadem aptata descripti in iisdem constitutis: In ellipsi vero ad eadem rectangula, erunt vt quadratum secundi axis, vel diametri, ad quadratum primæ.

Sit primò circulus, $ABFH$, & in eo vtcunque aptata recta, AB , Defic. v
4. Elem. parallela diametro, ER , & per puncta, A, B , producantur vsq; ad circumferentiam, HF , duæ, AH, BF , parallelæ secundæ diametro, ST , quæ sumatur pro regula, quia autem circulus est, $ESRT$, ideo coniugatæ diametri, ER, ST , se secant ad angulos rectos, & sunt coniugati axes, & ideo, AH, BF , sunt perpendiculares ipsi, AB ; super, AB , ergo sit descriptum quadratum, AD , & in eo ducta diameter, AD . Dico ergo rectangula sub portione, ASB , & quadrilineo, $ABFH$, esse æqualia rectangulis sub duobus triangulis, ABD, AVD , sumatur enim in, AB , vtcunq; punctum, M , & per, M , ducatur ipsi, BF , parallela, CG , secans, AD , in, N ; VD , in, O , & curuam circuli in, CG , quia ergo duæ, AB, CG , in circulo se secant in puncto, M , rectangulum, CMC , est æquale rectangulo, BMA , & quia, AM , est æqualis ipsi, MN , & MB , ipsi, NO , rectangulum, AMB , est æquale rectangulo, MNO , ergo rectangulum, CMG , erit æquale rectangulo, MNO , idem de cæteris probabitur, ergo rectangula sub portione, ACB , & quadrilineo, $ABFGH$, erunt æqualia rectangulis sub triangulis, ABD, AVD , quod est propositum in circulo.



ss. 3. cit.

Sit nunc in inferiori figura ellipsis, $ESRT$, centrum, X , axes, Velut in
circulo. vel diametri coniugate, ER , prima, ST , secunda, sit autem in ipso aptata, AB , parallela ipsi, ER , per cuius extrema puncta, A, B , productæ sint vsque ad curuam ellipsis duæ, AH, BF , parallelæ secundæ axi; vel diametro, ST ; sit insuper descriptum quadratum, vel rhombus, AD , cuius latera diametris, ER, ST , sint parallela, & in eo ducta diameter, AD , & per puncta, E, S , sint etiam ductæ tangentés, EY, SY , coincidentes in, Y , quæ erunt parallelæ diametris, ER, ST , .i. YE , ipsi, ST , & YS , ipsi, ER ; erit er-

Ex 3. Co-go, vt quadratum, EY , ad quadratum, YS , ita rectangulum, TZ sic. p. 17. S , ad rectangulum, BZA , eodem modo (sumpto in, AB , utcumque puncto, M , & per, M , ducta, CMG , parallela ipsi, BF ,) sequetur rectangulum, GMC , ad rectangulum, BMA , esse vt quadratum, EY , ad quadratum, YS , ergo rectangulum, TZS , ad rectangulum, BZA , erit vt rectangulum, GMC , ad rectangulum, BMA , & sic de reliquis ostendemus. i. rectangula sub portione, ASB , & quadrilineo, $AHTFB$, ad rectangula sub omnibus abscissis, AB , & residuis abscissarum eiusdem. i. ad rectangula sub triangulis, ABD , AVD , (sunt. n. rectangula sub omnibus abscissis, AB , & residuis abscissarum eiusdem, æqualia rectangulis sub duobus triangulis, ABD , AVD ,) erunt vt rectangulum, TZS , ad rectangulum, AZB , idest vt quadratum, EY , ad quadratum, YS ; vel vt quadratum, SX , ad quadratum, XE , vel vt quadratum, ST , ad quadratum, ER ; ergo rectangula sub portione, ASB , & quadrilineo, $AHTFB$, ad rectangula sub triangulis, ABD , AVD , erunt vt quadratum, ST , ad quadratum, ER ; quod ostendere oportebat.

Corol. 2.
Prop. 19.
lib. 2.

C O R O L L A R I V M.

HINC patet, quoniam probauimus, omnia quadrata, AD , sexcupla esse rectangulorum sub triangulis, ABD , AVD , quod in circulo eadem quadrata sint sexcupla rectangulorum sub portione, ASB , & quadrilineo, $AHTFB$. In ellipsi verò, quia pariter omnia quadrata, AD , rectangulorum sub triangulis, ABD , AVD , sunt sexcupla. i. sunt ad illa, vt cubus, AB , ad sui ipsius sextam partem, insuper rectangula sub triangulis, ABD , AVD , ad rectangula sub portione, ASB , & quadrilineo, $AHTFB$, sunt vt quadratum, ER , conuertendo ad quadratum, ST ,. i. vt sexta pars cubi, AB , ad eiusdem talem partem, ad quam ipsa sexta pars sit, vt quadratum, ER , ad quadratum, ST , hinc ex equali omnia quadrata, AD , in ellipsi, ad rectangula sub portione, ASB , & quadrilineo, $AHTFB$, erunt vt cubus, AB , ad sui ipsius eam partem, ad quam eiusdem cubi, AB , sexta pars sit veluti quadratum, ER , ad quadratum, ST . Verum si in ellipsi diametri non sint axes, vice cubi, AB , concludemus omnia quadrata, AD , ad rectangula sub portione, ASB , & quadrilineo, $AHTFB$, esse vt parallelepipedum sub altitudine, AB , basi rhombo quod ab ipsa, AB , describitur, ad sui ipsius eam partem, ad quam eiusdem parallelepipedum pars sexta sit veluti quadratum, ER , ad quadratum, ST ,

Cor. 24.
lib. 2.

THEOREMA XXI. PROPOS. XXII.

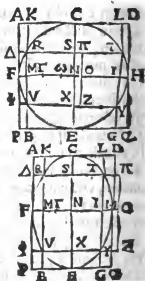
S intra parallelogrammum, quod circulo, vel ellipsi sit circumscriptum, ducatur lateribus eiusdem parallela quædam recta linea, per circuli, vel ellipsis centrum non transiens, altero reliquorum laterum regula existente. Omnia quadrata parallelogrammi, quod maiori portioni circuli, vel ellipsis iam dicti, remanent circumscriptum, ad omnia quadrata figuræ compositæ ex maiori portione, & duobus trilineis, qui ad basim eiusdem hinc inde extra constituentur, demptis eorundem trilineorum omnibus quadratis, erunt in circulo, ut parallelepipedum sub basi parallelogrammi dictæ portioni maiori circumscripto, altitudine eiusdem portionis diametro ad cylindricum sub basi eadem maiori portione, altitudine differentia diametrorum maioris, ac minoris factarum portionum, vna cum sexta parte cubi basis eiusdem portionis. In ellipsi vero erunt, ut parallelepipedum sub basi parallelogrammi maiori portioni similiter circumscripto, altitudine eiusdem portionis diametro, ad cylindricum sub basi eadem maiori portione, altitudine differentia diametrorum maioris, ac minoris factarum portionum, vna cum ea parte cubi basis eiusdem portionis, ad quam sexta pars eiusdem cubi sit, ut quadratum primæ diametri ad quadratum secundæ, vel, si diametri non sint axes, vna cum ea parte parallelepipedi sub altitudine basi eiusdem portionis, ac sub basi rhombo ab eadem descripto, ad quam eiusdem parallelepipedi pars sexta sit, ut quadratum primæ diametri ad quadratum secundæ.

Sit ergo circulus, vel ellipsis, $C F E H$, cui sit circumscriptum parallelogrammum, $A Q$, & centrum sit, N , diametri autem transeuntes per puncta contactuum laterum circumscripti parallelogrammi, & per centrum, N , sint, $C E, F H$; sit autem, $F H$, regula, cui insistent, & lateribus, $A P, D Q$, parallela intra ipsum ducta sit, $L G$. Dico ergo omnia quadrata parallelogrammi, $A G$, ad omnia quadrata figuræ, $L C F E G$, demptis omnibus quadratis trilineorum, $L T, Y G E$, esse, in circulo, ut parallelepipedum sub basi paral-

parallelogrammo, AG , altitudine, FI , ad cylindricum sub basi portione, $TCFEY$, altitudine, MI , vna cum, $\frac{1}{2}$, cubi, TY . In ellipsi vero, vt parallelepipedum sub basi parallelogrammo, AG , altitudine, FI , ad cylindricum sub basi portione, $TCFEY$, altitudine, MI , vna cum ea parte cubi, TY , ad quam eiusdem cubi sexta pars sit, vt quadratum, CE , primæ diametri, ad quadratum secundæ. scilicet ad quadratum, FH , vel, si diametri non sint axes, vna cum ea parte parallelepipedum sub, TY , & rhombo, RZ , ad quam illius pars sexta sit, vt quadratum, CE , primæ diametri ad quadratum secundæ. Ducantur per, T, Y , ipsi, PQ , parallelæ, $T\Delta, Y\phi$, secantes curuam, CFE , in punctis, R, V , quæ iungantur recta, RV , producta in, B, K , quoniam ergo, EC , est diameter, ad quam ordinatiim applicantur, RT, VY , eas quoq; bifariam secabit, est autem, ST , æqualis, XY , ob parallelogrammum, SY , ergo, VX , erit etiam æqualis ipsi, RS , & tota, VY , toti, RT , cui etiam est parallela, ergo, RV, TY , sunt etiam æquales, & parallelæ, estque, RV , in, M , bifariam secta.

Diuidamus igitur omnia quadrata figuræ, $LCFEG$, demptis omnibus quadratis trilineorum, CLT, EGY , in omnia quadrata figuræ, $LCRT$, demptis omnibus quadratis trilinei, LCT , in omnia quadrata figuræ, $GEVY$, demptis omnibus quadratis trilinei, EY , & in omnia quadrata figuræ, TR
 Per D. 23. FVY . Rursus per rectam, RV , diuiduntur omnia quadrata figuræ, $TRFVY$, in omnia quadrata, YR , in omnia quadrata portione, RFV , & in reſtangula bis sub, YR , & portione, RFV , his separatis, ad eorum singula comparemus nunc omnia quadrata parallelogrammi, KG .

Lib. 2. Igitur omnia quadrata, KG , ad omnia quadrata, RY , sunt vt, KB , ad, RV , vel vt parallelogrammum, KG , ad parallelogrammum, RY ; omnia inſuper quadrata, KG , ad omnia quadrata, KT , sunt vt, BK , ad, KR , .i. vt, KG , ad, KT ; item omnia quadrata, KT , ad omnia quadrata figuræ, $LCRT$, demptis omnibus quadratis trilinei, LCT , .i. ad omnia quadrata portione, RCT , cum reſtangulis bis sub eadem, & sub trilineo, CLT , sunt vt, KT ,
 ad



ad portionem, RCT , ergo ex æquali omnia quadrata, KG , ad omnia quadrata figuræ, $L CRT$, demptis omnibus quadratis trilinei, CLT , erunt vt, KG , ad portionem, RCT . Eodem modo ostendemus omnia quadrata, KG , ad omnia quadrata figuræ, $VEGY$, demptis omnibus quadratis trilinei, EGY , esse vt, KG , ad portionem, VEY , quæ conferua.

Cor. 19
huius.

Omnia insuper quadrata, KG , ad omnia quadrata, RY , vt probauimus, sunt vt, KG , ad, RY , item omnia quadrata, RY , ad rectangula sub, RY , $R\phi$, sunt vt, RY , ad $R\phi$, & tandem rectangula sub, $R\phi$, RY , ad rectangula sub portione, RFV , & sub, RY , sunt vt, $R\phi$, ad portionem, RFV , ergo ex æquali omnia quadrata, KG , ad rectangula sub portione, RFV , & sub, RY , erunt vt, KG , ad portionem, RFV , ergo, colligendo, omnia quadrata, KG , ad omnia quadrata figurarum, $L CRT$, $VEGY$, demptis omnibus quadratis trilineorum, CLT , EGY , & ad omnia quadrata, RY , & ad rectangula semel sub portione, RFV , & sub, RY , erunt vt, KG , ad portiones, RCT , VEY , RFV , & ad rectangulum, RY , .i. vt, KG , ad portionem, $TCFEY$.

Coroll. 2
26. l. 2.

Coroll. 1.
26. l. 2.

Reliquum est, vt comparemus omnia quadrata, KG , ad omnia quadrata portione, RFV , & ad rectangula sub eadem, & sub, RY , quia autem, RV , æquatur ipsi, TY , portio, RFV , æquatur portioni, THY , etiam in ellipfi, quia, RV , TY , sunt parallelæ, idè omnia quadrata portione, RFV , sunt rectangula sub portione, RFV , & sub portione, THY , quibus si iunxeris rectangula sub eadem portione, RFV , & sub, RY , componentur rectangula sub eadem portione, RFV , & sub quadrilineo, $RTHYV$. Nunc vel, RV , est æqualis ipsi, VY , & sic, RY , erit quadratum, siue rhombus, vel, RV , non est æqualis ipsi, VY , & tunc in ipsa, VY , producta; si opus sit sumatur, VZ , æqualis ipsi, VR , & ducta per, Z , $Z\Pi$, ipsi, RV , parallela, sit constitutum, RZ , quadratum, vel rhombus ipfius, RV : Omnia ergo quadrata, KG , ad omnia quadrata, RZ , habent rationem compositam ex ratione quadrati, KL , ad quadratum, $R\Pi$, vel ad quadratum, RV , & ex ratione ipfius, KB , ad, RV , quæ duæ rationes componentur rationem parallelepipedi rectanguli sub altitudine, BK , basi autem quadrato, KL , ad cubum, RV . Si autem, CE , FH , sint tantum diametri, sic dicemus, nempe, Omnia quadrata, KG , ad omnia quadrata, RZ , rhombi habent rationem compositam ex ratione, KL , ad, $R\Pi$, bis sumpta, & ex ratione, KB , ad, RV , quæ tres rationes componunt rationem parallelepipedi sub altitudine, KL , basi parallelogrammo, KG , ad parallelepipedum sub altitudine, RV , basi autem rhombo, RZ : Omnia verò quadrata, RZ , in

A. 13. l. 2.

Diffn. 12.
l. 1.

11. l. 2.

D. Cor. 4.
Gen. 34.
l. 2.

13. huius.

cir-

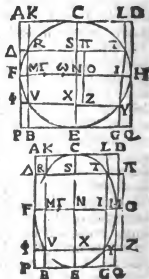
circulo sunt sextupla reſtangularum ſub portione, R F V, & quadrilineo, R T H Y V, .i. ſunt ad illa, vt cubus, R V, ad ſui ipſius ſextam partem. In ellipſi verò omnia quadrata, R Z, ad reſtangulara ſub portione, R F V, & quadrilineo, R T H Y V, ſunt vt cubus, R V, vel parallelepipedum ſub altitudine, R V, baſi rhombo, R Z, ad ſui ipſius eam partem, ad quam ſexta pars eiufdem cubi, vel parallelepipedi ſit, vt quadratum, C E, primæ diametri, ad quadratum, F H, ſecundæ; ergo ex æquali in circulo omnia quadrata, K G, ad reſtangulara ſub portione, R F V, & ſub quadrilineo, R T H Y V, erunt vt parallelepipedum ſub altitudine, B K, baſi quadrato, K L, vel (quod idem eſt) vt parallelepipedum ſub, L K, & reſtangolo, K G, ad, $\frac{1}{2}$, cubi, R V. In ellipſi verò eadem erunt, vt parallelepipedum ſub altitudine, L K, baſi parallelogrammo, K G, ad eam partem cubi, R V, vel dicti parallelepipedi ſub, R V, & rhombo, R Z, ad quam eiufdem cubi, vel parallelepipedi ſexta pars ſit, vt quad. C E, ad quadratum, F H.

Sunt autem omnia quadrata, K G, ad omnia quadrata figurarum, R C L T, V E G Y, dempſis omnibus quadratis trilineorum, C L T, E G Y, vna cum omnibus quadratis, R Y, & cum reſtangularis ſub portione, R F V, & ſub, R Y, ſemel, vt, K G, ad portionem, T C F E Y, vt oſtendimus .i. ſumpta, K L, communi altitudine, vt parallelepipedum ſub altitudine, K L, baſi parallelogrammo, K G, ad cylindricam ſub eadem altitudine, K L, & ſub baſi portione, T C F E Y, ergo, colligendo omnia quadrata, K G, ad omnia quadrata portionum, R C T, V E Y, cum reſtangularis bis ſub iſdem, & ſub trilineis, C L T, E G Y, inſuper ad omnia quadrata, R Y, cum reſtangularis ſub, R

G. B. Cor.
4. Gen.
#4. l. 2.

#4. l. 2.

Y, & portione, R F V, ſemel, & ad reſtangulara ſub eadem portione, R F V, & quadrilineo, R T H Y V, id eſt ad omnia quadrata portionis, R F V, cum reſtangularis iterum ſub eadem, & ſub, R Y, quia reſtangulara ſub portione, R F V, & quadrilineo, R T H Y V, ſeparantur per lineam, T Y, in reſtangulara ſub, R Y, & portione, R F V, & ſub portione, T H Y, & portione, R F V, quæ ſunt omnia quadrata portionis, R F V, .i. (his omnibus in vnam ſummam col.



collectis) ad omnia quadrata figuræ, $LCFEG$, demptis omnibus quadratis trilineorum, CLT, EGY , erunt vt parallelepipedum sub altitudine, KL , basi parallelogrammo, KG , ad cylindricum sub altitudine, KL , basi portione, $TCFEY$, vna cum $\frac{1}{2}$, cubi, RV , 56. Lib. 1.
 in circulo. In ellipsi autem, vt idem parallelepipedum ad eundem cylindricum, vna cum ea parte cubi, RV , vel parallelepipedum sub, RV , & rhombo, RZ , ad quam eiusdem cubi, vel parallelepipedis sexta pars sit, vt quadratum, CE , ad quadratum, FH : Omnia autem quadrata, AG , ad omnia quadrata, KG , sunt vt parallelepipedum sub altitudine, AL , basi parallelogrammo, AG , ad parallelepipedum sub altitudine, LK , basi parallelogrammo, KG , ergo ex æquali pariter omnia quadrata, AG , ad omnia quadrata figuræ, $LCFEG$, demptis omnibus quadratis trilineorum, CLT, EGY , erunt in circulo, vt parallelepipedum sub altitudine, AL , vel, FI , basi autem parallelogrammo, AG , ad cylindricum sub altitudine, LK , vel, MI , basi autem portione, $TCFEY$, vna cum $\frac{1}{2}$, cubi, RV , vel, TY . In ellipsi verò erunt, vt parallelepipedum sub altitudine, FI , basi autem parallelogrammo, AG , ad cylindricum sub altitudine, MI , basi autem ipsa portione, $TCFEY$, vna cum ea parte cubi, RV , vel, TY , siue parallelepipedum sub altitudine, TY , & basi rhombo, RZ , ad quam eiusdem cubi, vel parallelepipedum sexta pars sit, vt quadratum, CE , ad quadratum, FH ; quod ostendere oportebat.

THEOREMA XXII. PROPOS. XXIII.

EXposita figura circuli Theorematis superioris, & in eo sumpta vtcunq; portione minori, RFV , cæteris, prout stant, suppositis. Dico omnia quadrata, ΔV , ad omnia quadrata portionis, RFV , esse, vt sexquialtera, FM , ad reliquum diametri, MH , maioris portionis, ab eodem dempta recta linea, ad quam tripla, MN , sit, vt parallelogrammum, ΔV , ad portionem, RFV .

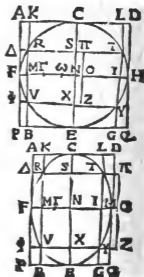
Rectangula enim sub, $\Delta V, VT$, ad omnia quadrata, RZ , sunt vt 5. Lib. 2.
 vnum ad vnum .i. vt rectangulum, FMI , ad quadratum, VZ , vel
 ad quadratum, RV , omnia item quadrata, RZ , sunt sexcupla re-
 ctangulorum sub portione, RFV , & quadrilineo, $RTHYV$, idest Corol. 1.
 sunt ad illa, vt quadratum, RV , ad sui, $\frac{1}{2}$, ergo ex æquali rectan- huius.
 gula sub, $\Delta V, VT$, ad rectangula sub portione, RFV , & quadri-
 lineo, $RTHYV$, erunt vt rectang. FMI , ad, $\frac{1}{2}$, quadrati, RV ,
H h vel

vel vt rectangulum, $F M N$, ad $\frac{1}{2}$, quadratorum, $R M$, $M V$, .i. ad $\frac{1}{2}$, quadrati, $R M$, .i. ad rectangulum sub; $F M$, & $\frac{1}{2}$, $M H$, .i. vt, $M N$, ad $\frac{1}{2}$, $M H$, vel vt tripla, $M N$, ad, $M H$. Insuper eadem rectangula sub, $\Delta V, V T$, ad rectangula sub portione, $R F V$, & sub, $R Y$, sunt vt parallelogrammum, ΔV , ad portionem, $R F V$, ergo si fiat, vt, ΔV , ad portionem, $R F V$, ita tripla, $M N$, ad, $M H$; rectangula sub, $\Delta V, V T$, ad reliquum, demptis rectangulis sub portione, $R F V$, & sub, $R Y$; à rectangulis sub eadem portione, & sub quadrilineo, $R T H Y V$, .i. ad rectangula sub portione, $R F V$, & portione, $T H Y$, .i. ad omnia quadrata portionis, $R F V$, .i. ut v. tripla, $M N$, ad, $M H$, omnia autem quadrata, ΔV , ad rectangula sub, $\Delta V, V T$, sunt vt quadratum, $F M$, ad rectangulum, $F M I$, .i. vt, $F M$, ad, $M I$, vel vt sexquialtera, $F M$, ad sexquialteram, $M I$, .i. ad triplam, $M N$, rectangula autem sub, $\Delta V, V T$, ad omnia quadrata portionis, $R F V$, sunt vt tripla, $M N$, ad, $M H$, ergo ex æquali omnia quadrata, ΔV , ad omnia quadrata portionis, $R F V$, erunt vt sexquialtera ipsius, $F M$, ad, $M H$, quæ est residuum ipsius, $M H$, dempta, $H M$, ad quam tripla, $M N$, est vt, ΔV , ad portionem, $R F V$, quod ostendere opus erat.

Coroll. 1.
25. l. 2.

14. l. 2.

2. l. 2.



THEOREMA XXIII. PROPOS. XXIV.

Exposita denuò figura circuli Th. 21. ostendendum est omnia quadrata portionis minoris, $R F V$, vtcunque sumptæ regula diametro .i. $F M$, ad omnia quadrata eiusdem regula basi .i. $R V$, esse vt rectangulum sub, M , & sub basi, $R V$, ad tria quadrata lineæ, $R M$, cum quad. $M F$.

ex autem. Omnia .n. quadrata portionis, $R F V$, regula, $F M$, ad omnia quadrata, ΔV , regula eadem, sunt vt, M , ad sexquialteram, $F M$, .i. vt, $\frac{1}{2}$, $M H$, ad, $F M$; omnia item quadrata, ΔV , regula, $F M$,

FM, ad omnia quadrata eiusdem parallelogrammi; ΔV , regula,
 RV, sunt vt, FM, ad, RV, ergo ex æquali omnia quadrata por-
 tionis, RFV, regula, FM, ad omnia quadrata, ΔV , regula, R
 V, erunt vt, $\frac{1}{2}$, ωM , ad, RV, vel vt, $\frac{1}{2}$, ωM , ad, RM, .i. sum-
 pta, RM, communi altitudine, vt rectangulum sub, $\frac{1}{2}$, ωM , &
 sub, RM, ad quadratum, RM, vel ad rectangulum, FMH;
 omnia verò quadrata, ΔV , regula, RV, ad omnia quadrata por-
 tionis, RFV, regula eadem, iurt vt, HM, ad compositam ex,
 $\frac{1}{2}$, HM, & $\frac{1}{2}$, MF, .i. sumpta, MF, communi altitudine, vt re-
 ctangulum, FMH, ad rectangulum sub, FM, & sub composita ex,
 $\frac{1}{2}$, HM, & $\frac{1}{2}$, MF, erant autem omnia quadrata portionis, RFV,
 regula, FM, ad omnia quadrata, ΔV , regula, RV, vt rectangulum
 sub, $\frac{1}{2}$, ωM , & sub, RM, ad rectangulum, FMH, ergo ex æquali
 omnia quadrata portionis, RFV, regula, FM, ad omnia quadrata
 eiusdem, regula, RV, erunt vt rectangulum sub, $\frac{1}{2}$, ωM , & sub, R
 M, ad rectangulum sub, FM, & sub composita ex, $\frac{1}{2}$, HM, & $\frac{1}{2}$,
 MF, .i. vt rectangulum sub tota, ωM , & sub, RM, ad rectangu-
 lum sub, FM, & sub composita ex, $\frac{1}{2}$, FM, & sexquialtera, MH,
 .i. & sub composita ex, $\frac{1}{2}$, FM, & sexquialtera, MI, & sexquial-
 tera, IH, porrò sexquialtera, IH, cum, $\frac{1}{2}$, FM, efficit duas, FM,
 IH, quibus si iunxeris, MI, detur astam de sexquialtera ipsius, MI,
 fiet tota, FH, cum, MN, æqualis dimidio, FM, & sexquialtera,
 MH: Omnia ergo quadrata portionis, RFV, regula, FM, ad om-
 nia quadrata eiusdem portionis, regula, RV, erunt vt rectangulum
 sub, ωM , & sub, RM, ad rectangulum sub, FM, & sub composita
 ex, FH, MN, .i. ad rectangulum sub, FM, & sub, MN, sub,
 FM, & sub, MH, & ad quadratum, FM: quia verò rectangulum,
 FMH, æquatur quadrato, RM, erunt omnia illa quadrata, vt re-
 ctangulum sub, ωM , & sub, RM, ad quadratum, RM, quadra-
 tum, ME, & rectangulum sub, FM, MN, vel vt istorum dupla .i.
 vt rectangulum sub, ωM , & sub, RV, ad quadratum, RM, qua-
 dratum, MV, duo quadrata, FM, & duo rectangula sub, FM, M
 N, .i. vnum sub, FM, MI, cui si iunxeris vnum de duobus quadra-
 tis ipsius, FM, componetur rectangulum, FMH, quod est æqua-
 le quadrato, RM. Sunt ergo omnia quadrata portionis, RFV, re-
 gula, FM, ad omnia quadrata eiusdem portionis, regula, RV, vt
 rectangulum sub, ωM , & sub, RV, ad tria quadrata, RM cum
 vno quadrato, FM, quod ostendere oportebat.

29. Lib. 2.

Vlt. 2. El.

1. Hüius.

3. Lib. 20

Ex vlt. 2.

Elem.

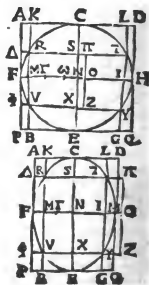
12. Elem.

Vlt. 2. El.

THEOREMA XXIV. PROPOS. XXV.

IN figura circuli, & ellipsis eiusdem Theor. 21. ostendendum est, ibi appositis retentis, sumpta tamen utcumque portione minori, R F V, & regula diametro eiusdem portionis .f. F M; omnia quadrata parallelogrammi, ΔV , ad omnia quadrata portionis, R F V, esse vt quadratum, F M, ad spatium, quod remanet, dempto reſtangolo sub, I M, & sub, F M, (ad quam, F M, ſit, vt, ΔV , ad portionem, R F V,) à reſtangolo sub, F M, & sub, δ , ipſius, M H .

- Sit igitur vt, ΔV , ad, R F V, ita, F M, ad, M Γ ; omnia ergo quadrata, ΔV , ad reſtangula sub, ΔV , V T, ſunt vt quadratum, F M, ad reſtangulum, F M I, reſtangula inſuper ſub, ΔV , V T, ad reſtangula ſub portione, R F V, & ſub, V T, ſunt vt, ΔV , ad portionem, R F V, .i. vt, F M, ad, M Γ , .i. ſunt pta, M I, communi altitudine, vt reſtangulum, F M I, ad reſtangulum, $\Gamma M I$, ergo ex æquali omnia quadrata, ΔV , ad reſtangula ſub portione, R F V, & ſub, V T, erunt vt quadratum, F M, ad reſtangulum, $\Gamma M I$, quod ſerua .
14. Lib. 2. Vltcrius omnia quadrata, ΔV , ad omnia quadrata, V Π , ſunt vt quadratum, F M, ad quadratum, M O, vel ad quadratum, R V, .i. ad quatuor reſtangula ſub, R M, M V: Omnia inſuper quadrata, V Π , ad reſtangula ſub portione, R F V, & quadrilineo, R T H Y V, ſunt vt ſex quadrata, C E, ad quadratum, F H, nam in circulo omnia quadrata, R Z, ſunt ſextupla reſtangulorum ſub portione, R F V, & quadrilineo, R T H Y V, & ideo ſunt ad illa, vt ſex quadrata, C E, ad quadratum, C E, vel ad quadratum, F H, in ellipſi verò omnia quadrata, R Z, ſunt ad reſtangula ſub portione, R F V, & quadrilineo, R T H Y V, vt ſex quadrata, C E, ad quadratum, F H, quod elicitur ex Prop. 21. huius. Quia
- 57.3. Con. vero reſtangulum, R M V, ad reſtangulum, F M H, (tum in circulo,



culo, tum in ellipfi) est vt quadratum, CN, ad quadratum, NF, vel vt quadratum, CE, ad quadratum, FH, ideo sex rectangula, RMV, ad rectangulum, FMH, erunt vt sex quadrata, CE, ad vnum quadratum, FH, .i. erunt vt omnia quadrata, RZ, ad rectangula sub portione, RFV, & quadrilineo, RTHYV, vt autem sunt sex rectangula, RMV, ad rectangulum, FMH, ita quatuor rectangula, RMV, ad, $\frac{2}{3}$, rectanguli, FMH, .i. ad rectangulum sub, FM, & $\frac{2}{3}$, MH, ergo omnia quadrata, RZ, ad rectangula sub portione, RFV, & quadrilineo, RTHYV, erunt vt quatuor rectangula, RMV, ad rectangulum sub, FM, & $\frac{2}{3}$, MH, erant autem omnia quadrata, ΔV , ad omnia quadrata, RZ, vt quadratum, FM, ad quatuor rectangula sub, RMV, ergo ex æquali omnia quadrata, ΔV ; ad rectangula sub portione, RFV, & quadrilineo, RTHYV, erunt vt quadratum, FM, ad rectangulum sub, FM, & sub, $\frac{2}{3}$, MH, eadem verò omnia quadrata, ΔV , ad rectangula sub portione, RFV, & sub, VT, ostentia sunt esse, vt quadratum, FM, ad rectangulum, TMI, (ex quibus habemus rectangulum sub, TMI, minus esse rectangulo sub, FM, & sub, $\frac{2}{3}$, MH, nam rectangula sub portione, RFV, & sub, VT, minora sunt rectangulis sub eadem portione, RFV, & quadrilineo, RTHYV,) ergo omnia quadrata, ΔV , ad residuum omnium rectangulorum sub portione, RFV, & quadrilineo, RTHYV, demptis rectangulis sub portione, RFV, & sub, VT, .i. ad rectangula sub vtriq; portionibus, RFV, THY, .i. ad omnia quadrata portionis, RFV, erunt vt quadratum, FM, ad residuum ipatium, dempto rectangulo, TMI, à rectangulo sub, FM, & sub, $\frac{2}{3}$, MH, (hoc autem vocetur residuum rectangulum huius Theor.) quod ostendere opus erat.

THEOREMA XXV. PROPOS. XXVI.

EXposita adhuc figura Theor. antecedentis, ostendemus omnia quadrata portionis, RFV, regula, FM, ad omnia quadrata eiusdem portionis, regula basi, esse vt parallelepipedum sub basi residuo rectangulo antecedentis Theor. altitudine tripla, MH, ad parallelepipedum sub basi rectangulo ipsius, FM, duæ in, RV, altitudine linea composita ex, MH, HN.

Omnia .n. quadrata portionis, RFV, regula, FM, ad omnia quadrata eiusdem, regula, RV, habent rationem compositam ex Defic. 12. ca, quam habent omnia quadrata, RFV, ad omnia quadrata, Δ lib. 1.

V, re-

V, regula, FM, .i. ex ea, quam habet residuum rectangulum Theor. antecedentis ad quadratum, FM, & ex ratione omnium quadratorum, ΔV, regula, FM, ad omnia quadrata eiusdem, ΔV, regula, RV, .i. ex ea, quam habet, ΔR, ad, RV, vel, sumpta, ΔR, communi altitudine ex ea, quam habet quadratum, ΔR, vel quadra-

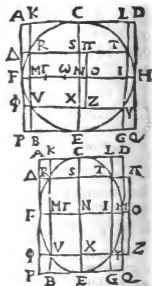
29. l. 2.

1. huius.

Defin. 22.
l. 1.

G. Cor. 4.
gen. 34.
l. 2.

um, FM, ad rectangulum sub, FM, RV; & tandem ex ea, quam habent omnia quadrata, ΔV, ad omnia quadrata portionis, RFV, .i. ex ea, quam habet, MH, ad compositam ex, $\frac{1}{2}$, MH, & $\frac{1}{2}$, FM. Rationes autem rectanguli residui Theor. antecedentis ad quadratum, FM, & quadrati, FM, ad rectangulum sub, FM, RV, resoluuntur in rationem rectanguli residui Theor. antecedentis ad rectangulum sub, FM, RV, quæ iuncta rationi ipsius, MH, ad compositam ex, $\frac{1}{2}$, MH, & $\frac{1}{2}$, FM, componit rationem parallelepedi sub basi residuo rectangulo Theor. antecedentis, altitudine, MH, ad parallelepedum sub basi rectangulo sub, FM, RV, & sub composita ex, $\frac{1}{2}$, MH, & $\frac{1}{2}$, FM: Triplicentur horum parallelepedoru altitudines, fiet pro antecedentis altitudine tripla, MH, & pro altitudine parallelepedi consequentis tripla dimidia, MH, .i. sexquialtera ipsius, MH, .i. sexquialtera, MI, & sexquialtera, IH, cum, $\frac{1}{2}$, FM, porro si sexquialteræ, MI, iunxeris sexquialteram, IH, cum dimidia, FM, .i. duplam, IH, quoniam sexquialtera, IH, est, MI, IN, si inquam illi iunxeris bis, IH, componetur altitudo consequentis parallelepedi, quæ erit, MH, HN; omnia ergo quadrata portionis, RFV, regula, FM, ad omnia quadrata eiusdem, regula, RV, erunt ut parallelepedum sub basi residui rectangulo Theor. antecedentis, altitudine tripla, MH, ad parallelepedum sub basi rectangulo, sub, FM, RV, altitudine linea composita ex, MH, HN, tum in circuli, tum ellipsis figura, quæ attendere oportebat.



THEO-

THEOREMA XXVI. PROPOS. XXVII.

AD huc etiam exponatur figura circuli, & ellipsis Theor. 21. ostendemus, .n. omnia quadrata figuræ, LCFE G, demptis omnibus quadratis trilineorum, CLT, YGE, regula, FI, ad omnia quadrata portionis, TCFEY, regula basi, FY, esse, in circulo, vt cylindricus sub, IM, & portione, TCFEY, vna cum, $\frac{1}{2}$, cubi, TY, ad parallelepipedum sub altitudine, FI, basi verò rectangulo sub, FI, & sexquitertia duarum, IH, HN. In ellipsi verò habere rationem compositam ex ea, quam habet cylindricus sub, IM, & portione, TCFEY, vna cum ea parte cubi, TY, vel parallelepipedo sub, RV, & rhombo, RZ, ad quam eiusdem cubi, vel parallelepipedo sexta pars sit, vt quadratum, CE, ad quadratum, FH, ad parallelepipedum sub altitudine, LG, basi parallelogrammo, AG; & ex ea, quam habet quadratum, FH, ad rectangulum sub, FI, & sub sexquitertia duarum, IH, HN.

Omnia quadrata namq; figuræ, LCFG, demptis omnibus quadratis trilineorum, CLT, YGE, ostensa sunt esse ad omnia quadrata, AG, regula, FI, vt cylindricum sub, MI, & sub basi portione, TCFEY, vna cum, $\frac{1}{2}$, cubi, TY, in circulo (in ellipsi verò vna cum ea parte cubi, TY, vel parallelepipedo sub, RV, & rhombo, RZ, ad quam eiusdem, $\frac{1}{2}$, sit vt quadratum, CE, ad quadratum, FH,) ad parallelepipedum sub, LA, & parallelogrammo, AG. Vltcrius omnia quadrata, AG, regula, FI, ad omnia quadrata eiusdem, AG, regula, LG, sunt vt, AL, ad, L^{29.1.2.} G, .i. vt parallelepipedum sub, AL, & parallelogrammo, ALG, ad parallelepipedum sub, LG, & parallelogrammo eodem; ALG, ergo ex æquali omnia quadrata figuræ, LCFEG, demptis omnibus quadratis trilineorum, CLT, YGE, regula, FI, ad omnia quadrata, AG, regula, TY, erunt vt cylindricus sub, MI, & portione, TCFEY, vna cum, $\frac{1}{2}$, cubi, TY, in circulo, in ellipsi verò vna cum dicta parte cubi, TY, vel parallelepipedo sub, RV, & rhombo, RZ, ad parallelepipedum sub, LG, & parallelogrammo, ALG.

Tandem omnia quadrata, AG, ad omnia quadrata portionis, 21. huius.

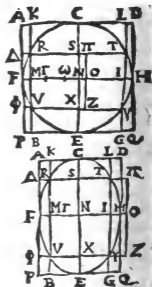
TC

TCFEY, regula, TY, sunt vt rectangulum sub, FN, & tripla, NH, . . vt, $\frac{1}{2}$, quadrati, FH, ad rectangulum sub, FI, & sub, IHN, . . vt totum quadratum, FH, ad rectangulum sub, FI, & sub sexquiertia ipsarum, IHN, .i. in circulo, vt quadratum, AP, (quod æquatur quadrato, FH,) ad idem rectangulum idest sumpta, FI, communi altitudine, vt parallelepipedum sub, FI, & quadrato, AP, .i. vt parallelepipedum sub, AP, vel, LG, & parallelogrammo rectangulo sub, FI, siue, AL, & LG, ad parallelepipedum sub, FI, & sub basi rectangulo sub, FI, & sub sexquiertia, IHN, ergo ex æquali omnia quadrata figuræ, LCFEG, demptis omnibus quadratis trilineorum, CLT, YGE, regula, FI, ad omnia quadrata portionis, TCFEY, regula, TY, erunt vt cylindricus sub, MI, & sub portione, TCFEY, vna cum, $\frac{1}{2}$, cubi, TY, ad parallelepipedum sub, FI, & sub rectangulo sub, FI, & sub sexquiertia, IHN; & hoc in circulo.

In ellipsi autem eadem habebunt rationem. compositam ex iam dicta ratione .s. ex ratione cylindrici sub, MI, & sub portione, TCFEY, vna cum ea parte cubi, vel parallelepipedum sub, RV, & rhombo, RZ, ad quam eiusdem, $\frac{1}{2}$, sit vt quadratum, CE, ad quadratum, FH, ad parallelepipedum, sub, LG, & parallelogrammo, AG, & ex ratione quadrati, FH, ad rectangulum sub, FI, & sub sexquiertia ipsarum, IHN; quas duas rationes in circulo in vna reuoluimus, quia in eo quadratum, FH, æquatur quadrato, AP, quod cum in ellipsi non verificetur, ideò has duas rationes componentes pro ipsa ellipsi retinimus; quod ostendere oportebat.

THEOREMA XXVII. PROPOS. XXVIII.

IN eadem superioris figura ostendemus, tum in circulo, tum in ellipsi, omnia quadrata figuræ, LCFEG, demptis omnibus quadratis trilineorum, CLT, YGE, regula, FI,



FI, ad omnia quadrata circuli, vel ellipsis, CFEH, esse vt cylindricum sub, MI, & portione, TCFEY, vna cum, $\frac{1}{2}$, cubi, TY, pro circulo, pro ellipsi verò, vna cum sæpius dicta parte cubi, TY, vel parallelepipedo sub, RV, & rhombo, RZ, ad, $\frac{1}{2}$, parallelepipedo sub, AD, & parallelogrammo, AQ, idest, in circulo ad, $\frac{1}{2}$, cubi, FH.

Omnia.n. quadrata figuræ, LCFEG, demptis omnibus quadratis trilineorum, CLT, YGE, ad omnia quadrata, AG, sunt vt cylindricus sub, MI, & portione, TCFEY, vna cum, $\frac{1}{2}$, cubi, TY, ^{22. huius;} pro circulo, pro ellipsi verò, vna cum sæpius dicta parte cubi, TY, vel dicti parallelepipedo, ad parallelepipedum sub, LA, & parallelogrammo, AG; omnia verò quadrata, AG, ad omnia quadrata, AQ, sunt vt quadratum, AL, ad quadratum, AD, .i. sumpta, A ^{9. Lib. 2.} P, communi altitudine, vt parallelepipedum sub, PA, & quadrato, AL, ad parallelepipedum sub, PA, & quadrato, AD, hoc est, vt parallelepipedum sub, LA, & parallelogrammo, AG, ad parallelepipedum sub, DA, & parallelogrammo, AQ, omnia autem quadrata, AQ, omnium quadratorum circuli, vel ellipsis, CFEH, sunt sexquialtera .i. sunt ad ea, vt parallelepipedum sub, AD, & parallelogrammo, AQ, ad eiusdem, $\frac{2}{3}$, ergo ex æquali omnia quadrata figuræ, LCFEG, demptis omnibus quadratis trilineorum, CLT, YGE, ad omnia quadrata circuli, vel ellipsis, CFEH, erunt vt cylindricus sub, MI, & portione, TCFEY, vna cum, $\frac{1}{2}$, cubi, TY, pro circulo, pro ellipsi verò, vna cum sæpius dicta parte cubi, TY, vel parallelepipedo sub, RV, & rhombo, RZ, ad, $\frac{2}{3}$, parallelepipedo sub, AD, & parallelogrammo, AQ, .i. pro circulo ad, $\frac{2}{3}$, cubi, AD, vel cubi, FH, quod ostendere opus erat. Coroll. 2. huius.

THEOREMA XXVIII. PROPOS. XXIX:

SI parallelogrammo sit inscripta figura quæcunque, ita tamen, vt, sumpto vno laterum parallelogrammi pro regula, & ductis vtcunque ipsi regulæ parallelis intra parallelogrammum, earum quælibet, vel tota sit intra figuram inscriptam, vel eiusdem aliqua parte extra figuram existente, ac ad vnum laterum parallelogrammi terminante, ad latus eiusdem parallelogrammi prædicto oppositum terminet alia portio eiusdem, regulæ æquidistantis, sint autem duæ quæ-

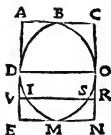
libet portiones extra figuram ad opposita latera terminantes, & in eadem recta linea constitutæ integræ, & inter se æquales: Omnia quadrata dicti parallelogrammi ad omnia quadrata inscriptæ figuræ, cum rectangulis bis sub eadem figura, & sub dictarum portionum ijs omnibus, quæ extra figuram ad vnum dictorum laterum oppositorum eiusdem parallelogrammi terminantur, erunt vt prædictum parallelogrammum ad inscriptam figuram.

Sit igitur parallelogrammum, AN , & illi inscripta vtcunq; figura, $BDMO$, & sumpta pro regula, EN , sit ducta vtcunq; intra parallelogrammum, AN , ipsa, DO , quæ cadat etiam tota intra figuram, $BDMO$, sit etiam ducta alia vtcunq; parallela ipsi, EN , nempe, VR , portiones autem eiusdem, VR , sint extra figuram, ad latera opposita, AE , CN , terminantes .s. V , S , R , quæ sint integræ, & inter se æquales. Dico omnia quadrata, AN , ad omnia quadrata figuræ, $BDMO$, cum rectangulis bis sub figuræ, $BDMO$, & sub trilineis, BCO , ONM , .i. sub omnibus portionibus, quæ terminant ad latus, CN , extra figuram, $BDMO$, constitutis, esse vt, AN , ad figuram, $BDMO$: Omnia enim quadrata, AN , ad rectangula sub, AN , & sub figura, $BDMO$, sunt vt, AN , ad figuram, $BDMO$, sed rectangula sub, AN , & sub figura, $BDMO$, diuiduntur in rectangula sub eadem figura, $BDMO$, & sub trilineis, BAD , DEM , sub eadem, & sub trilineis, BCO , ONM , & in rectangula sub eadem in eandem figuram .s. in omnia quadrata eiusdem figuræ, $BDMO$, quia verò linearum æquidistantium, regulæ, EN , portiones, quæ

Coroll. 1.

26. lib. 2.

As 23. lib. 2.



sunt in eadem recta linea extra figuram adjacentes lateribus oppositis, AE , CN , sunt & integræ, & æquales, ideo sicuti rectangulum, VIS , est æquale rectangulo, ISR , ita rectangula sub figura, $BDMO$, & trilineis, BAD , DEM , erunt æqualia rectangulis sub eadem figura, $BDMO$, & sub trilineis, BCO , ONM , sunt ergo rectangula sub, AN , & sub figura, $BDMO$, æqualia omnibus quadratis figuræ, $BDMO$, cum rectangulis bis sub eadem, & sub trilineis, BCO , ONM ; omnia autem quadrata, AN , ad rectangula sub, AN , & sub figura, $BDMO$, sunt vt, AN , ad figuram, $BDMO$; ergo omnia quadrata, AN , ad omnia quadrata si.

ra figuræ, B D M O, cum rectangulis bis sub eadem figura, & sub trilineis, B C O, O N M, erunt vt, A N, ad figuram, B D M O, quod ostendere opus erat.

T H E O R E M A XXIX. P R O P O S. XXX.

E Xponatur figura Theor. antecedentis, dimissis tamen re-
ctis lineis, D O, V R, & sit adhuc regula, E N, produ-
cantur autem ad easdem partes, A C, E N, in, H F, ita vt, C
H, sit æqualis, N F, iuncta igitur, H F, erit, H F, parallela
ipsi, C N, quoniam, C H, N F, sunt æquales, & parallelæ,
& erit parallelogrammum, A F, &, C F. Dico ergo omnia
quadrata, A N, cum rectangulis bis sub, A N, N H, ad om-
nia quadrata figuræ, B D M O, cum rectangulis bis sub ea-
dem, & sub quadrilineo, B O M F H, esse vt, A N, ad figu-
ram, B D M O.

Omnia quadrata. n. parallelogrammū, A N, ad omnia quadrata fi-
guræ, B D M O, cum rectangulis bis sub eadem, & sub trilineis, B C
O. O N M, sunt vt, A N, ad figuram, B D M O. Item rectangula
sub, A N, N H, ad rectangula sub figura, B D M O, & sub, N H,
sunt vt, A N, ad figuram, B D M O, & eadem rectangula sub, A N,
N H, bis sumpta ad rectangula sub figura, B D M O, & sub, N H,
bis sumpta erunt pariter, vt, A N, ad figuram, B D M O, .i. vt omnia
quadrata, A N, ad rectangula bis sub figura, B D M O, & sub trili-
neis, B C O, O N M, cum omnibus quadratis eiusdem figuræ, B D M
O, ergo vt vnum ad vnum, ita omnia ad omnia .i. vt omnia quadrata

Ex antec.
Coroll. r.
26. lib. 29

, A N, ad omnia quadrata figuræ, B D
M O, cum rectangulis bis sub eadem figu-
ra, & sub trilineis, B C O, O N M, ita om-
nia quadrata, A N, cum rectangulis bis sub,
A N, N H, ad omnia quadrata figuræ, B
D M O, cum rectangulis bis sub eadem, &
sub trilineis, B C O, O N M, & bis sub ea-
dem, & sub, N H, .i. ad rectangula bis sub
eadem, & sub quadrilineo, B O M F H;
sunt autem omnia quadrata, A N, ad om-
nia quadrata figuræ, B D M O, cum rectangulis bis sub eadem, & sub
trilineis, B C O, O N M, vt, A N, ad, B D M O; ergo omnia qua-
drata, A N, cum rectangulis bis sub, A N, N H, ad omnia quadrata
figuræ, B D M O, cum rectangulis bis sub eadem, & sub quadrilineo,



B O M F H, erunt vt, A N, ad figuram, B D M O, quod ostendere oportebat. Per hanc autem, & antecedentem Proposit. vniuersalius ostenduntur Propof. 15. 16. necnon Corollaria Prop. 19. & 20.

THEOREMA XXX. PROPOS. XXXI.

SI parallelogrammum fuerit ellipfi circumscriptum, ita tamen, vt eiusdem latera non tangant ellipfim in extremis punctis axium eiusdem; portiones coalternè tangentes erunt æquales; & si duabus oppositis tangentibus ducantur parallele abscedentes à reliquis coalternis tangentibus rectas lineas æquales, sumptas versus puncta contactuum; reſtangu- lum, quod continetur sub vnius parallelarum ea parte, quæ manet intra curuam ellipfis, & tangentem ex ea parte, & sub reliqua illi in directum manente intra ellipfim, erit æquale reſtangu- lo ad coalternam tangentem similiter sumpto.

Sit ergo ellipfis, B D M G, cui sit circumscriptum parallelogrammum, A R, ita tamen, vt puncta contactuum non sint puncta extrema axium eiusdem, tangant autem in punctis, B D M G, & iungantur, B M, D G, & quoniam, A C, F R, sunt tangentes parallelæ, vt etiam, A F, C R, idèd, B M, G D, per centrum ellipfis transibunt, sit earum communis sectio punctum, S, ergo, S, erit centrum ellipfis, cum, B M, G D, sint diametri.

Dico ergo portiones laterum parallelogrammi, A R, coalternè tangentes esse æquales. s. A D, ipsi, G R, A B, ipsi, M R, B C, ipsi, F M, &, C G, ipsi, D F; iungantur, B G, D M; in triangulis ergo, B S G, D S M, latus, B S, æquatur lateri, S M, & latus, G S, lateri, S D, item angulus; B S G, angulo, D S M, ergo bafis, B G, æquatur bafi, D M, & angulus, S B G, angulo, S M D, &, S G B, ipsi, S

D M, totus autem angulus, C B S, æquatur toti, F M S, sibi coalterno, ergo reliquus angulus, C B G, æquatur reliquo angulo, D M F, & similiter probabimus angulum, B G C, æquari angulo, M D F, ergo reliquus, B C G, æquabitur reliquo, D F M, (qui etiam sunt æquales, quia sunt anguli oppositi parallelogrammi, A R,) & idèd trianguli, B C G, D F M, erunt æquianguli, &, B G, D M, latera

ho-

Elicitur
ex 27. &
Cor.

A. l. Elem.



homologa sunt æqualia, ergo etiam, BC , æquabitur ipsi, FM , &, CG , ipsi, DF , est autem, AC , æqualis ipsi, FR , &, AF , ipsi, CR , ergo reliqua, AB , æquabitur reliquæ, MR , & reliqua, AD , reliquæ, GR ; sunt igitur portiones laterum parallelogramini, AR , coalterne tangentes inter se æquales.

Sumantur nunc vtunque duæ coalternè tangentes, AD , RG , & ab ipsis versus puncta contactuum, DG , abscindantur vtunque duæ rectæ æquales, PD , VG , & per puncta, PV , ducantur basi, FR , parallelæ, PQ , EV , secantes curuam ellipsis in punctis, HI , ipsa, PQ , & in punctis, NO , ipsa, EV . Quoniam ergo, AB , AD , tangunt ellipsim, $BDMG$, coincidentes in puncto, A , est autem, QP , parallela vni tangentium .i. ipsi, AB , secans curuam ellipsis in, H , & aliam tangentem in, P , rectangulum ergo, IPH , ad quadratum, PD , erit vt quadratum, BA , ad quadratum, AD , .i. vt quadratum, MR , ad quadratum, RG : consimili modo ostendemus rectangulum, NVO , ad quadratum, VG , esse vt quadratum, MR , ad quadratum, RG , .i. vt rectangulum, IPH , ad quadratum, PD , vel ad quadratum, VG , ergo rectangulum, IPH , est æquale rectangulo, NVO . Nunc ostendemus, PH , esse æqualem ipsi, OV , consideremus duo quadrilatera, $APXB$, $MTVR$, quæ sunt similia polygona, nam angulus, PAB , est æqualis angulo, MRV , &, ABX , ipsi, RM , tum, BXP , ipsi, MTV , & tandem, XP , A , ipsi, TVR , quæ facillè apparent, & duo latera, AB , MR , sunt æqualia, vt etiam, AP , RV , ergo reliqua latera erunt æqualia, quæ æqualibus adiacent angulis, vnde, TV , erit æqualis ipsi, PX , &, MT , ipsi, BX , vnde rectangulum, MTB , æquabitur rectangulo, MXB , & quoniam, vt rectangulum, MTB , ad rectangulum, MXB , ita quadratum, TO , ad quadratum, XI , quoniam, NO , HI , sunt parallelæ tangenti, AC , & ideò ordinatim applicatæ ad diametrum, BM , erit ergo quadratum, TO , æquale quadrato, XI , &, TO , ipsi, XI , vel, HX , ergo reliqua, OV , erit æqualis reliquæ, PH , & quia rectangulum, IPH , est æquale rectangulo, NVO , erit, IP , æqualis ipsi, NV , & quia, PH , est æqualis, OV , erit, HI , æqualis, NO , & ideò rectangulum, IHP , erit æquale rectangulo, NOV .

Vel breuius sic processisset demonstratio, dimisso Apollonij theoremate, ostenso .n. OV , esse æqualem ipsi, PH , &, TO , ipsi, XI , manet ostensum, NO , æquari ipsi, HI , quoniam, NO , HI , bifaria diuiduntur à diametro, BM , & ideo illicò manifestum euadit rectangulum, NOV , æquari rectangulo, IHP , quod ostendere oportebat.

163. Cor.

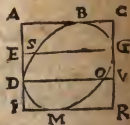
Ex 40. 1. lib. & eius. idè scho-lio.

Hinc patet nedum rectangulum, NOV , aequari rectangulo, IHP , sed etiam portiones interceptas tangentibus, & curua ellipsis esse inter se aequales, velut, OV , ipsi, PH .

THEOREMA XXXI. PROPOS. XXXII.

Exposita ellipsi, cum parallelogrammo illi circumscripto Theor. antecedentis, cæteris omissis, ostendemus, regula, FR , omnia quadrata parallelogrammi, AR , ad omnia quadrata ellipsis, $BDMG$, cum rectangulis bis sub eadem ellipsi, & sub trilineis, BCG , GRM , esse, vt parallelogrammum, AR , ad ellipsim, $BDMG$.

Coroll. 1. Ducantur à punctis contactuum regulæ, FR , parallelæ, GE , D
26. lib. 2. V ; omnia ergo quadrata, AR , ad rectangula sub ellipsi, $BDMG$,
& sub, AR , sunt vt, AR , ad ellipsim, $BDMG$; verum rectangula
A. 23. l. 2. sub ellipsi, $BDMG$, & sub, AR , sunt æqualia rectangulis sub el-
lipsi, $BDMG$, & sub duobus trilineis, BAD , DFM , item sub el-
lipsi, $BDMG$, & sub eadem .i. omnibus quadratis ellipsis, $BDMG$,
& sub eadem ellipsi, $BDMG$, & sub duobus trilineis, BCG ,
 GRM , verum rectangula sub ellipsi, $BDMG$, & sub trilineis, B
 AD , DFM , æquantur rectangulis sub eadem ellipsi, & sub trilineis, BCG , GRM ,
quod sic patet, quoniam enim, AD , RG ,
coalternè tangentibus sunt æquales, & ductis
ipsum, FR , parallelis intra ellipsim, ex ipsis
coalternè tangentibus, AD , RG , absin-
dentibus portiones æquales versus puncta
contactuum, rectangula sumpta, vt dictum
est in antecedenti Theor. sunt æqualia, ideò
& omnia omnibus erunt æqualia .i. rectan-
gula sub portione, $UGBD$, & trilineo, BAD , erunt æqualia re-
ctangulis sub portione, SMG , & sub trilineo, GRM , eadem ra-
tione rectangula sub portione, OMD , & trilineo, DFM , æquan-
tur rectangulis sub portione, SBG , & trilineo, BCG , ergo rectan-
gula sub ellipsi, $BDMG$, & duobus trilineis, BAD , DFM , equan-
tur rectangulis sub ellipsi, $BDMG$, & sub trilineis, BCG , GRM ;
ergo



ergo omnia quadrata, AR , ad omnia quadrata ellipsis, $BDMG$, cum reſtangulis bis ſub eadem, & ſub trilineis, BCG , GRM , erunt vt, AR , ad ellipſim, $BDMG$. Eodem modo, ſumpta pro regula, CR , oſtendemus omnia quadrata, AR , ad omnia quadrata ellipſis, $BDMG$, vna cum reſtangulis bis ſub eadem, & ſub trilineis, DAB , BCG , eſſe vt, AR , ad ellipſim, $BDMG$, quod oſtendere oportebat.

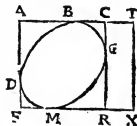
COROLLARIUM.

Hinc habetur omnia quadrata, AR , regula, FR , ad omnia quadrata ellipſis, $BDMG$, vna cum reſtangulis bis ſub eadem, & ſub trilineis, BCG , GRM , eſſe vt omnia quadrata, AR , regula, CR , ad omnia quadrata ellipſis, $BDMG$, vna cum reſtangulis bis ſub eadem, & ſub trilineis, DAB , BCG ; vtraq; enim oſtenſa ſunt eſſe, vt, AR , ad ellipſim, $BDMG$.

THEOREMA XXXII. PROPOS. XXXIII.

Aſumpta antecedentis figura, diſmiſſis lineis, EG , DV , producantur ad eandem partem, AC , FR , in, TX , ita vt, AT , ſit æqualis, FX , & iungatur, TX , ergo ipſa, AX , CX , erunt parallelogramma. Dico igitur, omnia quadrata, AR , cum reſtangulis bis ſub, AR , RT , ad omnia quadrata ellipſis, $BDMG$, cum reſtangulis bis ſub eadem, & quadrilineo, $BGMXT$, eſſe vt, AR , ad ellipſim, $BDMG$, regula, FX .

Omnia.n. quadrata, AR , ad reſtangula bis ſub ellipſi, $BDMG$, & ſub trilineis, BCG , GRM , vna cum omnibus quadratis eiufdem ellipſis, $BDMG$, ſunt vt, AR , ad ellipſim, $BDMG$, item reſtangula ſub, AR , RT , ad reſtangula ſub ellipſi, $BDMG$, & ſub, RT , ſunt vt, AR , ad ellipſim, $BDMG$, & eadem bis ſumpta ſunt pariter, vt, AR , ad ellipſim, $BDMG$, ergo omnia quadrata, AR , cum reſtangulis bis ſub, AR , RT , ad omnia quadrata ellipſis, $BDMG$, cum reſtangulis bis ſub eadem, & ſub trilineis, BCG , GRM , & cum reſtangulis bis ſub eadem, & ſub, RT , id eſt cum



Ex anteced.

Coroll. r.
26. lib. 2.

reſtang.

rectangulis bis sub eadem, & sub quadrilineo, $BGMXT$, erunt ut, AR , ad ellipfim, $BDMG$. Sic etiam fiet demonstratio, si producantur, FA , RC , similiter ac productæ sunt, AC , FR , quarum altera pro regula fumatur.

C O R O L L A R I V M.

Hinc patet, si, $BDMG$, non esset ellipsis, sed alia utcumque figura plana parallelogrammo, AR , inscripta, dummodo portiones laterum coalternè tangentes essent æquales, & rectangula sumpta ad coalternè tangentes, eo modo, quo dictum est in Theor. antecedenti, essent quoque æqualia, quod omnia quadrata, AR , ad omnia quadrata talis figuræ, cum rectangulis bis sub eadem, & sub trilineis adiacentibus lateri, quod non sumitur pro regula, erunt ut, AR , ad talem figuram; Veluti erunt etiam omnia quadrata, AR , cum rectangulis bis sub, AR , RT , ad omnia quadrata talis figuræ, cum rectangulis bis sub eadem, & sub quadrilineo simili ipsi, $BGMXT$, hæc enim eodem modo colligentur, quo pro ellipsi, $BDMG$, per demonstrationem collecta sunt, aderunt enim eadem principia, ex quibus demonstratio pro ellipsi pendebat: Exemplum facile haberi potest in figura ex duabus æqualibus circuli, vel ellipsis portionibus minoribus composita tali pacto, ut basis unius portionis alterius basi congruat, quæ quidem figura sit inscripta dicto rectangulo, cuiusque latera eam tangant non in punctis extremis axium, sed in quatuor alijs utcunq, vnde, &c.

THEOREMA XXXIII. PROPOS. XXXIV.

Quæcumque solida ad inuicem similia, genita ex figuris superius in hoc Libro Tertio consideratis, iuxta regulas ibidem assumptas, quarum patefacta est ratio omnium quadratorum, habent inter se rationem notam.

Quoniam enim alibi ostensum est, ut omnia quadrata duarum figurarum inter se sumpta cum datis regulis, ita esse solida ad inuicem similia genita ex iisdem figuris, iuxta eadem regulas, ideo cum in Theorematibus huius Libri inuenta est ratio omnium quadratorum duarum quarundam figurarum cum talibus regulis, colligimus etiam nunc eandem esse rationem duorum ad inuicem similiarum solidorum, quæ ex illis figuris iuxta eadem regulas genita dicuntur; Vt exempli gratia in Propos. I. conspectis, iterum eiusdem figuris, cum

ibi ostensum est, sumpta regula, DP , omnia quadrata portionis, DEP , ad omnia quadrata parallelogrammi, FP , esse vt composita ex sexta parte, EB , & dimidia, BR , ad ipsam, BR , ostensum etiam est solidum simile genitum ex portione, DEP , ad solidum sibi simile genitum ex parallelogrammo, FP , esse vt composita ex sexta parte, EB , & dimidia, BR , ad ipsam, BR . Cum verò ostensum est omnia quadrata portionis, EDP , ad omnia quadrata trianguli, DEP , esse vt composita ex dimidia totius, ER , & ipsa, BR , ad eandem, BR ; pariter ostensum est solidum simile genitum ex portione, EDP , ad sibi simile genitum ex triangulo, DEP , iuxta eandem regulas esse, vt composita ex dimidia totius, ER , & ipsa, BR , ad eandem, BR .

Cum verò in Corollario eiusdem Theorem. collectum est, omnia quadrata parallelogrammi, FP , esse lexquialtera omnium quadratorum portionis, DEP , (si, DP , per centrum, A , transeat) hæc verò esse dupla omnium quadratorum trianguli, DEP ; patet, quod etiam solidum simile genitum ex parallelogrammo, FP , lexquialterum erit solidi sibi similis geniti ex portione, DEP , iuxta eandem regulam, DP , hoc verò erit duplum solidi sibi similis geniti ex triangulo, DEP , iuxta eandem regulam, DP .

S C H O L I V M .

Quoniam verò solida ad inuicem similia genita ex duabus figuris planis, iuxta datas regulas, cotuplicia sunt, quocumque sunt figure similes, qua dicuntur, omnes figura similes duarum genitricium figurarum, cum eisdem regulis assumpta, iuxta quas dicta solida similia genita dicuntur, figurarum autem variationes nullo dato numero clauduntur, ideò nec horum similiarum solidorum variationes vllò dato coarctantur numero, vnde euentissimè apparet hanc demonstrandi methodum, ipsamque demonstrationem, infinitè (vt ita dicam) locupletem esse; vt igitur ad particularia solida similia descendamus, expendenda sunt ipsa figura, qua dicuntur (omnes figura similes, & c.) A. Def. 8. lib. 1.

patet igitur ex alibi à me ostensis, si figura assumpta sint omnes figura similes parallelogrammi, quod tunc ista erunt omnia plana cylindrici; si verò illa sint omnes figura similes trianguli (intellige in parallelogrammo, & triangulo vnum laterum pro regula, illa erunt omnia plana Conici; & si parallelogrammum sit rectangulum, & figura eadem erecta erit cylindricus rectus, scalenus autem nisi sit rectangulum, vel figura non eadem erecta; ex quo habes, qualescunque figuras intellexis esse eas, qua dicuntur omnes figura similes parallelogrammi, FP , regula, DP , vel trianguli, EDP , regula eadem, solidum genitum ex paralle-

logrammo, $F P$, quod dicimus *similare*, semper esse cylindricum, genitum verò ex triangulo, $D E P$, semper esse conicum, ut etiam accidit in omni parallelogrammo, & triangulo, dummodò regula sit unum laterum eorundem, solida igitur *similaria* genita ex parallelogrammis sunt cylindrici; genita verò ex triangulis sunt conici, genita inquam, regula uno laterum eorundem existente; quod si figura quæ dicuntur omnes figurae similes parallelogrammi dati, regula uno laterum, sint circuli, ille cylindricus erit cylindrus; & si, quæ dicuntur omnes figurae similes dati trianguli sint pariter circuli, regula uno laterum, conicus erit conus; nomine ergo communi hic cylindrus, & conus dicti sunt solida *similaria* nomine particulari dicti sunt cylindricus, & conicus, sed nomine magis particulari, & proprio dicuntur cylindrus, & conus, quotiescunque dictæ figurae sint circuli, iuxta alibi à me ostensa.

34.Lib.2.

Pariter si figurae genitrices solidorum sint circuli, vel ellipses, illa autem, quæ dicuntur omnes figurae similes earundem sumptæ cum datis regulis) sint pariter circuli, quorum describentes rectæ lineæ in figuris genitricibus sint eorundem diametri, solida *similaria* genita ex eisdem

46.Lib.1.

iuxta easdem regulas, erunt, alterum sphaera, quod scilicet gignitur ex circulo, alterum sphaeroides, quod scilicet gignitur ex ellipsi, si figurae similes rectæ secant axem ellipsis, & sint erectæ tum circulo, tum ellipsi; poterit etiam esse sphaeroides, etiamsi figurae similes non sint circuli, sed ellipses iuxta alibi ostensa; quæ igitur in hoc casu nomine communi dicuntur, solida *similaria* genita ex circulo, vel ellipsi iuxta datas regulas, nomine particulari, & proprio, dicuntur sphaera, vel sphaeroides:

47.Eiusd.
lib.1.

Et quæ pariter dicerentur nomine communi solida *similaria* genita ex portione tali, vel tali, iuxta talem regulam, portione inquam circuli, vel ellipsis, quotiescunque figura, quæ dicuntur, omnes figurae similes talis portionis iuxta eandem regulam, sint circuli erecti genitricibus, & figura genitrix portio circuli, erit, & dicetur nomine particulari, & proprio, portio sphaera; si verò figura genitrix sit ellipsis portio, & figurae similes sint circuli erecti genitricibus, rectæ axem portionis secantes, fiet portio sphaeroidis, quod si sint ellipses erectæ genitricibus, diametros habentes, ut postulat Propos.47. Lib.1. fiet etiam portio sphaeroidis: Sic igitur nominibus particularibus hæc solida vocari consueverunt.

46.Lib.2.

47.Lib.1.

Cum verò figurae similes non sunt neque circuli, neque ellipses sumpta, ut dictum est, sufficiet eadem vocare nomine communi solidi *similari*, &c. licet ad variationem, & nominationem similium figurarum, consequenter & eadem varia solida, variè nominari possent; fortè autem in sequentibus ex genitricum figurarum variatione varia nomina componemus, interim hæc teneantur, hoc animaduerso, quod in superioribus, dum sit sphaera, vel sphaeroides, vel eorundem portio, suppono lineas, quæ sunt in genitricibus figuris, & circulos; vel ellipses describunt,

bunt, esse eorundem axes. His autem prædemonstratis sequentia Corollaria colliguntur, quæ quidem cum Typographo deessent consueti huiusmodi caracteres, diuersis imprimi necesse fuit.

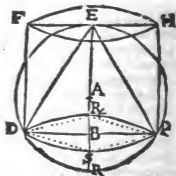
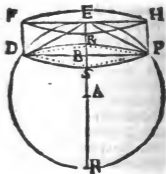
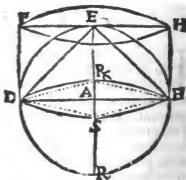
C O R O L L A R I V M I.

IN Propos. prima igitur, si supposuerimus, $P R D E$, esse circum, vel ellipsum, & axem, $E R$, & circa eandem in basi, $D P$, parallelogrammum, $F P$, quæ quidem sit basis portionis, $D E P$, re-
 cte secans axim, $E R$, deinde intellexerimus omnes figuras similes
 portionis, $D E P$, esse circulos diametros in figura genitrice, $D E P$,
 (cui sint erecti) sitos habentes, tunc, $F P$, erit figura genitrix solidi
 similis, quod erit cylindrus rectus, & $D E P$, erit figura genitrix
 solidi prædicto similis, quod erit portio sphaeræ, vel sphaeroidis,
 cuius axis, $E R$; & quia patet ex supradictis, quam rationem habeat
 solidum simile genitum ex, $F P$, ad sibi simile genitum ex, $D E$
 P , iuxta regulam, $D P$, ideo patet ex supradictis, quam rationem ha-
 beat cylindrus, $F P$, ad portionem sphaeræ, vel sphaeroidis, $D E P$,
 siue, $D P$, transeat per centrum, A , siue non. Similiter si supposue-
 rintus, $E D R P$, esse sphaeroidem, & $E R$, non axim, sed diame-
 trum, & secari per ellipsum, $D S P R$, obliquè ad diametrum, $E R$,
 & circa eandem diametrum, $E B$, in eadem basi ellipsi, $D S P R$,
 esse cylindricum, $F P$, secari autem cylindricum, & portionem sphae-
 roidis planis parallelis ipsi ellipsi, $D P$, quæ intelligatur erecta plano,
 $D E P R$, conceptæ in ipso cylindrico figuræ erunt omnes figuræ si-
 miles parallelogrammi, $F P$, & quæ fiunt in portione sphaeroidis, D
 $E P$, erunt omnes figuræ similes portionis, $D E P$, omnes inquam
 elliptes similes ellipsi, $D P$, (est enim idem, siue intelligas has figu-
 ras similes describi omnibus lineis figurarum genitricium, $F P$, $D E$
 P , siue percipias eandem produci per sectionem corporum per plana
 factam ipsi, $D P$, parallelè) & quia patet ratio harum omnium simi-
 lium figurarum, siue ellipsium inter te ex supradictis, & subinde soli-
 dorum similium genitorum ex, $F P$, & portione, $D E P$, quorum
 unum est cylindricum, alterum est portio sphaeroidis secta plano, D
 P , ideo patet, quam rationem habeat cylindricus, $F P$, ad portio-
 nem, $D E P$, .i. esse eandem, quam habet composita ex sexta parte,
 $E B$, & dimidia, $B R$, ad ipsam, $B R$, & hoc, siue, $E R$, sit axis,
 siue non; Quod si, $D P$, transeat per centrum, A , cylindricum, $F P$,
 esse sexquialterum portionis sphaeræ, vel sphaeroidis, $D E P$. Iisdem
 vijs patebit conum, siue conicum, $E D P$, ad portionem sphaeræ, vel
 sphaeroidis, $D E P$, esse vt, $B R$, ad compositam ex, $B R$, & dimi-
 dia totius, $E R$, quod si, $D P$, per centrum transeat, conum, vel ce-

Corollar.
47. lib. 3.

nicum, EDP , esse subduplum portionis sphaerae, vel sphaeroidis, DEP ; hæc autem etiam ab alijs ostenta sunt. Verum si figurae similes iam dictæ non sint circuli, vel ellipses, sed aliæ utcumque figurae, vt ex.g. quadrata, veluti in figuris intra ellipses exemplificare volui, diametros homologas in figuris genitricibus habentia, adhuc eadem rationes supradictis erunt inter hæc solida ad inuicem simularia genita ex FP , & portione, DEP , siue ex triangulo, EDP , & portione, DEP , bases habentia quadratas; patet autem hic, quod solidum simulare genitum ex FP , basem habens rectilineam, sicuti est prisma, ita & hoc nomine vocari potest magis particulari, veluti & solidum simile genitum ex triangulo, EDP , nomine pyramidis vocari potest, dum basim habet rectilineam.

Deniq; vniuersalissimè habetur ratio quorumcumque duorum solidorum genitorum ex FP , & portione, DEP , siue ex triangulo, EDP , & portione, DEP , iuxta regulam, DP , quacumque in similibus figuris variatione facta. Quæ autem in huius Theorematis declaratione animaduersa sunt, memoria teneantur, nam & sequentia consimili methodo, sed breuiori declarabimus; sufficiat autem tot figurarum variationes in duabus tantum exemplificasse, quas solidorum indicant bases, nempe circulus, & quadratum, inscriptum eidem circulo, habens vtrumq; diametrum in figura genitrice, in posterum enim cum sine figurarum confusione id ægrè fieri possit vna tantum positione contenti erimus,

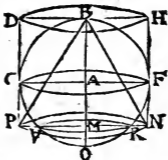


ea nempe, qua omnes figuræ similes circuli esse supponuntur, cæteras ergo variationes ex his facillimè avidus veritatis indagator proprio Marte comprehendere poterit, quæ pro huius Theor. declarat. ad seq. quoq; dilucidat. satis esse reor.

COROLLARIUM II.

IN Propositione secunda, exposita figura Coroll. antec. conformiter, patet, quam rationem habeat solidum sibi simile genitum ex, DN , idest cylindricus in basi figura descripta à basi, PN , cuius latus est, HN , ad solidum sibi simile genitum ex portione, $VCBFR$, .i. (si omnes figuræ similes ipsius, DN , sint circuli diametros in, DN , habentes, & omnes figuræ similes portionis, $VCBFR$, sint pariter circuli rectè axem, BO , secantes, & diametros in eadem portione sitos habentes, qui circuli sint genitricibus erecti) cylindrus, DN , ad portionem sphaeræ, vel sphaeroidis, $VCBFR$, vel si figuræ sint recti lineæ, patet ratio, quam

habet prisma, DN , ad solidum sibi simile genitum ex portione, $VCBFR$, circuli, vel ellipsis, $BCOF$. Ductis autem rectis, BP , PN , patet similiter ratio, quam habet conus, BP , ad portionem sphaeræ, vel sphaeroidis, $VCBFR$, siue pyramis, BP , ad solidum simile genitum ex triangulo, BP , (intellige temper hæc solida inuicem genita iuxta regulas in Theorematis assumptas, ne toties id repetatur) siue tandem, quam habet uniuersaliter solidum simile genitum ex, DN , vel triangulo, BP , ad solidum sibi simile genitum ex portione, $VCBFR$, & hoc si, BO , sit axis, quod si tantum sit diameter eadem rationes colligentur ad modum superioris Theorematis. Est ergo in figura cylindricus, DN , ad portionem sphaeræ, vel sphaeroidis, $VCBFR$, vel prisma, DN , ad solidum simile genitum ex portione, $VCBFR$, vel tandem quodlibet solidum simile genitum ex, DN , siue quilibet cylindricus genitus ex, DN , ad solidum sibi simile genitum ex portione, $VCBFR$, ut rectangulum sub, BA , & tripla, AO , ad rectangulum sub, BM , & sub composita ex, MO , OA . Solidum vero simile genitum ex triangulo, BP , siue sit conus, siue pyramis, siue tantum conicus, ad sibi simile genitum ex portione, $VCBFR$,



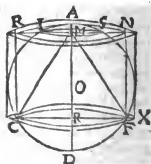
siue

sive hoc sit portio sphaeræ, vel sphaeroidis, sive tantum solidum simile genitum ex portione, $V C B F R$, ut rectangulum, $B A O$, sive quadratum, $B A$, ad rectangulum sub, $B M$, & sub composita ex, $M O$, $O A$, nam sicut rectangulum, $B A O$, est tertia pars rectanguli sub, $B A$, & tripla, $A O$, ita solidum simile genitum ex triangulo, $B P N$, est tertia pars solidi similis geniti ex, $D N$, unde patet, &c.

I Propos.
4. lib. 2.

C O R O L L A R I V M I I I.

IN Proposit. tertia colligitur, quam rationem habeat solidum simile genitum ex, $B F$, sive sit cylindrus, sive prisma, sive tantum conicus, ad sibi simile genitum ex portione circuli, vel ellipsis, $I C F S$, sive hoc sit frustum sphaeræ, vel sphaeroidis, sive tantum solidum simile genitum ex portione, $I C F S$, sive, $A D$, sit axis sive non, quæ eadem est ei, quam habet rectangulum, $D R A$, ad rectangulum sub, $D R$, & sub composita ex, $\frac{1}{2}$, $R M$, & ex, $M A$, vna cum rectangulo sub, $R M$, & sub composita ex, $\frac{1}{2}$, $R M$, & $\frac{1}{2}$, $M A$. Solidum autem simile genitum ex triangulo, $M C F$, sive sit conus, sive prisma, sive tantum conicus, ad sibi simile genitum ex portione, $I C F S$, sive hoc sit frustum sphaeræ, vel sphaeroidis, sive tantum solidum simile genitum ex tali portione, $I C F S$, erit ut rectangulum, $D R A$, ad rectangulum sub composita ex, $M D$, $D R$, & sub sexquialtera, $M A$, vna cum rectangulo sub composita ex, $M D$, & dupla, $D R$, & sub, $\frac{1}{2}$, $M R$, sive, $A D$, sit axis, sive tantum diameter, quæ iuxta antecedentium declarationem facile percipi possunt.

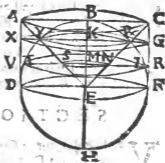


C O R O L L A R I V M I V.

IN Propos. quarta patet ratio, quam habet solidum simile genitum ex, $G X$, quod apparet in superioris figura, ad sibi simile genitum ex portione, $I C F S$, quæ ratio ibi conspiciatur.

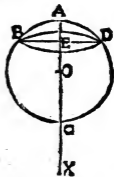
COROLLARIUM.

IN Corollario Propof. quinta, fi fupponamus notam rationem, quam habent omnia quadrata, AF , ad omnia quadrata trianguli, AEC , vel quam habent omnia quadrata, XR , ad omnia quadrata trapezij, $YSNR$, veluti iam eam notam reddidimus, colligimus, quam rationem habeant omnia quadrata, AF , ad reliquum, demptis omnibus quadratis semicirculi, vel femiellipsis, DBF , & quam rationem habeant omnia quadrata, XR , ad reliquum, demptis omnibus quadratis portionis, YTI , & ideo patet, quam rationem habeant omnia quadrata, AF , ad omnia quadrata semicirculi, vel femiellipsis, DBF , & quam rationem habeant omnia quadrata, XR , ad omnia quadrata portionis, YTI , unde apparet, quam rationem habeat solidum simile genitum ex, AF , siue fit cylindrus, siue prilma, siue tantum cylindricus, ad solidum sibi simile genitum ex semicirculo, vel femiellipsi, DBF , siue hoc fit hæmisphærium, siue hæmisphæroides, siue tantum solidum simile illi, genitum ex, DBF . Item patet, quam rationem habeat solidum simile genitum ex, XR , quodcunque illud fit, ad sibi simile genitum ex portione, YTI . Eodem pacto manifesta fiet ratio solidi similis geniti ex, AG , ad sibi simile genitum ex portione, YBR , & ita in reliquis. Inuentæ igitur sunt alio modo à prædictis, rationes solidorum inuicem similarium genitorum ex parallelogrammis in basi æquali secundæ diametro constitutis .i. in basi æquali ipsi, DF , & circa eodem axes, siue diametros utcunque portionum, YBR , YRl , DTl , & DBF , quod explicare opus erat, & in supraposita figura modo solito declaratum est, sed tantum unico exemplo ne ipsa confunderetur.



COROLL. VI. SECTIO PRIOR.

IN Propof. fexta, & eiusdem figura apparet folidum fimilare ge-
nitum ex circulo, vel ellipfi, $A B C$
 D , fiue fit fphæra, vel fphæroides, vel
tantum folidum fimilare, ad folidum fibi
fimilare genitum ex altera portio num, B
 $A D$, $B C D$, vtramuis, vt ex, $B A D$,
fiue hoc fit portio fphære, vel fphæroi-
dis, vel tantum folidum fimilare genitum
ex, $B A D$, effe vt parallelepipedum fub
altitudine, $X C$, bafi quadrato, $C A$, ad
parallelepipedum fub altitudine, $X E$, bafi
quadrato, $E A$, vel vt cubus, $A C$, ad pa-
rallelepipedum fub altitudine tripla, $E C$,
bafi quadrato, $A E$, cum cubo, $A E$.

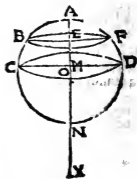


SECTIO POSTERIOR.

VNde colligitur in Corollario folidum fimilare genitum ex por-
tione, $B A D$, ad fibi fimilare genitum ex portio-
ne, $B C D$, effe vt parallelepipedum fub altitudine, $X E$, bafi quadrato, $E A$, ad
parallelepipedum fub altitudine, $O A E$, bafi quadrato, $E C$, qua-
liacunque fint illa folidi fimilaria, fiue fit, $A C$, axis, fiue tantum
diameter.

COROLLARIUM VII.

IN Propof. feptima colligitur foli-
dum fimilare genitum ex portio-
ne, $B A F$, ad fibi fimilare genitum ex
portio ne, $C A D$, fiue hæc folidi fint
portiones fphære, vel fphæroidis, fiue
tantum folidi fimilaria, fiue, $A N$,
fit axis, fiue tantum diameter, effe vt
parallelepipedum fub altitudine, $X E$,
bafi quadrato, $E A$, ad parallelepepe-
dum fub altitudine, $X M$, bafi qua-
drato, $M A$, vt exemplificatur in præ-
fenti figura more folito.

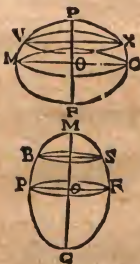


COROLLARIUM VIII.

IN Propof. octaua difcimus à data fphæra, vel fphæroide, vel folido quocunq; genito ex circulo, vel ellipfi, iuxta regulam, quæ fit vna ex ordinatim applicatis, abcindere portionem, quæ ad folidum fimilare fibi genitum ex triangulo in eadem bafi, & circa eundem axim, vel diametrum cum portione conftituito, habeat datam rationem, quam oportet eſſe maiorem ſexquialtera; quæ omnia ibi clarè patent, & ideo figuram non appono.

COROLL. IX. SECTIO PRIOR.

IN Propof. nona patet ratio, quam habet folidum fimilare genitum ex circulo, vel ellipfi, iuxta regulam primum axim, vel diametrum, ad folidum fimilare genitum ex eodem, iuxta ſecundum axim, vel diametrum tamquam regulam, ſiue hæc folida ſint ſphæra, vel ſphæroides, vel tantum folida ſimilaria, quæ in his appoſitis figuris clarè patent, in quarum vna conſpici poteſt ſphæroides prolatum, in altera oblongum, prædicta autem ratio eſt ea, quam habet prima axis, vel diameter ad ſecundam axim, vel diametrum: quæ etiam pro reliquis folidis ad inuicem ſimilariſſimis manifeſta ſunt.



SECTIO POSTERIOR.

IN Corollario autem eiufdem Theorematis colligimus eſſe notam rationem omnium quadratorum duarum portionum circuli, vel ellipſis abſciſarum per lineas, quarum vna fit parallela primo, altera ſecundo axi, vel diametro, quales ſint in appoſitis figuris portiones, BMS , $V PX$, vnde etiam nota erit ratio ſolidorum ſimilariſſimorum, BMS , $V PX$, ex ipſis genitorum, vnum iuxta regulam, BS , alterum iuxta regulam, VX , ſiue ſint hæc portiones ſphærae, vel ſphæroidis, ſiue folida ſimilaria genita ex portionibus, BMS , $V PX$.

COROLL. X. SECTIO PRIMA.

IN Propof. 12. dicimus, quod fi circuli, vel ellipies habuerint in
 fuis coniugatis axibus, vel diametris eas conditiones, quas fup-
 pofuimus in eife lateribus parallelogrammorum in Theor. 9. 10. 11.
 12. 13. Lib. 2. quod pro eorum circularum, vel ellipfium omnibus
 quadratis regula bafi fequentur eadem conclufiones ibi collectæ, fi
 enim his circumscribantur parallelogramma latera habentia axibus,
 vel diametris coniugatis circularum, vel ellipfium parallela, habe-
 bunt hæc parallelogramma requifitas conditiones in fuis lateribus,
 & ideò fequentur iam dictæ conclufiones pro parallelogrammis, &
 confequenter pro omnibus quadratis ellipfium illis intercriptorum,
 cum hæc fint fubfequaltera omnium quadratorum parallelogram-
 morum illis circumscriptorum idelt vt clarius loquar, fi circulus, &
 ellipfis, vel duæ ellipfes fuerint circa eandem diametrum, vel circa
 æquales diametros, vel axes, erunt omnia quadrata eorundem regu-
 lis fecundis axibus, vel diametris, vt omnia quadrata parallelogram-
 morum illis circumscripibilem, latera habentium dictis axibus, vel
 diametris parallela, regulis eisdem retentis, & quia omnia quadrata
 parallelogrammorum, latera bafibus æquè inclinata æqualia habentium
 regulis bafibus, fiant vt quadrata bafium, ideò omnia quadrata
 circularum, vel ellipfium circa eundem axim, vel diametrum, vel
 æquales constitutorum, erunt vt quadrata fecundorum axium, vel
 diametrorum, & ideò folida fimilaria genita ex ipsis iuxta eafdem
 regulas, erunt vt quadrata fecundorum axium, vel diametrorum,
 quæ folida, vel erunt fphæra, & fphæroides, vel ambo fphæroides
 circa eundem axim, vel diametrum, vel folida fimilaria genita ex
 dictis circulo, & ellipfi, vel duabus ellipfibus iuxta dictas regulas,
 quæ quoque erunt inter fe, vt quadrata fecundorum axium, vel dia-
 metrorum.

S E C T I O I I.

QUod fi in dictis figuris circulo, & ellipfi, vel ellipfibus fumatur
 pro regula communis axis, vel diameter, erunt omnia qua-
 drata eorundem inter fe, vt fecundi axes, vel diametri inter
 fe, & fic etiam erunt folida fimilaria ex eisdem genita iuxta dictam
 regulam, in quibus includitur fphæra, & fphæroides.

SECTIO III.

Item colligimus solida simularia genita ex circulo, & ellipfi, vel ellipsis, utcunque iuxta datas regulas .i. sphaeram, & sphaeroides, & alia quaecunque solida simularia genita ex dictis figuris, habere inter se rationem ex eorum axibus, vel diametris coniugatis compositam.

SECTIO IV.

Item colligimus solida simularia genita ex circulo, vel ellipfi, vel ellipsis, quæ habeant axes, vel diametros reciproce quadratis axium illis coniugatorum respondentes iuxta quæ genita, intelligantur, esse æqualia, dummodo vel vna in vtrisque sumantur axes, vel vna diametri æqualiter ad inuicem inclinatæ; & si hæc sint æqualia, illa esse reciproce respondentia.

SECTIO V.

Item habemus, quod sphaeræ, & similia sphaeroidea, & in vniuersum, quod solida simularia genita ex circulis, vel ellipsis habentibus axes, vel diametros in ratione secundorum axium, vel diametrorum, cum quibus æqualiter sint inclinati, quod, inquam, sint in tripla ratione axium, vel diametrorum .i. vt cubi eorundem. Hæc enim demonstrata de omnibus quadratis parallelogrammorum pro omnibus quadratis circulorum, vel ellipsis, tamquam eorundem partibus proportionalibus (dum illis inscripta intelliguntur) recipi possunt.

COROLLARIUM XI.

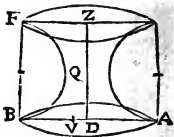
IN Prop. 13. colligimus solidum simile genitum ex, OV , quod potest esse vel cylindrus, vel prima, ad sibi simile genitum ex trilineo, DCV , esse vt, OV , ad reliquum spatium, dempta quarta circuli, vel ellipsis, OCD , cum excelsu dicti quadrantis super duas tertias, reſtanguli, OV , idest proximè, vt 21. ad 2. Exponatur de huius Theor. figura tantum reſtangulum, OV , cum quarta, OCD , dimissa, EF , si igitur intelligemus, OV , circa, DV , manentem reuolui, quoad redeat, vnde discessit, describetur, ab, OV , cylindrus, QA , idest solidum simile genitum ex, OV , cuius omnes figuræ

similes sunt circuli, semidiametros in figura genitrice, OV , habentes, à trilineo autem, DCV , describetur quoddam sòlidum, quod vocetur, Apex sphæralis, si, $OC D$, sit quarta circuli; vel sphæroidalis, si, $OC D$, sit quarta ellipsis, idest sòlidum simile, quod potest dici genitum ex trilineo, DCV , habens omnes suas similes figuras circulos semidiametros in figura genitrice, DCV , sitos habentes, est igitur inter hæc duo similia solida, quæ in particulari hoc exemplo sunt cylindrus, & apex sphæralis, vel sphæroidalis, ratio eadem supradictæ, quam breuitatis causa aliter exemplificare dimisi. Consimili autem vnico exemplo .s. assumendo pro figuris similibus ipsos circulos, semidiametros in figuris genitricibus habentibus, breuitatis causa, & ob seruandam in figuris claritatem imposterum contenti erimus.



C O R O L L A R I V M X I I.

IN Propof. 14. patet ratio solidi similis geniti ex, FD , ad sòlidum simile genitum ex figura, $FQBDZ$. Apposita .n. hic illius figura, dimissa, HC , & , AP , & retenta, BD , tantum in, V , diuisa, reuoluatur, FD , circa manentem axim, ZD , modo supradicto, ex, FD , igitur fiet cylindrus, FA , & ex figura, $FQBDZ$, fiet quoddam sòlidum rotundum, quod vocetur, Tympanum sphærale, si, FQB , sit semicirculus, vel sphæroidale, si, FQB , sit ellipsis, erunt autem hæc duo solida similia genita ex figuris, FD , $FQBDZ$, figuras similes circulos habentia, quorum semidiametri iacent in suis genitricibus figuris, & patet, quod ratio cylindri, FA , ad tympanum sphærale, vel sphæroidale, $FQRA$, est eadem ei, quam habet, BD , ad, DV , eandem autem habet quodlibet sòlidum simile genitum ex, FD , ad simile sibi genitum ex figura, $FQBDZ$, qualecunque sit.



COROLLARIUM XIII.

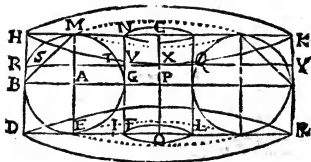
IN Propof. 13. colligimus folidum fimilare genitum ex , HF, ad folidum fimilare genitum ex figura , NMBEF, demptis folidis fimilaribus genitis à trilineis , MNG, GFE, effe vt, HF, ad circumlūm, vel ellipfim , MBEG. Reuoluatur, HF, circa, NF, manentem, vt fupra, ex , HF, igitur fiet cylindrus , HR, & ex figura , NMBEF, fiet quædam figura, à qua fi auferantur folidi, quæ fiunt à duobus trilineis , MNG, GFE, remanebit quædam figura folidi, quam vocabimus, Anulum ftrictum circulare, fi, MBEG, fit circulus, Ellipticum verò, fi fit ellipfis, & patebit, quam rationem habeat cylindrus, HR, ad hunc



anulum ftrictum, AI, ficuti vniuerfaliter patet ex fupradictis, quam rationem habeat folidum fimilare genitum ex , HF, ad folidum fibi fimilare genitum ex figura , NMBEF, demptis folidis fimilaribus genitis ex trilineis , MNG, GFE.

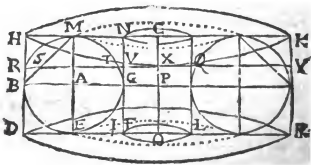
COROLLARIUM XIV.

IN Propof. 16. patet, quam rationem habet folidum fimilare genitum ex , HO, dempto folido fimilari genito ex , NO, ad foli-



dum fibi fimilare genitum ex figura , MBEOC, dempto folido fimilari genito ex figura , MGEOC, .i. effe eandem ei, quam habet, HF,

HF , ad circulum, vel ellipsim, $MBEG$. Reuoluatur, HO , circa manentem axem, CO , modo supradicto, ex, HO , igitur fiet cylindrus, $H\mathcal{R}$, & ex figura, $CMBE O$, fiet quoddam solidum simile prædicto cylindro, auferatur à cylindro, $H\mathcal{R}$, cylindrus, NL , descriptus ab, NO , & à prædicto solido simili auferatur solidum simile genitum ex figura, $MGE O C$. Dico nos iam compertum habere residuum primum .i. fasciam solidam cylindricam (vt ita di-



eam) $HFLK$, ad residuum secundum, ad solidum, inquam, quod gignitur ex reuolutione circuli, vel ellipsis, $MBEG$, esse vt, HF , ad ipsum circulum, vel ellipsim, $MBEG$; quod etiam patet de residuis quorumlibet similarium solidorum ex, HO , & figura, $MBE O C$, genitorum, demptis solidis similaribus genitis ex, NO , & figura, $MGE O C$, vt supra diximus. Vocetur autem solidum, quod in supradicto exemplo, & figura gignitur ex reuolutione circuli, vel ellipsis, $MBEG$, Anulus latus circularis, si, $MBEG$, sit circulus, vel, Anulus latus ellipticus, si, $MBEG$, sit ellipsis.

COROLL. XV. SECTIO PRIMA.

IN Prop. 17. colligitur solidum simile genitum ex, HF , ad solidum simile genitum ex figura, $NMBEF$, esse vt, HF , ad circulum, vel ellipsim, $MBEG$, vna cum residuo, quod remanet, si à rectangulo, MG , dematur quarta circuli, vel ellipsis, MAG , ablato insinul excessu, quo eadem quarta superat duas tertias rectanguli, MG . Conspiciatur ergo exemplum in figura Coroll. 13. huius, patebit ergo cylindrum, $H\mathcal{R}$, ad solidum genitum ex figura, $NMBEF$, habere supradictam rationem, quæ est proximè, vt 21. ad 17. vt in Propos. 17. huius ostenditur. Vocetur autem solidum simile geni-

genitum ex figura, $NMBEF$, habens omnes tuas figuras similes, quæ sint circuli, siue quod fiet per reuolutionem dictæ figuræ, $NMBEF$, vocetur, inquam. Basis columnaris stricta, & circularis, si, $MBE G$, sit circulus, elliptica autem, si is sit ellipsis.

SECTIO II.

IN Coroll. 1. colligitur solidum simile genitum ex, HF , ad solidum simile genitum ex figura, $NMBEF$, dempto solido simili genito ex, MF , esse proximè, vt 84. ad 47. idest in nostro exemplo cylindrum, $H R$, ad basem columnarem strictam genitam ex figura, $NMBEF$, dempto cylindro, MX , esse proximè, vt 84. ad 47.

SECTIO III.

IN Coroll. 2. habetur solidum simile genitum ex, MF , demptis solidis similibus genitis ex trilineis, MNG , GFE , ad solidum sibi simile genitum ex figura, $NMBEF$, dempto solido simili genito ex, MF , esse proximè, vt 19. ad 47. In exemplo autem nostro, dum reuoluitur, HF , apprehende superficiem cylindricam descriptam linea, ME , quæ in duas partes dissepert anulum strictum, AI , scilicet in vnâ, quam possumus vocare interiorem, & in aliam exteriorem; interior est, quæ gignitur ex reuolutione semi-circuli, vel semi-ellipsi, MGE ; exteror autem, quæ generatur ex semi-circulo, vel semi-ellipsi, MBE , est igitur hæc pars interior anuli stricti ad partem exteriorem proximè, vt 19. ad 47. vt in cæteris solidis similibus supradictis contingere diximus.

COROLL. XVI. SECTIO PRIOR.

IN Propos. 18. habemus solidum simile genitum ex, HO , ad solidum simile genitum ex figura, $CMBEO$, esse vt quadratum, DO , ad rectangulum sub, DO , $O E$, vna cum rectangulo sub, $O E$, & sub excessu, quo dupla, $E I$, superat, EF , & $\frac{1}{2}$, quadrati, DE . Exemplum conspici potest in figura Coroll. 14. huius, in qua solidum simile genitum ex, HO , est cylindrus, $H R$, solidum verò simile genitum ex figura, $CMBEO$, est, quod nascitur ex reuolutione eiudem figuræ circa, CO , quod solidum vocabimus. Basem columnarem latam, circulem, si, $MBE G$, sit circulus, ellipticam verò, si sit ellipsis.

SECTIO POSTERIOR.

IN huius Corollario colligitur solidum simile genitum ex, HP , ad solidum simile genitum ex figura, $CMSPC$, dempto solido simili genito ex trapezio, $M B P C$, idest in exemplo cylindrum genitum ex reuolutione, HP , ad mediam basem columnarem latam genitam ex figura, $MSBPC$, dempto frusto conico genito ex trapezio, $CMBP$, esse vt quadratum, BP , ad rectangulum sub, AP , & sub excessu duplæ, EI , super, EP , vna cum, $\frac{1}{2}$, quadrati, BA . Ex quibus etiam facile inueniri potest, quam rationem habeat solidum simile genitum ex figura, $MSBPC$, ad solidum simile genitum ex trapezio, $M B P C$, .i. quam rationem habeat, in exemplo, media basis columnaris lata genita ex reuolutione, $MXBPC$, ad frustum conicum genitum ex reuolutione trapezium, $M B P C$.

COROLL. XVII. SECTIO PRIOR.

IN Propof. 19. colligimus solidum simile genitum ex figura, $SMNV$, dempto solido simili genito ex quadrilineo, MNV , T , ad solidum sibi simile genitum ex figura, $SBEGT$, demptis solidis similibus genitis ex trilincis, TVG , GFE , esse vt portio, $SM T$, ad portionem, $SBEGT$, circuli, vel ellipsis, $M B E G$; idest in proposito exemplo, solidum, quod generatur ex portione, $SM T$, dum intelligimus, HF , reuolui circa, NF , manentem axim, ad solidum, quod generatur ex portione, $SBEGT$, erit vt portio, $SM T$, ad portionem, $SBEGT$.



SECTIO POSTERIOR.

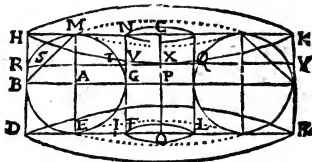
IN Corollario eiusdem colligimus solida similia genita ex parallelogrammis circa eisdem axes, cum portionibus constitutos ad solida sibi similia genita ex eisdem portionibus, esse vt dicta parallelogramma ad dictas portiones .f. in exemplo cylindrum, HO , ad frustum anuli stricti resectum superficie descripta linea, ST , erit vt, HV , ad portionem, $SM T$, & item cylindrus, $R R$, descriptus ab, $R F$,

R F, ad portionem anuli stricti descriptam portionem, S B E G T, erit vt, R F, ad eandem portionem, quod patet etiam de reliquis eorundem solidis similaribus.

C O R O L L A R I V M XVIII.

IN Propof. 20. exposita figura, & exemplo constructo, ostendimus pariter solidum descriptum à portione, S M T, ad solidum descriptum à portione, S B E G T, dum, H O, reuoluitur circa manentem axim, C O, esse vt portio, S M T, ad portionem, S B E G T, quod etiam de reliquis solidis similaribus ab eisdem portionibus generatis patet.

In huius autem Corollario colligitur solida similia genita ex parallelogrammis, cum portionibus in eadem altitudine existentibus, & ad rectas, H D, C O, terminantibus, demptis solidis similaribus generatis ex parallelogrammis in eadem altitudine cum dictis portionibus existentibus, sed ad rectas, N F, C O, terminantibus, ad solida



sibi similia genita ex figuris compositis ex dictis portionibus, & reliquo spatio, vtq; ad, C O, dempto solido simili genito ex hoc reliquo spatio, esse vt dictorum parallelogrammorum residuum parallelogrammum ad dictam portionem. Vt in exemplo cylindrum, H Y, dempto cylindro, N Q, ad portionem anuli lati reiectam per superficiem descriptam in reuolutione à linea, S T, esse vt, H V, ad portionem, S M T.

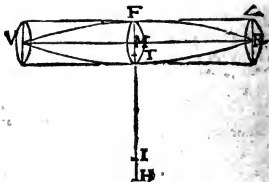
COROLLARIUM XIX.

IN Propol. 22. exposita figura, & exemplo constituto, colligimus solidum simile genitum ex, AG , ad solidum simile genitum ex figura, $LCFE G$, demptis solidis similaribus genitis ex trilineis, $CL I, Y G E$, esse (si, $C F E H$, sit circulus) ut parallelepipedum sub basi parallelogrammo, AG , altitudine, $F I$, ad cylindricum sub basi maiori portione, $T C F E Y$, altitudine, $I M$, vna cum, $\frac{1}{2}$, cubi, $T Y$. In ellipsi verò, ut parallelepipedum sub basi parallelogrammo, AG , altitudine, $F I$, ad cylindricum sub basi portione, $T C F E Y$, altitudine, $M I$, vna cum ea parte cubi, $T Y$, vel rhombo ab eadem, $T Y$, descripto, ut in Theor. 21.) parallelepipedum sub, $T Y$, & dicto rhombo, ad quam eiusdem cubi, vel parallelepipedum sexta pars sit, ut quadratum, $C E$, primæ axis, ad quadratum secundæ scilicet ad quadratum, $F H$. Sit ergo constitutum exemplum per reuolutionem, AG , circa manentem axin, LG , siue ergo, $C F E H$, sit circulus, siue ellipsis, habebit genitus cylindrus ab, AG , ad genitum solidum a portione, $T C F E Y$, (supradictam rationem. Vocetur autem solidum descriptum a portione, $T C F E Y$, (si sit portio circuli) malum roseum; si verò sit portio ellipsis: Malum cotoneum.



COROLLARIUM XX.

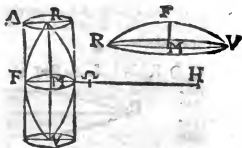
IN Prop. 23. in-pta ex fig. 1 theor. 21. portione minori utcumque, $R F V$, quæ sit portio circuli, cum illi circumscripto rectangulo, ΔV , assumpto etiam integro axi, $F H$, & puncto, a , in ea, ut ibi sumptum est, patet solidum simile genitum ex, ΔV , ad solidum sibi simile



genitum ex portione minori, R F V, esse vt sexquialtera, F M, ad, M. Reuoluatur igitur, vt fiat nostrum exemplum, ΔV , circa, R V, manentem, cylindrus igitur descriptus ΔV , ad solidum descriptum à portione, R F V, erit vt sexquialtera, F M, ad, M, & sic de reliquis solidis similaribus ab ipsis genitis, &c. Vocetur autem solidum descriptum per reuolutionem a portione circuli, R F V, minori; Malum citrium.

C O R O L L A R I V M X X I .

IN Propof. 24. assumpta adhuc figura superioris, quæ reuoluitur, colligitur solidum simile genitum ex portione, R F V, iuxta axim, F M, regulam, ad solidum simile genitum ex eadem, iuxta basim, R V, regulam esse, vt rectangulum sub, M, & sub basi, R V, ad tria quadrata lineæ, R M, cum quadrato, M F. Fiat nostrum exemplum per reuolutionem portionis, R F V, semel circa, R V, & iterum circa, F M, manentes axes, primò igitur fit: Malum citrium per reuolutionem circa, R V, secundo fit segmentum sphaeræ per reuolutionem circa, F M, patet ergo, quam rationem habeat Malum citrium, ad segmentum sphaeræ ab eadem circuli portione per reuolutionem genitum, quod etiam de reliquis similaribus solidis ab eadem portione, iuxta di. 2. regulas genitis concludum est.



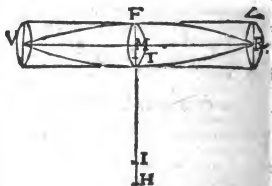
C O R O L L A R I V M X X I I .

IN Propof. 25. si sumamus ex figura Theorem. 21. portionem circuli, vel ellipsis, R F V, utcumque, cum integra axi, F H, a qua sit abscissa, I H, æqualis, F M, tumatur intuper de, M H, ipsa, M T, ad quam, F M, sit vt, ΔV , ad portionem, R F V, colligemus, exposita hic figura, solidum simile genitum ex, ΔV , ad sibi simile genitum ex portione, B F V, esse vt quadratum, F M, ad rectangulum, quod remanet, dempto rectangulo sub, I M, & sub, T M, à rectangulo sub, F M, & $\frac{1}{2}$, ipsius, M H. Fiat nostrum exemplum;

M m 2

reuo-

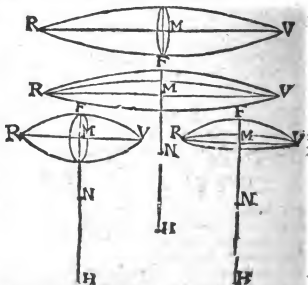
reouluatur, ΔV , circa manentem axim, $R V$, cylindrus igitur genitus ex reuolutione, ΔV , ad solidum genitum ex reuolutione portione, $R F V$, habebit supradictam rationem; hoc autem solidum iam vocauimus: Malum citrium, si, $R F V$, fit portio circuli, ceterum, si sit portio ellipsis, vocetur; O-liaua genita ex tali portione; eadem autem rationem habere solida similia genita ex, ΔV , & portione, $R F V$, (intellige semper genita iuxta regulam ibi assumptam, scilicet iuxta regulam, $F M$) iam superius diximus.



COROLLARIUM XXIII.

IN Propos. 26. p. eisdem antecedentis figuris colligitur solidum simile genitum iuxta regulam, $F M$, ad sibi simile genitum iuxta regulam, $R V$, esse ut parallelepiped. sub basi rectangulo, qd dicitur residuum anteced. Theor. altitudine tripla, $M H$, ad

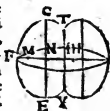
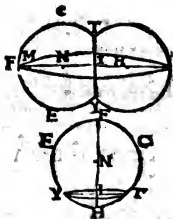
parallelepipedum sub basi rectangulo ipsius, $F M$, ducta in, $R V$, altitudine linea composita ex, $M H$, & N . Pro nostro exemplo ap-
pona.



ponatur hic vtraq; portio, quæ reuoluantur semel circa, FM, & semel circa, RV, patebit ergo, quam rationem habeat, Malum citrium ad segmentum sphaeræ genitum ab eadem portione circuli, & quam habeat Oliua ad segmentum sphaeroidis genitum ex eadem portione.

COROLLARIUM XXIV.

IN Prop. 27. assumitur iterum fig. 1. hor. 21. tum circuli, tum ellipsis, & nunc, iisdem figuris hic appositis, colligimus solidum simile genitum ex portione, TCFEY, iuxta regulam, FI, ad solidum sibi simile genitum ex eadem portione, iuxta regulam, TY, esse, in fig. circuli, vt cylindr cum sub, IM, & portione, TCFEY, vna cum, $\frac{1}{2}$ cubi, TY, ad parallelepipedum sub altitudine, FI, basi verò rectangulo sub, FI, & sub sexquiertia duarum, IH, HN. In ellipsis verò fig. habere rationem cõpositam ex ea, quam habet cylindricus sub, IM, & portione, TCFEY, vna cum ea parte cubi, TY, vel parallelepipedum, sub, RV, & rhombo, RZ, ad quam eiuſdem cubi, vel parallelepipedum sexta pars sit, vt quadratũ, CE, ad quadratum, FH, ad parallelepipedum sub altitudine, CE, basi parallelogrammo, AG, in fig. Th. 6. & ex ea, quã habet quadratum, FH, ad rectangulum sub, FI, & sub sexquiertia duarum, IH, HN. Pro nostro igitur exemplo reuoluantur portiones, TCFEY, semel circa axes manentes, TY, & semel circa axes manentes, FI, ex reuolutione igitur facta à portione circuli circa, TY, fit, Malum Roseum, ex reuolutione verò eiusdẽ circa, FI, fit unius segmentum sphaeræ: Itein ex reuolutione facta à portione ellipsi, TCFEY, fit, malum cotoneum, circa axim, TY, ex reuolutione verò eiusdẽ circa, FI, fit maius segmentum sphaeroidis: Igitur malum roseum ad segmentum maius sphaeræ, & malum cotoneum ad segmentum maius sphaeroidis iam dictum, habent supradictam rationem, vt & solida similia, &c.

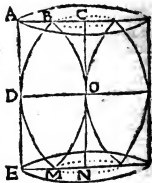


COROLLARIUM XXV.

IN Propof. 28. affumitur adhuc antecedentis figura, hic autem colligimus nos, superiores afpicientes figuras pro noſtro exemplo, ſolidum ſimilare genitum ex portione circuli, vel ellipſis, T C F E Y, ad ſolidum ſimilare genitum ex circulo, vel ellipſi, iuxta communem regulam, F H, (comparatis tamen genitis vel ambo ex ijs, quæ ſunt circuli, vel ex ijs, quæ ſunt ipſius ellipſis) eſſe vt cylindricum ſub altitudine, M I, baſi portione, T C F E Y, vna cum $\frac{1}{2}$, cubi, T Y, (quod tamen ſolum in circuli figura contingit) in figura autem ellipſis illud commutamus in hoc. ſ. vna cum ea parte cubi, T Y, vel parallelepiedi ſub, R V, & rhombo, R Z, ad quam eiusdem cubi, vel parallelepiedi ſexta pars ſit, vt quadratum primi axis ad quadratum ſecundi ad $\frac{1}{2}$, parallelepiedi ſub, A D, & parallelogrammo, A Q, .i. in figura circuli, ad $\frac{1}{2}$, cubi, F H. Diſtam igitur rationem in ſuprapoſitis exemplis habet Malum Roſeum, ad ſphæram genitam ex circulo, ex cuius portione maiori Malum Roſeum dicitur genitum iuxta regulam, F H; & eandem habet Malum Cotonæum, ad ſphæroides genitum ex ellipſi reuoluta circa axem, CE, parallelam axi, T Y, circa quem reuoluitur portio, T C F E Y, ad generandum Malum Cotonæum, quam rationem pariter diximus habere ſupradicta ſimilaria ſolida, &c.

COROLLARIUM XXVI.

IN Propofit. 29. habetur ſolidum ſimilare genitum ex, A N, ad ſolidum ſimilare genitum ex figura, C B D M N, demptis ſolidis ſimilibus genitis ex trilineis, ſiue figuris, B C O, O N M, eſſe vt, A N, ad figuram, B D M O. Apponatur hic illa figura, & vt fiat noſtrum exemplum, reuoluatur, A N, quod ſupponamus eſſe parallelogrammum rectangulum conuenienter ipſi reuolutioni, circa axim, C N, manentem, fiet igitur ex, A N, cylindrus, ex reuolutione verò figuræ, B D M O, fiet ſolidum totupliciter variabile, quotupliciter figura, B D M O, variari poteſt, vocabimus autem ſolida genita à figuris inſcriptis rectangulo, A N, genita inquam per reuolutio.

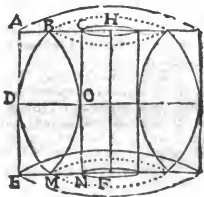


lutionem circa, C N. Solida anularia stricta, patet ergo cylindrum genitum ab, A N, ad solidum anulare strictum genitum ex figura, B D M O, quæcunque sit, esse vt, A N, ad eandem figuram, B D M O; sicq; esse cætera solida simularia genita ex his, iuxta sumptam regulam siue, C N, siue, N E, vtrifq; solidis communem.

C O R O L L A R I V M XXVII.

IN Prop. 30. colligimus solidum simile genitum ex, A F, dempto solido simili genito ex, C F, ad solidum simile genitum ex figura, H B D M F, dempto solido simili genito ex figura, H B O M F, esse vt, A N, ad figuram, B D M O. Assumatur hic illius figura, & pro nostro exemplo

supponatur, A F, esse rectangulum, reuoluaturq; circa manentem axim, H F, cylindrus ergo genitus ex, A F, dempto cylindro genito ex, C F, ad solidum genitum in reuolutione ex figura, B D M O, erit vt, A N, ad, B D M O; solida autem genita ex figuris inscriptis rectangulo, B D M O, cum conditionibus ibi requisitis vocabimus communiter: Solida anularia lata; eadem patent de cæteris solidis simularibus genitis ex, A N, & figura, B D M O, etiam si, A F, non sit rectangulum, quia tunc intelligo fieri generationem solidorum per descriptionem similiarum figurarum, & non per reuolutionem, vt in exemplo solito assumpsi, vnde patet, &c.

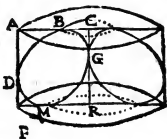


C O R O L L A R I V M XXVIII.

S E C T I O P R I O R .

IN Prop. 32. docemur solidum simile genitum ex, A R, ad solidum sibi simile genitum ex figura, B C G R M D, demptis solidis simularibus genitis ex trilineis, B C G, G R M, esse vt, A R, ad

ad ellipsim, $BDMG$; ponatur hic illa figura, & vt fiat nostrum exemplum, reuoluatur, AR , circa manentem axim, CR ; cylindrus ergo genitus ex, AR , ad solidum genitum in reuolutione ex ellipsi, $BDMG$, erit vt, AR , ad ellipsim, $BDMG$, sic etiam, vt diximus, cætera solida similia ex iisdem per descriptionem similiarum figurarum genita: Vocetur autem solidum in reuolutione genitum ex ellipsi, $BDMG$; Anulus strictus ellipticus altera parte latior.



SECTIO POSTERIOR:

IN Corollario colligitur solidum simile genitum ex, AR , ad solidum sibi simile genitum ex ellipsi, $BDMG$, ambo iuxta communem regulam, FR , esse vt solidum simile genitum ex eodem, AR , ad solidum simile sibi genitum ex eadem ellipsi, $BDMG$, sed ambo genita iuxta communem regulam, CR . Exemplum patebit, si concipies, AR , reuolui circa manentem axim, FR , cylindrus enim tunc genitus, ab, AR , ad anulum strictum ellipticum altera parte latior, genitum ab ellipsi, $BDMG$, habebit eandem rationem, quam supradictus cylindrus ad supradictum anulum, & ideo (amplius colligemus) quoniam, permutando, cylindrus genitus in reuolutione circa, CR , facta, ad cylindrum genitum in reuolutione circa, FR , est vt anulus factus in illa reuolutione ad anulum factum in hac, propterea sicuti primus cylindrus ad secundum est, vt, FR , ad, RC , ita primus anulus ad secundum erit, vt, FR , ad, RC , sic etiam erunt solida similia genita ex eisdem, iuxta regulas, FR , RC .

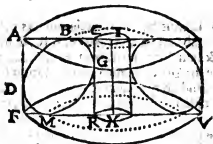
N. Cor. 4.
Gen. 34
lib. 2.

COROLL. XXIX. SECTIO PRIMA.

IN Proposit. 33. colligimus solidum simile genitum ex, AX , dempto solido simili genito ex, CX , ad solidum sibi simile genitum ex figura, $BDMXT$, dempto solido simili genito ex figura, $BGMXT$, esse vt, AR , ad ellipsim, $BDMG$; quod si tumantur solida similia genita ex eisdem iuxta communem regulam, TX , vel, CR , eandem rationem inter se habere comperientur dicta residua scilicet quam habet, AR , ad ellipsim, $BDMG$. Exponatur figura, & vt fiat exemplum, reuoluatur, AX , circa manentem

tem

tem axim, $T X$, igitur cylindrus genitus in reuolutione ex, $A X$, dempto cylindro genito ex, $C X$, ad solidum genitum in reuolutione ex ellipsi, $B D M G$, erit vt, $A R$, ad ellipsium, $B D M G$; idem accidet, si reuolutio fiat circa axem parallelam ipsi, $A C$, inclusam duabus, $F A$, $R C$, verus, A , C , puncta productis: vocetur autem solidum genitum in reuolutione ex ellipsi, $B D M G$, anulus latus ellipticus altera parte strictior.



S E C T I O I I.

Hinc insimul patet, quod fascia solida cylindrica (vt ita dicam) in reuolutione circa, $T X$, genita ex, $A R$, ad anulum genitum ex ellipsi, $B D M G$, in eadem reuolutione, est vt cylindrus genitus ex, $A R$, dum reuolutio fit circa, $C R$, ad anulum strictum ellipticum altera parte latiore in eadem reuolutione circa, $C R$, ellipticum, $B D M G$, genitum; nam ambo sunt, vt, $A R$, ad ellipsim, $B D M G$, deinde patet pro solidis similaribus, &c. Quia vero dicta fascia solida genita ab, $A R$, ad cylindrum ab eodem, $A R$, genitum est; vt residuum quadrati, $F X$, dempto quadrato, $R X$, ad quadratum, $F R$, est. n. cylindrus genitus ab, $A X$, ad cylindrum genitum ab, $A R$, vt quadratum, $F X$, ad quadratum, $F R$, cylindrus item genitus a, $C X$, ad eundem cylindrum genitum ab, $A R$, est vt quadratum, $R X$, ad quadratum, $R F$, ergo hoc cylindro dempto à cylindro genito ab, $A X$, reliqua fascia solida genita ex, $A R$, ad cylindrum genitum ex eodem, $A R$, erit vt residuum quadrati, $F X$, ab eo dempto quadrato, $R X$, ad quadratum, $F R$, hanc ergo rationem habebit etiam anulus latus ellipticus altera parte strictior ad anulum strictum ellipticum altera parte latiore ex eadem ellipsi, $B D M G$, genitum; quia vero residuum quadrati, $F X$, dempto quadrato, $R X$, est rectangulum sub, $X R$, $R F$, bis cum quadrato, $F R$, idest rectangulum sub, $X F$, $F R$, cum rectangulo sub, $X R$, $R F$, .i. rectangulum sub composita ex, $R X$, $X F$, & sub, $F R$, ideo dictus anulus latus ad dictum anulum strictum, erit vt rectangulum sub composita ex, $R X$, $X F$, & sub, $F R$, ad quadratum, $F R$, .i. erit vt composita ex, $F X$, $X R$, ad, $R F$, nempe vt, $V R$, ad, $R F$.

N n

S E

S E C T I O I I I .

Vterius habemus fascias solidas cylindricas genitas exempli gr. ab eodem rectangulo, AR , dum fit reuolutio semel circa, TX , & semel circa parallelam, AC , ad anulos latos ellipticos altera parte strictiores genitos in reuolutionibus ab ellipsi, $BDMG$, habere eandem rationem scilicet quam habet, AR , ad ellipsim, $BDMG$, & ideò inter se dictos anulos esse, vt dictas fascias, dictæ autem fasciæ solidæ cylindricæ sunt, vt residua, demptis à quadratis semidiametrorum basium integrorum cylindrorum quadratis semidiametrorum basium cylindrorum, quas dictæ fasciæ complectuntur, & ideò dicti anuli inter se eandem rationem habebunt, quam dicta quadratorum residua.

S E C T I O I V .

IN Corollario huius tandem dicitur, quòd si, $BDMG$, non esset ellipsis, tum in Schemate huius, tum Theorematis antecedentis, sed alia utcumque figura habens tamen prædictas condiciones ibi appositas, quod de eadem dicta quoque de ellipsi, $BDMG$, verificarentur, nosque hic colligimus, quod omnia supradicta æquè, ac de solidis genitis ab ellipsi, $BDMG$, de genitis ab ipsa figura pariter verificarentur. Possumus autem vocare solida descripta per reuolutionem factam circa, CR , à figura, $BDMG$. Solida anularia stricta altera parte latiora: quæ verò fiunt ab eadem per-reuolutionem circa, TX . Solida anularia lata altera parte strictiora.

S C H O L I V M .

Possent quidem plura alia circa hæc solida considerari; vt si fecentur planis parallelis, ad axem, circa quem fit reuolutio, existentibus veltis, quam inter se rationem habeant ressecta segmenta. Item restat contemplandum solidum, quod nasceretur ex reuolutione dimidiæ ellipsis circa non axem, sed diametrum, vel diametro parallelam; quæ voluta circa diametrum solidum describit referens figuram Pyri; circa verò parallelam diametro portionem maiorem ab ellipsi ressecantem, describit quoddam solidum latius ex vna parte, quam ex alia, referens figuram Mali paradisi, vt vulgò dicitur, circa verò parallelam diametro

reuo-

reuelatâ, quæ ab ellipsi minorem abscindat portionem, describit quoddam solidum referens figuram Fici, pluraque his similia contemplanda remanent, sed ut studioso Lectori in agro hoc fertilissimo laborandi, illudq; excolendi non omnis videatur sublatus esse locus, illius hæc inquisitioni reservare volui his. Aduerte autem in superioribus licet figurarum assumpti fuerint axes, ut circa eosdem fieret reuolutio, tamen eadem verificari assumptis, quæ sunt tantum diametri, nam passiones Sectionum Conicarum eisdem insunt, siue sint circa axes, siue circa tantum diametros, ut habetur Libro Primo Scholio Propositionis 40.

Finis Tertij Libri.



1870
No. 100
The following is a list of the names of the persons who have been admitted to the membership of the Society since the last meeting of the Council, viz.:

MEMBERS

1870
No. 100



285

GEOMETRIÆ

CAVALERII

LIBER QVARTVS.

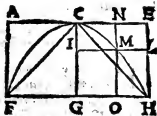
In quo de Parabola, & solidis ab eadem
genitis enucleatur doctrina.

THEOREMA I. PROPOS. I.



SI PARALLELOGRAMMVM, & trian-
gulum fuerint in eadem basi, & circa
cundem axim, vel diametrum cum pa-
rabola; parallelogrammum erit para-
bolæ sexquialterum, triangulum au-
tem erit eiusdem parabolæ subsexqui-
tertium.

Sit ergo parabola, FCH , in basi, FH , circa axim, vel diame-
trum, CG , sit autem in eadem basi, FH , & circa eundem axim, vel
diametrum parallelogrammum quoq; AH , & triangulum, CFH .
Dico ergo parallelogrammum, AH ,
esse sexquialterum parabolæ, FCH ;
triangulum autem, CFH , esse eiusdem
parabolæ, FCH , subsexquiterium.
Sumatur ergo in, CE , quæ tangit pa-
rabolam in puncto, C , utcumque pun-
ctum, N , & per, N , ducatur ipsi, CG ,
parallela, NO , producta usque ad ba-
sim, FH , cui occurrat in, O ; quæ pa-
riter secet curuam parabolæ in, M , &
per, M , ducatur ipsi basi, FH , parallela, IL . Est ergo quadratum,
 GH ,



Ex 38. &
Schol. 40.
lib. 1.

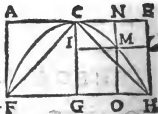
GH , vel quadratum, EC , ad quadratum, IM ; vel ad quadratum, CN , vt, GC , ad, CI , .i. vt, ON , ad, NM , est autem, CH , parallelogrammum in eadem basi, & altitudine cum trilineo, $CMHE$, & punctum, N , vtcunq; sumptum, per quod acta est ipsi, CG , parallela, NO , repertumque est, vt quadratum, EC , ad quadratum, CN , ita esse, ON , ad, NM ; ergo horum quatuor ordinum

Coroll. 3.
26. lib. 2.

magnitudines erunt proportionales scilicet omnia quadrata maximarum abscissarum, EC , magnitudines primi ordinis collectæ iuxta quadratum, CE , ad quadrata omnium abscissarum ipsius, CE , siue ambo sint recti, vel eiusdem obliqui transitus, quæ sunt magnitudines secundi ordinis collectæ, iuxta quadratum, CN , erunt vt omnes lineæ parallelogrammi, CH , magnitudines tertij ordinis collectæ, iuxta, NO , ad omnes lineas trilinei, $CMHE$, magnitudines quarti ordinis collectas, iuxta, NM , regula pro his omnibus lineis existente ipsa, EH ; vt autem sunt omnes lineæ parallelogrammi, CH , ad omnes lineas trilinei, $CMHE$, ita est parallelogrammum, CH , ad trilineum, $CMHE$, ergo parallelogrammum, CH , ad trilineum, $CMHE$, est vt quadrata maximarum abscissarum ipsius, CE , ad quadrata omnium abscissarum ipsius, CE , verum illa quadrata sunt istorum tripla, ergo erit parallelogrammum, CH , triplum ipsius trilinei, $CMHE$, ergo idem parallelogrammum, CH , erit sexquialterum semiparabolæ, $GCMH$, ideò etiam parallelogrammum, AH , erit parabolæ, FCH , sexquialterum. Quoniam verò triangulum, CFH , est dimidium parallelogrammi, AH , ideò quarum partium parallelogrammum, AH , erit sex, & parabola, FCH , consequenter ea undem quatuor, triangulum, CFH , erit tria, & ideò erit ad parabolam, FCH , vt tria ad quatuor, & idcirco erit eiusdem subsexquiterium, quæ ostendere oportebat.

3. Lib. 2.

3. Lib. 2. nibus lineis existente ipsa, EH ; vt autem sunt omnes lineæ parallelogrammi, CH , ad omnes lineas trilinei, $CMHE$, ita est parallelogrammum, CH , ad trilineum, $CMHE$, ergo parallelogrammum, CH , ad trilineum, $CMHE$, est vt quadrata maximarum abscissarum ipsius, CE , ad quadrata omnium abscissarum ipsius, CE , verum illa quadrata sunt istorum tripla, ergo erit parallelogrammum, CH , triplum ipsius trilinei, $CMHE$, ergo idem parallelogrammum, CH , erit sexquialterum semiparabolæ, $GCMH$, ideò etiam parallelogrammum, AH , erit parabolæ, FCH , sexquialterum. Quoniam verò triangulum, CFH , est dimidium parallelogrammi, AH , ideò quarum partium parallelogrammum, AH , erit sex, & parabola, FCH , consequenter ea undem quatuor, triangulum, CFH , erit tria, & ideò erit ad parabolam, FCH , vt tria ad quatuor, & idcirco erit eiusdem subsexquiterium, quæ ostendere oportebat.



Coroll. 25
lib. 2.

Coroll. 25 lib. 2. us, CE , verum illa quadrata sunt istorum tripla, ergo erit parallelogrammum, CH , triplum ipsius trilinei, $CMHE$, ergo idem parallelogrammum, CH , erit sexquialterum semiparabolæ, $GCMH$, ideò etiam parallelogrammum, AH , erit parabolæ, FCH , sexquialterum. Quoniam verò triangulum, CFH , est dimidium parallelogrammi, AH , ideò quarum partium parallelogrammum, AH , erit sex, & parabola, FCH , consequenter ea undem quatuor, triangulum, CFH , erit tria, & ideò erit ad parabolam, FCH , vt tria ad quatuor, & idcirco erit eiusdem subsexquiterium, quæ ostendere oportebat.

C O R O L L A R I V M.

Hinc patet ductas in trilineo, $CMHE$, æquidistantes axi, vel diametro; CG , esse inter se, vt quadrata abscissarum per easdem à tangente, CE , versus verticem parabolæ, qui est punctum, C ; nam ostensum est, ON , sine, HE , ad, NM , esse vt quadratum, EC , ad quadratum, CN , & punctum, N , sumptum est vtcunq; ideo, &c.

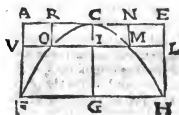
THEO.

THEOREMA II. PROPOS. II.

SI intra parabolam ducantur vtrunque duæ ad axim, vel diametrum eiusdem ordinatim applicatæ lineæ, abscissæ ab ipsâ parabolâ, erunt inter se, vt cubi dictarum linearum ordinatim applicatarum.

Sint ergo intra parabolam circa axim, vel diametrum, CG, constitutam, duæ ad ipsam ordinatim applicatæ rectæ lineæ, FH, OM, parabolâ, OCM, FCH, abscindentes. Dico ergo parabolam, FCH, ad parabolam, OCM, esse vt cubum, FH, ad cubum, OM; constituentur circa axes, vel diametros, CI, CG, & in eisdem basibus, OM, FH, cum dictis parabolis parallelogramma, AH, RM.

11. Lib. 2.



Quoniam ergo æquiangula parallelogramma habent rationem ex lateribus compositam, sunt autem parallelogramma, AH, RM, æquiangula, nam, OM, est parallela ipsi, FH, ideò parallelogrammum, AH, ad parallelogrammum, RM, habet rationem compositam ex ea, quam habet, FA, ad, RO, .i. GC, ad, CI, .i. quadratum, FH, ad quadratum, OM, & ex ea, quam habet, FH, ad, OM, sed etiam cubus, FH, ad cubum, OM, habet rationem compositam ex ea, quam habet quadratum, FH, ad quadratum, OM, & ex ea, quam habet, FH, ad, OM, ergo parallelogrammum, AH, ad parallelogrammum, RM, & consequenter parabola, FCH, ad parabolam, OCM, (quia sunt dictorum parallelogrammorum subsexquialtere) erit vt cubus, FH, ad cubum, OM, quod ostendere opus erat.

38. Et Schol. 40. lib. 2.

D. Corol. 4. Gener. 34. lib. 2.

Ex antec.

THEOREMA III. PROPOS. III.

SI in parabola ducatur quædam recta linea ad eiusdem axim, vel diametrum ordinatim applicata; agantur deinde ipsi axi, vel diametro æquidistantes rectæ lineæ vsque ad curuam parabolicam, & dictam ordinatim applicatam, quæ basis erit eiusdem parabolæ; Dictæ æquidistantes rectæ lineæ

lineæ erunt inter se, vt rectangula sub partibus basis ab eisdem æquidistantibus constitutis.

Sit ergo parabola, FCH , circa axim, vel diametrum, CG , ad quam ordinatim applicetur recta lineæ vtcunq; FH , ducantur deinde intra parabolam axi, vel diametro, CG , parallelæ vtcunq; AN , MO , basium, FH , in punctis, N , O , diuidentes. Dico igitur rectam, AN , ad rectam, MO , esse vt rectangulum, FNH , ad rectangulum, FOH ; ducatur per, M , ipsi, FH , parallela, MI ; est ergo, GC , ad, CI , vt quadratum, GH , ad quadratum, IM , vel ad quadratum, GO , ergo, per conuersionem rationis, GC , ad, GI , vel ad, MO , erit vt quadratum, HG , ad sui reliquum, dempto quadrato, GO , hoc autem residuum est rectangulum sub, GOH , bis, vna cum quadrato, OH , quod est æquale rectangulo, FOH , nam rectangulum, GOH , eum quadrato, OH , æquatur rectangulo, GHO , .i. rectangulo sub, FG , OH , cui si iunxeris rectangulum sub, GO , & eadem, OH , conlurget



4.2. Elem. integrum rectangulum, FOH , æquale rectangulis sub, GOH , bis, vna cum quadrato, OH , ergo, CG , ad, MO , erit vt quadratum, GH , .i. vt rectangulum, FGH , ad rectangulum, FOH , & conuertendo, MO , ad, CG , erit vt rectang. HOI , ad rectangulum, HGF ; eodem modo ostendemus, CG , ad, AN , esse vt idem rectangulum, HGF , ad rectangulum, FNH , ergo ex æquali, & conuertendo, AN , ad, MO , erit vt rectangulum, FNH , ad rectangulum, FOH , quod ostendere oportebat. Possunt autem vocari & AN , MO , ordinatim applicatæ ad basim parabolæ, FCH , scilicet ad ipsam, FH .

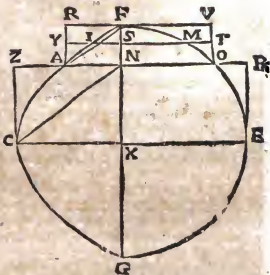
THEOREMA IV. PROPOS. IV.

SI ad basim parabolæ ordinatim applicetur vtcunque recta lineæ, fiat autem parallelogrammum, & triangulum habentia circa communem angulum dictam applicatam, & abscissam à basi ab vtrauis extremitatum eiusdem, vel sint duæ ad basim vtcunque ordinatim applicatæ, sub alterutra quarum, & sub inclusa ab iisdem portione basis fiat parallelogrammum, & triangulum; dicti parallelogrammi, vel trianguli,

guli, ad portionem parabolæ dicto parallelogrammo inscriptam ratio nota erit.

Sit parabola, cuius basis, FG , ad axim, vel diametrum, CX , ordinatim applicata; ad basim autem, FG , sit etiam ordinatim applicata, AN , utcumq; diuidens basim, FG , in puncto, N , fiat autem parallelogrammum, RN , & triangulum, AFN , sub lateribus, AN , NF , vel sub, AN , NG ; Vel sint duæ utcumque ad basim, FG , ordinatim applicatæ, AN , CX , fiat autem parallelogrammum, & triangulum sub, AN , NX , vel sub, CX , XN . Dico parallelogrammum, RN , vel triangulum, AFN , ad

portionem, AFN , parabolæ, FCG , parallelogrammo, RN , inscriptam, esse in ratione nota. Similiter parallelogrammum, ZX , & triangulum, NQX , ad portionem, $ACXN$, habere rationem notam. Producatur, CX , utcumque in, E , & circa semiaxes, vel semidiametros coniugatas, FX , XE , intelligatur descriptus semicirculus, vel semiellipsis, $FE G$, producantur deinde, RF , ZN , indefinitè, secetque, ZN , curuam semicirculi, vel semiellipsis, $FE G$, in puncto, O , & compleantur parallelogramma, VN , RX , sumatur deinde in, FN , utcumq; punctum, S , per quod ipsi, CE , parallela ducatur, YT , tecans curuam parabolæ in, I , curuam autem, $FE G$, in, M ; est ergo, AN , ad, I



Ex antec.
40. Et
Sch. 1.
Coroll. 3.
26. lib. 2.
S, ad



S, ad quadratum, S M, ergo horum quatuor ordinum magnitudines erunt proportionales collectæ, iuxta quatuor iam dictas magnitudines proportionales. i. omnes lineæ ipsius, R N, (iuxta pro omnibus communi regula, C E,) ad omnes lineas trilinei, F I A N, erunt ut omnia quadrata, F O, ad omnia quadrata trilinei, F M O N, ratio autem, quam habent omnia quadrata, F O, ad omnia quadrata trilinei, F M O N, iam notificata est lib. 3. de circulo, & ellipfi Proposit. 1. ergo & ratio

omnium linearum, R N, ad omnes lineas trilinei, F I A N, & subinde ratio parallelogrammi, R N, ad portionem, F I A N, nota erit, & subinde nota erit ratio trianguli, F A N, quod est dimidium parallelo-

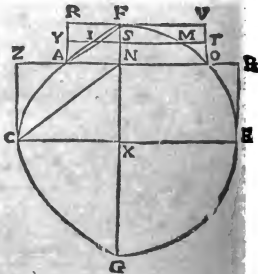
3. Lib. 2.

grammi, R N, ad portionem, F I A N; eodem modo ostendemus parallelogrammum, Z X, ad quadrilinium, N A C X, esse ut omnia quadrata, R X, ad omnia quadrata quadrilinei, O N X E, ratio autem, quam habent omnia quadrata, R X, ad omnia quadrata quadrilinei, O N X E, iam notificata est in supradicto Libro, Proposit. 3. & 4. ergo ratio parallelogrammi, Z X, ad quadrilinium, siue portionem parabolæ, A N X C, nota erit, veluti & ratio trianguli, C N X, ad eandem portionem, A N X C, pariter nota erit, quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

Hinc colligitur dicta parallelogramma ad portiones parabolæ sibi inscriptas, ordinatimque ad parabolæ basim applicatis inclusas, esse, ut omnia quadrata parallelogrammorum illis è regione respondentium, quibusque inscribuntur semiportiones circuli, vel ellipsis iam dictæ ad omnia quadrata dictarum semiportionum, regula communi axi, vel diametro, C E, existente. OSENSUM N. est, R N, ad portionem, F A N, esse, ut omnia quadrata, F O, ad omnia quadrata trilinei, F M O N;

6, Z



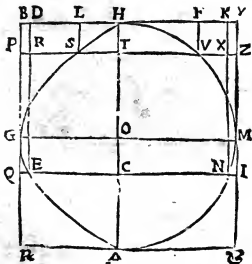
☉, Z X, ad portionem, ACXN, esse, vt omnia quadrata, BX. ad omnia quadrata quadrilinei, NOEX, ☉, AN, CX, ordinatim ad basim, FG, applicata sumpta sunt vtcunq; vnde patet.

THEOREMA V. PROPOS. V.

DVtis vtcunque ad basim parabolæ ordinatim applicatis, parallelogramma sub ipsis, & portionibus basis ab ijdem abscissis ad sibi inscriptas portiones parabolæ infra-scriptam rationem habebunt.

Sit ergo parabola, HGA, in basi, HA, circa axim, vel diametrum, GO, & sint ductæ ipsi, GO, parallelæ vtcunque, ST, EC, compleantur autem parallelogramma, LT, BO, DC, deinde producat, GO, vtcunque in, M, & circa semiaxes, vel semidiametros, HO, OM, intelligatur, HMA, semicirculus, vel semiellipsis,

cuius curuam, ST, EC, productæ secant in, VN, compleatur pariter parallelogramma, HV, HM, HN, producantur insuper, YM, BG, vsque in, & B, & S V, EN, vsq; ad puncta, P, Z, Q, I, quæ sunt in lateribus, BR, Y &. Igitur parallelogrammum, LT, ad portionem, HST, erit vt omnia quadrata, HV, ad omnia quadrata semiportionis, HT



V, (regula, GM, pro hac Propos. sumpta) .∴ vt . TA, ad compositam ex, $\frac{1}{4}$, TA, & $\frac{1}{2}$, HT, vt patet in Libro de Circulo, & Ellipsis Propositione 1.

Similiter ostendemus, BO, semiparabolæ, HGO, esse sexquialterum, est enim vt omnia quadrata, HM, ad omnia quadrata, HMO, idest in ratione sexquialtera, vt patet in eadem Propos. 1.

Pariter demonstremus, DC, ad portionem, HGE, esse vt, AC, ad compositam ex, $\frac{1}{4}$, AC, & $\frac{1}{2}$, CH, sicemum sunt omnia
 O O 2 qua-

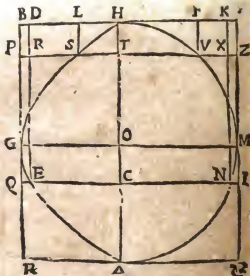
quadrata, HN , ad omnia quadrata femiportionis, $H M N C$, vt patet in eiusdem Lib. Propoi. 1.

Quod si velimus comparare parallelogramma, quæ sunt in basi-
bus æqualibus axi, vel diametro, inueniemus infrascriptas rationes
scilicet parallelogrammum, BT , ad portionem, $H \delta T$, esse vt re-
ctangulum sub, HO , & tripla, OA , ad rectangulum sub, HT , &
sub composita ex, TA , &, AO , sicuti sunt omnia quadrata, HZ ,
ad omnia quadrata femiportionis, HTV . Eadem ratione, BC , ad

portionem, HGE
 C , erit vt rectangu-
lum sub, HO , &
tripla, OA , ad re-
ctangulum sub, H
 C , & sub composita
ex, CA , &, AO ,
sic enim sunt omnia
quadrata, HI ,
ad omnia quadrata
femiportionis, HM
 NC , vt patet in eo-
dem Lib. 3. Prop. 2.

Si tandem sumamus
parallelogrammum, PC , cui in-
scripta est parabolæ
portio, $TSGE C$,
inclusa duabus, ST ,
 EC , ad basim, HA , vtcunq; ordinatim applicatis, siue intercipient

axem, vel diametrum, GO , siue non, siue axis, vel diametrum, GO ,
sit altera harum duarum ad basim, HA , ordinatim applicatarum,
siue non; reperiemus parallelogrammum, PC , ad portionem, TS
 GEC , esse vt rectangulum, HOA , ad rectangulum sub, AC , &
sub composita ex, $\frac{1}{2}CT$, & tota, TH , vna cum rectangulo sub, T
 C , & sub composita ex, $\frac{1}{2}TC$, &, $\frac{1}{2}TH$, sic enim esse inuenie-
mus omnia quadrata, TI , ad omnia quadrata quadrilinci, TVM
 NC , vt patet eodem Lib. Propoi. 4.



COROLLARIUM.

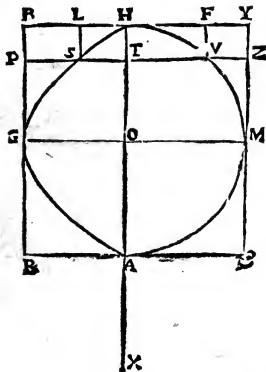
Hinc habetur si sint trian-
gula, ductis, SH , PH , GH , QT , hæc
ad portiones, quibus inscribuntur habere easdem rationes, quas
habent dimidia antecedentium ad eadem consequentia superius exposita,
sunt enim & ipsa trian-
gula dimidiorum parallelogrammorum dimidia.

THEO.

THEOREMA VI. PROPOS. VI.

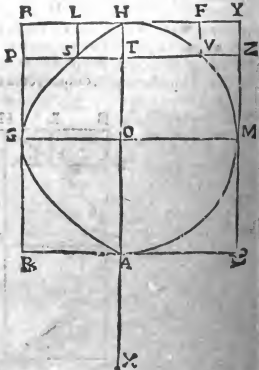
SI ad basim datæ parabolæ ordinatim applicetur recta linea, tota parabola ad abscissam portionem per ipsam ordinatim applicatam erit, vt parallelepipedum sub altitudine dimidia basi, sub basi autem quadrato totius basis, ad parallelepipedum sub altitudine linea composita ex dimidia basi, & reliquo basis, dempta abscissa ab eadem extremitate basis, à qua portio parabolæ abscinditur, & sub basi quadrato eiusdem abscissæ per dictam ordinatim applicatam : Vel erit, vt cubus totius basis ad parallelepipedum sub basi quadrato abscissæ, altitudine tripla reliquæ, cum cubo dictæ abscissæ.

Sit parabola, H G A, cuius basis, H A, & axis, vel diameter, G O; ducatur deinde ipsi, G O, vtcunque parallela, S T. Dico parabolam, A G H, ad vtramuis portionem, S H T, T S G A, vt ad, S H T, esse vt parallelepipedum sub altitudine dimidia, H A, quæ sit, A X, illi indirectum constituta, basi quadrato, A H, ad parallelepipedum sub altitudine, X T, basi quadrato, T H. Producat, G O, in, M, & circa semiaxes, vel semidiametros, H O, O M, intelligatur descriptus semicirculus, vel semicirculus, H M A, deinde per puncta, G, M, ducantur ipsi, H A, parallelæ, B R, Y



& R, Y
& &

- &, & per, HA , ipsi, GM , parallelæ, BY , & perducaturque, TS , vsque ad, B , & Y , in, P , Z , & per, SV , ducantur, VF , SL , parallelæ ipsi, HA , sunt igitur parallelogramma, BA , AY , LT , TF , BT , TY , PA , AZ . Igitur parabola, AGH , ad portionem, HST , habet rationem compositam ex ea, quam habet parabola, HGA , ad parallelogrammum, BA , idest ex ea, quam habent omnia quadrata, H &, (regula sumpta pro hoc Theor. tripla, GM ,) ad omnia quadrata semicirculi, vel semiellipsis, HMA ; & ex ea, quam habet, AB , ad, BT , idest, AH , ad, HT , idest omnia quadrata, & H , ad omnia quadrata, HZ ; & ex ea, quam habet, BT , ad portionem, HST , idest omnia quadrata, HZ , ad omnia quadrata semiportionis, HTV , sed etiam omnia quadrata semicirculi, vel semiellipsis, HMA , ad omnia quadrata semiportionis, HTV , habent rationem compositam ex ea, quam habent omnia quadrata semicirculi, vel semiellipsis, HMA , ad omnia quadrata, H &, & ex ea, quam habent hæc ad omnia quadrata semiportionis, HTV , ergo parabola, HGA , ad portionem, HST , est vt omnia quadrata, HMA , ad omnia quadrata semiportionis, HTV , idest vt parallelepipedum sub altitudine, XA , basi quadrato, AH , ad parallelepipedum sub altitudine, XT , basi quadrato, TH ; vel vt cubus, AH , ad parallelepipedum sub altitudine tripla, AT , basi quadrato, TH , cum cubo, TH , sic.n. esse omnia quadrata semicirculi, vel semiellipsis, HMA , ad omnia quadrata semiportionis, HTV , ostensum est Lib. 3. Propos. 6.



COROLLARIUM.

Hinc patet, quod, dividendo, portio parabolæ, $SGAT$, ad portionem, SHT , erit vt omnia quadrata semiportionis, $AMVT$, ad omnia quadrata semiportionis, HVT , .i. vt parallelepipedum sub altitudine linea composita ex, OH , HT , basi quadrato, TA , ad parallelepipedum sub altitudine, XT , basi quadrato, HT , vt patet in Coroll. supradictæ Propos. 6. eiusdem Libri 3.

THEOREMA VII. PROPOS. VII.

Si duæ ad basim parabolæ applicentur vtcunque rectæ linæ, abscissæ portiones parabolæ erunt inter se, vt parallelepipeda sub basibus quadratis abscissarum à basi per eandem applicatas ab eadem extremitate, à qua portiones abscissæ intelliguntur, altitudinibus compositis ex residuis dictæ basis (demptis abscissis) & dimidia totius.

Sit ergo parabola, HGA , in basi, HA , ad quam ordinatim applicentur duæ vtcunque linæ, ST , RV , abscindentes portiones, RHV , SHT . Dico portionem, RHV , ad portionem, SHT , esse (si producatur, AX , æqualis ipsius basis, AH , medietati) vt parallelepipedum sub altitudine, XV , basi quadrato, VH , ad parallelepipedum sub altitudine, XT , basi quadrato, TH . Est enim portio, RHV , ad parabolam, AGH , vt parallelepipedum sub altitudine, XV , basi quadrato, VH , ad parallelepipedum sub altitudine, XA , basi quadrato, AH , item parabola, AGH , ad portionem, SHT , est vt parallelepipedum sub altitudine, XA , basi quadrato, AH , ad parallelepipedum sub altitudine, XT , basi quadrato, TH , ergo ex æquali portio, RHV , ad portionem, SHT , est vt parallelepipedum sub altitudine, XV , basi quadrato, VH , ad parallelepipedum sub altitudine, XT , basi quadrato, TH , quod ostendere oportebat.



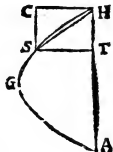
Ex antec.

THEO

THEOREMA VIII. PROPOS. VIII.

SI ad basim datæ parabolæ ordinatim applicetur recta li-
nea, sub qua, & sub portione basis abscissa, ac earum ex-
trema iungente, fiat triangulum, portio parabolæ abscissa ad
triangulum sibi inscriptum erit, vt ad reliquam basis, demptæ
abscissa, eadem reliqua cum, $\frac{1}{2}$, ipsius abscissæ.

Sit parabola, HGA, in basi, HA, ad quam ordinatim applicetur
vtrunque recta linea, ST, fiat autem triangulum sub, ST, & vtrauis
duarum, HT, TA, vt sub, HT, & sub, SH,
quod sit, HST. Dico portionem, HST, ad
triangulum, HST, esse vt compositam ex, A
T, & $\frac{1}{2}$, TH; ad, AT, compleatur paralle-
logrammum, CT, est ergo parallelogrammum,
CT, ad portionem, HST, vt, AT, ad com-
positam ex, $\frac{1}{2}$, AT, & $\frac{1}{2}$, TH, & antecedentium
dimidia scilicet triangulum, HST, ad
portionem, HST, erit vt dimidia, AT, ad
compositam ex, $\frac{1}{2}$, AT, & $\frac{1}{2}$, TH, idest vt,
AT, ad, AT, cum, $\frac{1}{2}$, HT, & conuertendo,
portio, HST, ad triangulum, HST, erit vt
composita ex, $\frac{1}{2}$, HT, & tota, TA, ad, TA,
quod ostendendum nobis erat.



S C H O L I V M.

Potesť autem, & dicta ratio sic constitui, triplicatis terminis, scili-
cet, quod portio, HST, ad triangulum, HST, sit vt vna, HA,
cum duabus, AT, ad tres, AT, vel sic, quod sit, vt dimidia, HA, cum,
AT, ad ipsam, AT.

PROBLEMA I. PROPOS. IX.

AData parabola portionem abscindere per lineam ab
eiusdem basim ordinatim ductam, quæ ad triangulum
sub eadem ordinatim ducta, & abscissa per eandem à basi pa-
rabolæ ad eandem partem, ad quam abscinditur portio, ha-
beat datam rationem, dummodo hæc sit maior sexquialtera.

Hoc

Hoc Problema soluetur methodo Propos. 8. Lib. 3. propterea circa ipsum non immoror.

THEOREMA IX. PROPOS. X:

SI ad basim datæ parabolæ ordinatim applicentur vtcun- que rectæ lineæ, triangula sub ipsis, & portionibus basis ab iisdem abscissis, erunt vt parallelepipeda sub basibus quadratis abscissarum à basi, altitudinibus autem residuis ipsius basis demptis abscissis.

Sit parabola, HGA , cuius basis, HA , axis, vel diameter, GO , sint autem ductæ duæ vtcunq; ordinatim applicatæ ad ipsam basim, HA , ipsæ, ST , VX , & iungantur, SH , VH . Dico triangulum, VHX , ad triangulum, HST , esse vt parallelepipedum sub altitudine, AX , basi quadrato, XH , ad parallelepipedum sub altitudine, AT , basi quadrato, TH .

Quoniam enim triangula vnum angulum vni angulo æqualem habentia rationem habent ex ratione laterum illis angulis circumstantium compositam, ideo triangulum, VHX , ad triangulum, SHT , habebit rationem compositam ex ea, quam habet, VX , ad, ST , idest rectangulum, AXH , ad rectangulum, $A TH$, & ex ea, quam habet, XH , ad, HT , sed istæ duæ rationes componunt rationem parallelepipedi sub altitudine, HX , basi rectangulo, AXH , ad parallelepipedum sub altitudine, HT , basi rectangulo, HTA , .i. parallelepipedi sub altitudine, AX , basi quadrato, XH , ad parallelepipedum sub altitudine, AT , basi quadrato, TH , ergo triangulum, VHX , ad triangulum, SHT , erit vt parallelepipedum sub altitudine, AX , basi quadrato, XH , ad parallelepipedum sub altitudine, AT , basi quadrato, TH , quod erat ostendendum.



6. Lib. 2.

3. Huius.

G.D Cor.
4. G. n. 34
lib. 2.Schol. 35.
l. b. 2.

COROLLARIUM.

Hinc apparet, si producat^r, GO , ut^qq; in, E , & circa semiaxes, vel semidiametros, HO , OE , describi intelligatur semicirculus, vel semiellipsis, HEA , quod, si etiam producantur, ST , VX , in, N , M , & iungantur, HN , HM ; omnia quadrata trianguli, HXM , ad omnia quadrata trianguli, HTN , regula, OE , erunt in ratione composita ex ea, quam habet quadratum, XM , ad quadratum, TN . i. re-ctangulum. AXH , ad re-ctangulum, ATH , & ex ea, quam habet, XH , ad, HT , i. erunt, ut parallelepipedum sub altitudine, AX , basi quadrato, XH , ad parallelepipedum sub altitudine, AT , basi qua-drato, TH .

THEOREMA X. PROPOS. XI.

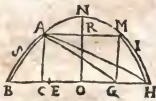
Si ad axim, vel diametrum datæ parabolæ ordinatim applicentur duæ re-ctæ lineæ eandem secantes, deinde sumpto extremo puncto minoris dictarum ordinatim applicatarum, & alio extremo puncto maioris dictarum, sed non ad eandem partem, iungantur dicta puncta re-cta linea; hæc dividet quadrilineum duabus ordinatim applicatis inclusum in duo trilinea: Trilineum igitur constitutum in maiori dictarum linearum ad trilineum cõstitutum in minori tanquam in basi erit, ut dicta maior ordinatim ductarum, simul cum tertia proportionali duarum, quarum prima est tripla compositæ ex minori, & dimidia excessus maioris super minorem, secunda autem est dimidia dicti excessus, ad eandem minorem, cum eadem tertia proportionali.

Sit ergo parabola, cuius basis, BH , axis, vel diameter, NO , duæ ad ipsam ut^qq; ordinatim applicatæ sint, BH , basis, & AM , minor ipsa, BH , abscindens parabolam, ANM , iunatur autem ut^qq; punctum, A , extremum minoris, AM , & punctum, H , ad aliam partem de duobus extremis maioris, BH , & iungantur, AH , puncta re-cta linea, AH , deinde à punctis, A , M , demittantur versus, BH , parallelæ ipsi, NO ; AC , MG , erit ergo, BC , GH , excessus, BH , super, AM , &, BC , æqualis ipsi, GH , dimidium dicti excessus; fiat etiam, ut tripla, HC , ad, BC , ita, BC , ad, C
 E , &

E, & iungatur, A G. Dico trilineum, A B H, ad trilineum, A M H, esse vt, B H, cum, C E, ad ipsam, A M, cum, C E: Prius autem dico portionculam, A S B, esse æqualem portionculæ, M I H, & enim trapezium, A B O R, æquatur trapezio, R O H M, & quadrilinium, R A S B O, ipsi quadrilineo, R M I H O, cum, A O, axis, vel diameter bifariam diuidat omnes æquidistantes ipsi, B H, & ideo omnes lineæ quadrilinei, R A S B O, æquantur omnibus lineis quadrilinei, R M H O, vnde dicta quadrilinea etiam sunt equalia, & ideo portionculæ, A S B, M I H, inter se sunt æquales: 3. 2.

Quoniam, verò portio, A S B C, ad triangulum, A B C, est vt composita ex $\frac{1}{3}$, B C, & ex, C H, ad, C H, ideo, diuidendo, portioncula, A S B, ad triangulum, A B C, erit vt $\frac{1}{3}$, B C, ad, C H, vel vt, B C, ad triplam, C H, .i. sumpta, B C, communi altitudine, vt quadratum, B C, ad rectangulum sub, B C, & tripla, C H; est autem triangulum, A B C, ad triangulum, A B H, vt, C B, ad, B H, ideo (sumpta communi altitudine tripla, C H,) vt rectangulum sub, B C, & tripla, C H, ad rectangulum sub, B H, & tripla, C H, ergo ex æquali portioncula, A S B, ad triangulum, A B H, erit vt quadratum, B C, ad rectangulum sub, B H, & tripla, H C, quoniam verò, B C, est media proportionalis inter triplam, H C, & ipsam, C E, ideo quadratum, B C, æquatur rectangulo sub tripla, H C, & sub, C E, vnde portioncula, A S B, ad triangulum, A B H, erit vt rectangulum sub, C E, & tripla, C H, ad rectangulum sub, B H, & tripla, C H, ideo erit, vt basis, C E, ad basim, B H, ergo, componendo, trilineum, A S B H, ad triangulum, A B H, erit vt, C E, cum, B H, ad ipsam, B H, triangulum verò, A B H, ad triangulum, A C G, vel ad triangulum, A G M, est vt, B H, ad, C G, vel ad, A M, est verò triangulum, A G M, æquale triangulo, A H M, ergo trilineum, A S B H, ad triangulum, A M H, erit vt, C E, cum, B H, ad, A M, est verò trilineum, A S B H, ad portionculam, A S B, vel, M I H, illi æqualem, per conuersionem rationis, vt, B H, cum, C E, ad ipsam, C E, ergo, colligendo, trilineum, A S B H, ad triangulum, A H M, & portionculam, M I H, .i. ad trilineum, A M I H, erit vt, B H, cum, C E, ad ipsam, A M, cum, C E, quod ostendere oportebat,

8. huius.
5. l. 2.



Ellicitur
ex 1. 2.

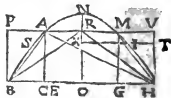
COROLLARIUM.

Hinc patet triangulum, ABH , ad portionculam, ASB , esse vt, BH , ad, CE .

THEOREMA XI. PROPOS. XII.

Asumpta figura Propof. ant. dimissa recta, AG , & confituito parallelogrammo super, BH , circa axim, vel diametrum, RO , quod sit, PH , iunctisque, BR , RH , ostendemus parallelogrammum, PH , ad frustum parabolæ, $ASBHM$, esse vt, BH , ad, HC , cum, CE ; & triangulum, RBH , ad idem frustum esse vt, BH , ad duplam, HC, CE .

Parallelogrammum enim, PH , est ad triangulum, ABH , vt dupla, BH , ad ipsam, BH , triangulum verò, ABH , ad sectionculam, ASB , est vt, BH , ad, CE , ergo, ex æquali, parallelogrammum, PH , ad sectionculam, ASB , est vt dupla, BH , ad, CE , & ad duas portionculas, ASB, MIH , erit vt dupla, BH , ad duplam, CE , id est vt, BH , ad, CE . Item parallelogrammum, PH , ad trapezium, $ABHM$, est vt, BH , ad, AM , cum dimidio excessus, BH , super, AM , i. ad, AM , vel, CG, GH , ergo, colligendo, parallelogrammum, PH , ad sectionculas, ASB, MIH , cum trapezio, $ABHM$, i. ad frustum parabolæ, $ASBHM$, erit vt, BH , ad, HC , cum, CE . Quia verò triangulum, RBH , est dimidium parallelogrammi, PH , idè ad frustum, $ASBHM$, erit vt dimidia, BH , ad, HC , cum, CE , i. vt, BH , ad duplam, HC, CE , quod erat ostendendum.

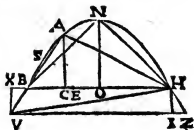


THEOREMA XII. PROPOS. XIII.

Si ab extremo puncto basis datæ parabolæ ducatur vsq; ad curuam parabolæ supra, vel infra basim (indefinite producta ipsa curua) recta linea: Data parabola ad segmenta sub ductis lineis, & curua ab iisdem abscissa comprehensa, singillatim sumpta, erit vt cubus basis ipsius datæ parabolæ ad cubum rectæ lineæ dicto puncto interceptæ, & alio puncto eiusdem basis productæ, si opus sit, in quod cadit recta linea, quæ ducitur ab alio extremo puncto basis reflecti segmenti parallela axi, vel diametro ipsius datæ parabolæ.

Sit ergo data parabola, HNB , in basi, HB , sumpto autem vno extremorum punctorum, H , B , ipsius basis, HB , vt ipsum, H , ab eo ducatur vtcunq; recta linea, HA , supra basim, HB , & indefinite producta curua, NAB , alia, HV , subter basim, vt sint constituta segmenta, ANH , $VBNH$, sit autem axis, vel diameter, NO , cui parallelæ ducantur per puncta, AV , versus basim, HB , productam, si opus sit, occurrentes illi in punctis, X , C .

Dico ergo parabolam, HNB , ad segmentum, HNA , esse vt cubus, HB , ad cubum, HC . Eandem verò ad segmentum, $HNBV$, esse vt cubum, BH , ad cubum, HX , iungantur puncta, $B, A; B, N; N, H$, & sit, CE , tertia proportionalis duarum, quarum prima est



tripla, CH , secunda autem ipsa, BC . Quoniam ergo triangula, NBH , BAH , sunt in eadem basi, BH , crunt inter se, vt altitudines, vel vt lineæ, quæ à verticibus, NA , ad bases ductæ cum

eisdem æqualiter inclinantur .i. triangulum, HNB , ad triangulum, HAB , erit vt, NO , ad, AC , .i. vt rectangulum, HOB , ad rectangulum, HCB . Insuper triangulum, HNB , ad portunculam, ASB , habet rationem compositam ex ratione trianguli, HNB , ad triangulum, HAB , .i. ex ratione rectanguli, HOB , ad rectangulum, HCB , & ex ratione trianguli, HAB , ad por-

Coroll. 1.

19. huius.

Defin. 2.

1. 1.

TOL-

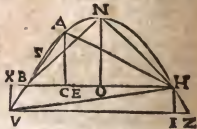
Ex Co-
rolantec.

tionculam, ASB , .i. ex ratione, BH , ad, CE , quæ duæ rationes componunt rationem parallelepipedum sub altitudine, BH , basi rectangulo, HOB , vel quadrato, OH , ad parallelepipedum sub altitudine, CE , basi rectangulo, HCB , ergo triangulum, $HN B$, ad portionculam, ASB , est vt parallelepipedum sub altitudine, BH , basi quadrato, HO , ad parallelepipedum sub altitudine, CE , basi rectangulo, HCB , est autem, vt dicebatur, triangulum, $HN B$, ad triangulum, HAB , vt rectangulum, HOB , vel quadratum, HO , ad rectangulum, HCB , idest sumpta, HB , communi altitudine, vt parallelepipedum sub altitudine, HB , basi quadrato, HO , ad parallelepipedum sub altitudine, HB , basi rectangulo, HCB , ergo, colligendo, triangulum, $HN B$, ad portionculam, ASB , cum triangulo, ABH , sicut ad trituncum, $HASB$, erit vt parallelepipedum sub altitudine, HB , basi quadrato, HO , ad parallelepipedum sub altitudine composita ex, HB , CE , basi rectangulo, HCB ; vel vt istorum quadrupla sicut vt parallelepipedum sub eadem altitudine, HB , basi quadruplo quadrati, HO , idest quadrato, HB , sicut vt cubus, HB , ad parallelepipedum sub eadem altitudine composita ex, HB , CE , basi quadruplo rectanguli, HCB .

h. huius.

Quia verò parabola, $HN B$, est sexquitertia trianguli, $HN B$, ideò erit ad ipsum, vt solum sexquiertium cubi, HB , ad cubum, HB , est autem triangulum, $HN B$, ad trilineum, $HASB$, vt cubus, HB , ad parallelepipedum sub altitudine composita ex, HB , CE , & sub basi quadruplo rectanguli, HCB , ergo ex æquali parabola, $HN B$, ad trilineum, $HASB$, erit vt solidum sexquiertium cubi, HB , ad parallelepipedum sub altitudine composita ex, HB , CE , basi quadruplo rectanguli, HCB ; vel vt istorum subsexquiertia sicut vt cubus, HB , ab parallelepipedum sub eadem altitudine composita ex, HB , CE , basi triplo rectanguli, HCB , est enim quadruplum rectanguli, HCB , sexquiertium tripli eiusdem rectanguli; hoc autem consequens parallelepipedum potest diuidi in parallelepipedum sub altitudine, CE , basi triplo rectanguli, HCB , vel basi rectangulo sub, BC , & tripla, CH , & in parallelepipedum sub altitudine, HB , basi etiam rectangulo sub, BCH , ter sumpto, quoniam verò tripla, HC , &, CB , CE , sunt deinceps proportionales, ideò parallelepipedum, quod

35. l. a.



fit ab

fit ab illis tribus æquale est cubo mediæ idest parallelepipedum sub
 altitudine, CE , & sub basi rectangulo ipsius, BC , ductæ in tri- 41. l. 2.
 plam, CH , æquabitur cubo, BC , remanet adhuc parallelepipedum sub altitudine, HB , basi tribus rectangulis, BCH , quod (al-
 titudinem, BH , dividentes in duas scilicet in, BC , CH ,) dividi-
 mus in parallelepipedum sub altitudine, HC , basi rectangulo, H 35. l. 2.
 CB , ter sumpto idest in parallelepipedum sub altitudine, BC , basi
 quadrato, CH , ter sumpto, & in parallelepipedum sub altitudine, 36. l. 2.
 BC , basi rectangulo, BCH , ter sumpto idest in parallelepipedum
 sub altitudine, HC , basi quadrato, BC , ter sumpto; parallelepipedum ergo sub altitudine composita ex, HB , CE , basi rectangu- 36. l. 2.
 lo, HCB , ter sumpto, æquatur parallelepipedis ter sub, BC , &
 quadrato, CH , ter sub, HC , & quadrato, CB , cum cubo, CB ,
 ad hæc ergo simul sumpta cubus, HB , erit vt parabola, HNB ,
 ad trilineum, $HASB$; quia verò parallelepipedum ter sub, BC , 38. l. 2.
 & quadrato, CH , cum parallelepipedo ter sub, HC , & quadrato,
 CB , cum cubo, CB , deficiunt à cubo, BH , quantitate cubi, HC ,
 ideò, per conuersionem rationis, parabola, HNB , ad segmentum,
 HNA , erit vt cubus, BH , ad cubum, HC .

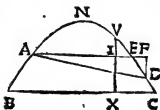
Nunc dico parabolam, HNB , ad segmentum, $HNBV$, esse
 vt cubum, BH , ad cubum, HX ; ducatur per, V , ipsi, BH , pa-
 rallela, VZ , secans curuam parabolæ productam in, Z , & à 3. huius
 puncto, H , ipsi, NO , vel, XV , demittatur parallela, HI , oc-
 currens ipsi, VZ , in, I , est ergo parabola, BNH , ad parabo-
 lam, $VBNHZ$, vt cubus, BH , ad cubum, VZ , item parabo-
 la, $VBNHZ$, ad segmentum, $VBNH$, (quia, VH , est supra
 basim, VZ ,) est vt cubus, ZV , ad cubum, VI , vel, XH ; æqua-
 lis, VI , quia, XI , est parallelogrammum; ergo, ex æquali, pa-
 rabola, HNB , ad segmentum, $HNBV$, constitutum per lineam
 ductam à puncto extremo, H , basim, BH , propterantem infra
 eandem basim, BH , erit vt cubus, BH , ad cubum, HX , quæ o-
 stendenda erant.

THEOREMA XIII. PROPOS. XIV.

S Intra curuam parabolæ ducantur vtcunque duæ rectæ
 lineæ in eandem curuam terminantes, parabola ab vna
 ductarum constituta ad parabolam ab alia constitutam erit,
 vt cubus primò ductæ ad cubum rectæ lineæ, quæ, ducitur
 per

per punctum extremum alterius secundò ductæ, parallela primò ductæ, inclusæ dicto puncto, & alio eiusdem parallelæ productæ, si opus sit; in quod cadit, quæ ducitur per aliud extremum punctum secundò ductæ, parallela axi, vel diametro parabolæ per primò ductam constitutæ.

Sit curua parabolæ, $B A E C$, intra quam sint utcumq; ductæ in eandem curuam hinc inde terminantes (scilicet quod non sint ductæ parallela axi) primò, $B C$, secundò, $A D$; ducatur deinde per utrumlibet extremorum punctorum secundò ductæ, ut per, A , ipsa, $A F$, parallela ipsi, $B C$, in quam productam, si opus sit, incidat parallela axi, quæ ducitur per punctum, D , aliud extremum ipsius, $A D$, occurrat autem illi in, F . Dico parabolam, $B A E C$, ad parabolam, $A E D$, esse ut cubum, $B C$, ad cubum, $A F$. Est enim parabola,



huius.

ex antec.

$B N C$, ad parabolam, $A N E$, ut cubus, $B C$, ad cubum, $A E$, item parabola, $A N E$, ad parabolam, $A N E D$, est ut cubus, $A E$, ad cubum, $A F$, ergo parabola, $B N C$, ad parabolam, $A N E D$, est ut cubus, $B C$, ad cubum, $A F$, quod ostendere opus erat.

THEOREMA XIV. PROPOS. XV.

IN eadem antecedentis figura, si ducatur intra parabolam, $B N C$, à puncto, V , sumpto utcumque in curua, $B N C$, versus basim, $B C$, ipsa, $V X$, incidens basi in, X , parallela axi, vel diametro eiusdem parabolæ. Dico parabolam, $A N E D$, ad segmentum, $V C X$, esse ut cubum, $A F$, ad parallelepipedum ter sub, $B X$, & quadrato, $X C$, cum cubo, $X C$.

Nam parabola, $A N E D$, ad parabolam, $B N C$, conuertendo, est ut cubus, $A F$, ad cubum, $B C$, item parabola, $B N C$, ad segmentum, $V C X$, est ut cubus, $B C$, ad parallelepipedum ter sub altitudine, $B X$, basi quadrato, $X C$, cum cubo, $X C$, ergo, ex æquali, parabola, $A N E D$, ad segmentum, $V C X$, erit ut cubus, $A F$, ad parallelepipedum ter sub, $B X$, & quadrato, $X C$, cum cubo, $X C$, quod ostendere oportebat.

huius.

THEO.

THEOREMA XV. PROPOS. XVI.

IN eadem supradicti Theorematis figura ostendemus trilineum, $VNAI$, ad trilineum, $VNABX$, esse ut parallelepipedum ter sub, EI , & quadrato, IA , cum cubo, IA , ad parallelepipedum ter sub, CX , & quadrato, XB , cum cubo, XB . Similiter trilineum, VEI , ad trilineum, $VECX$, esse ut parallelepipedum ter sub, AI , & quadrato, IE , cum cubo, IE , ad parallelepipedum ter sub, BX , & quadrato, XC , cum cubo, XC .

Trilineum enim, $VNAI$, ad parabolam, ANE , est ut parallelepipedum ter sub, EI , & quadrato, IA , cum cubo, IA , ad cubum, AE , item parabola, ANE , ad parabolam, BNC , est ut cubus, AE , ad cubum, BC , & tandem parabola, BNC , ad trilineum, $VABX$, est ut cubus, CB , ad parallelepipedum ter sub, CX , & quadrato, XB , cum cubo, BX , ergo, ex æquali, trilineum, $VNAI$, ad trilineum, $VNBX$, erit ut parallelepipedum ter sub, EI , & quadrato, IA , cum cubo, IA , ad parallelepipedum ter sub, CX , & quadrato, XB , cum cubo, XB . Eodem modo ostendemus trilineum, VEI , ad trilineum, $VECX$, esse ut parallelepipedum ter sub, AI , & quadrato, IE , cum cubo, IE , ad parallelepipedum ter sub, BX , & quadrato, XC , cum cubo, XC , quod, &c.

THEOREMA XVI. PROPOS. XVII.

SI duæ intra curvam parabolicam ducantur rectæ lineæ axem secantes, fuerint autem constitutarum ab eisdem parabolæ diametri, vel axis, & diameter æquales, & ipse parabolæ erunt æquales.

Sit curva parabolica, BAC , intra quam ducantur utcumque duæ, DF , MC , axem secantes, id est non parallelæ axi, sint autem, AR , HO , diametri, vel axis, & diameter inter se æquales. Dico parabolam, DAF , esse æqualem parabolæ, MHC ; ducatur
Qq per,

per, C, ipsi, DF, parallela, CB, & producantur, AR, HO, vsq;
 ad, BC, in, P, Q, iunganturque, AC, HC, & à puncto, M,
 ducatur, MX, parallela axi, vel diametro, AP; quoniam ergo, O
 Q, est parallela ipsi, MX, & ipsa secat, MC, bifariam in, O, se-
 cabit etiam, XC, bifariam in Q; & quia parabola, ABC, ad pa-
 rabolam, MHFC, est vt cubus, BC, ad cubum, CX, vel vt cu-
 bus, PC, ad cubum, CQ, ideo semiparabola, APC, ad semipa-
 rabolam, HOC, erit vt cubus, PC, ad cubum, CQ, & eorun-
 dem subiecta tertia .i. triangulum, APC, ad triangulum, HOC,
 erit vt cubus, PC, ad cubum, CQ: quoniam verò triangu-
 la æqui-
 angula habent inter se rationem compositam ex ratione basium, &
 altitudinum, vel linearum à verticibus earundem ductarum æqua-
 liter basibus inclinatarum; ideo triangulum, APC, ad triangu-
 lum, HOC, habebit rationem compositam ex ratione basis, PA,
 ad basim, OH, vel, AR, illi æqualem, & ex ratione, PC, ad, C
 Q, quæ vel sunt altitudines, vel lineæ ductæ à communi vertice, C,
 eum æquali inclinatione ad bases, AP, &, HO, productam, quia,
 AP, HQ, sunt parallelæ, est autem vt,
 PA, ad AR, ita quadratum, PC, ad
 quadratum, RF, ergo triangulum, A
 PC, ad triangulum, HOC, habebit
 rationem compositam ex ea, quam ha-
 bet quadratum, PC, ad quadratum, R
 F, & ex ea, quam habet, PC, ad CQ,
 quia verò triangulum, APC, ad trian-
 gulum, HOC, est vt cubus, PC, ad
 cubum, CQ, ideo ad illud habet etiam rationem compositam ex
 ea, quam habet, PC, ad CQ, & ex ratione quadrati, PC, ad qua-
 dratum, CQ, ergo istæ duæ rationes, scilicet quam habet, PC,
 ad, CQ, & quadratum, PC, ad quadratum, RF, componunt
 eandem rationem, quam istæ duæ, scilicet ratio, PC, ad, CQ, &
 quadrati, PC, ad quadratum, CQ, est autem in his communis
 ratio, quam habet, PC, ad, CQ, ergo reliqua ratio, quam habet
 quadratum, PC, ad quadratum, CQ, erit eadem ei, quam habet
 quadratum idem, PC, ad quadratum, RF, ergo quadratum, C
 Q, erit æquale quadrato, RF, &, CQ, erit æqualis ipsi, RF.
 Quoniam autem parabola, BAC, ad parabolam, DAF, est vt
 cubus, BC, ad cubum, DF, .i. vt cubus, PC, ad cubum, RF,
 item ostensum est parabolam eandem, BAC, ad parabolam, MH
 FC, esse vt cubum, PC, ad cubum, CQ, ideo parabola, DAF,
 ad parabolam, MHFC, erit vt cubus, RF, ad cubum, QC, sunt
 autem, QC, RF, inter se æquales, vt ostensum est, & ideo etiam



huius.

huius.

corun-

eorundem cubi sunt æquales, ergo parabola, DAF , erit æqualis
parabolæ, $MHFC$, quod ostendere opus erat.

COROLLARIUM.

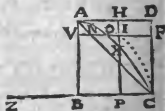
Hinc patet, si diametri, AR , HO , vel axis, & diameter sint æqua-
les, etiam, DF , XC , esse æquales, nam ostensum est, QC , esse æqualem
ipsi, RF , est autem, XC , dupla, CQ , & DF , dupla, FR , ided etiam,
 XC , DF , sunt, æquales.

THEOREMA XVII. PROPOS. XVIII.

Exposita semiparabola cum dimidia basi, & axi, vel
diametro totius, & completo parallelogrammo sub
dicto axi, vel diametro. & semibasi, descriptaque ellipsis
quarta, vel circuli circa axem. vel diametrum, & semi-
basim dictam, tanquam circa semiaxes, vel semidiame-
tros conjugatas integræ ellipsis, vel circuli; si deinde su-
matur utcumque punctum in semibasi, per quod ducatur
recta linea ad oppositum latus parallelogrammi paralle-
la dictæ axi, vel diametro, portio huius inter semibasim,
& curvam ellipsis, vel circuli inclusa, erit media propor-
tionalis inter inclusam oppositis lateribus parallelogram-
mi iam dicti, & eadem semibasim, ac curva parabolæ. Si
verò sumatur punctum in axi, vel diametro iam dicta,
& per ipsum ducatur semibasim parallela, producta vsq; ad
latus oppositum parallelogrammi iam dicti, & iungantur
extrema puncta curvæ parabolæ recta linea, huius portio
inclusa inter axim, vel diametrum dictam, & curvam pa-
rabolæ, erit media proportionalis inter eam, quæ inclu-
ditur lateribus oppositis dicti parallelogrammi, & eam,
quæ includitur lateribus trianguli sub dicta axi, vel diame-
tro, & dicta semibasim constituti.



Sit semiparabola, $AOCB$, in basi, BC , & axis, vel diameter integræ, AB , compleaturq; parallelogrammum, DB , & circa, $A B, BC$, tanquam femiaxes, vel semidiametros coniugatas, describatur quarta circuli, vel ellipsis, $AICB$, deinde sumatur in basi, BC , utcumque punctum, P , & per, P , ducatur ipsi, AB , parallela, PH , secans curuam parabolæ in, X , & circuli, vel ellipsis, AIC , in, I . Dico ergo, IP , esse mediam proportionalem inter, HP, PX , producat, CB , versus, B , in, Z , ita ut, BZ , sit æqualis, BC , est ergo quadratum, AB , vel quadratum, HP , ad quadratum, PI , ut rectangulum, ZBC , ad rectangulum, ZPC , i. ut, AB , vel, HP , ad, PX , ergo ut, HP , ad, PI , ita erit, IP , ad, PX .



60. cum
Sch. 1. 1.
3. huius.

lungantur puncta, A, C , & sumpto utcumq; puncto, V , in, AB , per ipsum ducatur ipsi, BC , parallela, VP , secans curuam parabolæ in, O , & rectam, AC , in, N . Dico ergo, ut, FV , ad, VO , ita esse, VO , ad, VN ; est enim quadratum, BC , vel quadratum, FV , ad quadratum, VO , ut, BA , ad, AV , i. ut, BC , vel, FV , ad, VN , ergo erit, ut, FV , ad, VO , sic, VO , ad, VN , quæ ostendere oportebat.

THEOREMA XVIII. PROPOS. XIX.

Parabolæ sunt inter se, ut parallelogramma illis circumscripta latera habentia basibus, & eorundem axis, vel diametris parallela.

Patet hæc propositio, nam dictæ parabolæ sunt subsexquialteræ dictorum parallelogrammorum, & ideo sunt inter se, ut ipsa parallelogramma.

A. COROLL. SECTIO I.

Hinc patet, conclusiones, quæ de parallelogrammis collectæ sunt in Propos. 5. 6. 7. 8. Lib. 2. suppositis quibusdam conditionibus in lateribus, vel in altitudine, & basi dictorum parallelogrammorum, posse colligi etiam pro parabolis easdem conditiones in axis, vel diametris, vel altitudinibus, & basibus habentes; quia enim tunc dictæ conditio-

ditiones reperiuntur etiam in lateribus circumscriptorum illis parallelogrammorum, vel in altitudine, & basi eorundem, quia basis est communis, & reliquum latus axi, vel diametro parabola aquidistans, idè sequuntur illic ostensa conclusiones pro parallelogrammis; & consequenter etiam pro ipsis parabolis, quarum ipsa parallelogramma sunt sexquialtera, recipi possunt.

B. SECTIO II.

B

Quia ergo ostensum est parallelogramma, quae sunt in eadem altitudine, esse inter se, ut bases, & quae in eadem basi, vel aequalibus basibus, esse inter se, ut altitudines, vel ut linea à verticibus ad bases cum aequali inclinatione ad easdem ducta: idè colligemus etiam parabolas, quae sunt circa eundem axem, vel diametrum, esse inter se, ut bases; & quae sunt in eadem, vel aequalibus basibus, esse inter se, ut altitudines, vel ut linea, quae à verticibus eorundem ad bases cum aequali inclinatione ducuntur, siue illa sint axes, siue diametri.

C. SECTIO III.

C

Similiter colligemus parabolas habere rationem compositam ex ratione basium, & altitudinum, vel linearum, quae à verticibus ducuntur, aequaliter basibus inclinarum, siue sint axes, siue diametri.

D. SECTIO IV.

D

Item parabola habentes bases altitudinibus, vel lineis à verticibus ductis aequaliter inclinatis reciprocas erunt aequales; & parabola aequales, quarum diametri aequaliter ab bases sint inclinata, habebunt bases altitudinibus, vel lineis ductis à verticibus ad bases aequaliter inclinatis reciprocas.

E. SECTIO V.

E

Denique parabola, quarum axes, vel diametri, ad bases aequaliter inclinati, ad easdem bases habent eandem rationem, sunt in dupla ratione basium, siue axium, vel diametrorum, vel ut quadrata eorundem; Nam parallelogramma his parabolis circumscripta sunt similia, & idè sunt, ut quadrata laterum homologorum, quae vel sunt axes, aut diametri, vel bases dictarum parabolarum, & idè etiam ipsae parabola sunt, ut quadrata axium, vel diametrorum aequaliter basibus inclinarum, vel ut quadrata basium, quae omnia facile patent.

SCHO

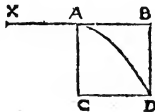
SCHOLIUM.

D Esiderari fortè tamen videtur, quod ostendamus has varietates parabolis contingere posse, nec easdem esse, exempligratia, ut circulos, quibus tantum contingit se habere, ut diametrorum quadrata, nec alia usdem accidit variatio, propterea subsequens Theorema subiiciemus.

THEOREMA XIX. PROPOS. XX.

D Ato quocunq; parallelogrammo, circa eiusdem duo latera angulum continentia semiparabola describi potest, cuius alterum eorundem laterum sit basis, alterum axis, vel diameter integræ parabolæ, ad quem dicta basis ordinatim applicatur.

Sit parallelogrammum quodcunque, AD , cuius sumantur vècunque duo latera, AC , CD , circa angulum, ACD . Dico circa, AC , CD , semiparabolam describi posse, ita ut alterum ipsorum, AC , CD , sit basis dictæ semiparabolæ, alterum sit axis, vel diameter integræ parabolæ; Esto quod velimus, CD , esse basim, & CA , axim, vel diametrum integræ parabolæ; applicetur ergo ad, AC , rectangulum æquale quadrato, CD , quod latitudinem faciat ipsam, XA , erit ergo quadratum, CD , æquale rectangulo sub, CA , AX , & AX , erit linea, iuxta quam possunt, quæ à curua parabolæ transiente per puncta, D , A , vertice, A , ad axim, vel diametrum, AC , ordinatim applicari possunt; erit ergo quædam semiparabola, cuius curua transibit per puncta, A , D , in basi, CD , existente, AC , axi, vel diametro integræ parabolæ, sit autem dicta semiparabola, ACD , quod ostendere opus erat.



Schol. 4^o.
lib. 1.

COROLLARIUM.

Hinc liquet, si cuilibet parallelogrammo est inscriptibilis semiparabola tali pacto, quo dictum est, quod varietates, quæ parallelis logrammis contingunt, etiam ipsi parabolis competere possunt.

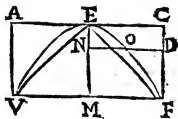
THEOREMA XX. PROPOS. XXI.

Omnia quadrata parallelogrammi in eadem basi, & circa eundem axim, vel diametrum cum parabola, regula basi, sunt dupla omnium quadratorum ipsius parabolæ: Omnia verò quadrata parabolæ sunt sexquialtera omnium quadratorum trianguli in eadem basi, & circa eundem axim, vel diametrum cum ipsa constituti.

Sit ergo parabola, cuius basis, VF , axis, vel diameter, EM ,

fit etiam parallelogrammum, AF , & triangulum, VEF , in eadem basi, VF , & circa eundem axim, vel diametrum, EM . Dico, omnia quadrata, AF , regula, VF , omnium quadratorum parabolæ, VEF , esse dupla: Omnia verò quadrata parabolæ, VEF , omnium quadratorum trianguli, VEF , esse sexquialtera. Sumatur intra, EM ,

utcuque punctum, N , per quod ipsi, VF , agatur parallela, ND , secans curvam parabolæ in, O ; est ergo quadratum, MF , vel quadratum, ND , ad quadratum, NO , ut, ME , ad, EN , est autem, EF , parallelogrammum in eadem basi, & altitudine cum semiparabola, EMF , regula est, MF , & punctum, N , sumptum utcuque, per quod regulæ parallela ducta est, ND , repertumque est, ut quadratum, DN , ad quadratum, NO , ita esse, ME , ad EN , ergo horum quatuor ordinum magnitudines erunt proportionales collectæ iuxta dictas quatuor magnitudines proportionales scilicet omnia quadrata, EF , magnitudines primi ordinis collectæ iuxta primam scilicet iuxta quadratum, ND , ad omnia quadrata semiparabolæ, EMF , magnitudines secundi ordinis collectas iuxta secundam scilicet iuxta quadratum, NO , erunt ut maxi-



Coroll. 3.
16. l. 2.

mæ

Coroll. 2.
19. l. 2.

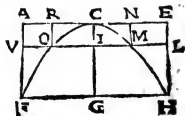
34. l. 2.

mæ abscissarum, EM , magnitudines tertij ordinis collectæ iuxta tertiam .i. iuxta, ME , ad omnes abscissas ipsius, ME , magnitudines quarti ordinis collectas iuxta quartam .i. iuxta, EN , sumptis maximis abscissarum, EM , & eiusdem omnibus abscissis, vel recti, vel eiusdem obliqui transitus; sunt autem maximæ abscissarum, EM , duplæ omnium abscissarum, EM , recti, vel eiusdem obliqui transitus, ergo & omnia quadrata, EF , erunt dupla omnium quadratorum semiparabolæ, EMF , & eorum quadrupla .i. omnia quadrata, AF , erunt dupla omnium quadratorum parabolæ, VEF ; Quarum ergo partium omnia quadrata, AF , erunt sex, earum omnia quadrata parabolæ, VEF , erunt tres, sed quarum partium omnia quadrata, AF , sunt sex, earum omnia quadrata trianguli, EVF , sunt duæ, quia omnia quadrata, AF , sunt tripla omnium quadratorum trianguli, EVF , ergo quarum partium omnia quadrata parabolæ, VEF , sunt tres, earum omnia quadrata trianguli, EVF , erunt duæ, ergo omnia quadrata parabolæ, VEF , erunt sexquialtera omnium quadratorum trianguli, EVF , quæ ostendere oportebat.

THEOREMA XXI. PROPOS. XXII:

SI ad eundem axim, vel diametrum parabolæ ordinatim applicentur duæ rectæ lineæ parabolas constituentes, quarum altera sumatur pro regula, harum parabolæ omnia quadrata erunt inter se, vt quadrata axium, vel diametrorum earundem.

Sint ergo ad eundem axim, vel diametrum, CG , parabolæ, FCH , duæ utcumque ordinatim applicatæ, FH , OM , parabolas, FCH , OCM , abscinderes, sit autem regula altera harum ordinatim applicatarum, vt, FH . Dico omnia quadrata parabolæ, FCH , ad omnia quadrata parabolæ, OCM , esse vt quadratum, GC , ad quadratum, CI : Constituantur parallelogrammum, AH , in basi, FH , & circa axim, vel diametrum, CG , & parallelogrammum, RM , in basi, OM , & circa axim, vel diametrum, CI . Quoniam ergo omnia

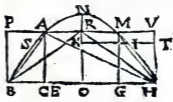


omnia quadrata, AH , sunt dupla omnium quadratorum parabolæ, FCH , & omnia quadrata, RM , sunt dupla omnium quadratorum parabolæ, OCM , ideò omnia quadrata parabolæ, FCH , ad omnia quadrata parabolæ, OCM , erunt vt omnia quadrata, AH , ad omnia quadrata, RM : Omnia vero quadrata, AH , ad omnia quadrata, RM , habent rationem compositam ex ea, quam habet quadratum, FH , ad quadratum, OM , ideft ex ea, quam habet, GC , ad, CI , & ex ea, quam habet, HE , ad, NM , quia illè cum basibus, OM , FH , continent angulos æquales, duè autem rationes, scilicet, quam habet, GC , ad, CI , & HE , ad, NM , .i. GC , ad, CI , componunt rationem quadrati, GC , ad quadratum, CI , ergo omnia quadrata, AH , ad omnia quadrata, RM , vel omnia quadrata parabolæ, FCH , ad omnia quadrata parabolæ, OCM , erunt vt quadratum, GC , ad quadratum, CI , quod ostendete opus erat.

THEOREMA XXII. PROPOS. XXIII.

In figura Prop. 12. sumpta regula ipsa, BH , ostendemus omnia quadrata, PH , ad omnia quadrata frusti, $ABHM$, esse vt, ON , ad compositam ex, NR , & RO : Omnia verò quadrata frusti, $ABHM$, ad omnia quadrata trianguli, RBH , esse vt compositam ex, ON , dupla, NR , et RO , ad ipsam, NO .

Sumatur in, RO , vt cunq; punctum, X , per quod regulæ, BH , parallela ducatur, XT , secans curuam parabolæ in, I , est ergo quadratum, OH , vel quadratum, TX , ad quadratum, XI , vt, ON , ad, NX , est autem parallelogrammum, RH , in eadem basi, & altitudine cum quadrilineo, $ROHM$, & punctum, X , sumptum est vt cunq; , ductaque, XT , regulæ parallela, repertum est quadratum, TX , ad quadratum, XI , esse vt,



ON , ad, NX , ergo horum quatuor ordinum magnitudines erunt proportionales. scilicet omnia quadrata, RH , magnitudines primi ordinis collectæ iuxta primam. scilicet iuxta quadratum, TX , ad omnia quadrata quadrilinei, $RMHO$, magnitudines secundi ordinis collectas iuxta secundam. scilicet iuxta quadratum, XI , erunt vt maximè abscissarum, OR , adiuncta, RN , ad omnes abscissas, OR , adiuncta, RN , quæ sunt

R r mas

Coroll. 3.
26. 1. 2.

magnitudines collectæ iuxta tertiam, & quartam .i. iuxta, ON , tertiam, &, NX , quartam, ipsdem recti, vel eiusdem obliqui transitus sumptis: Quia verò datæ rectæ lineæ, OR , adiungitur, RN , idè maximæ abscissarum, OR , adiuncta, RN , ad omnes abscissas, OR , adiuncta, RN , recti, vel eiusdem obliqui transitus, sunt vt, ON , ad

- Corol. 20. L. 2. compositam, ex, NR , & $\frac{1}{2}$. RO , idè omnia quadrata, RH , ad omnia quadrata quadrilinei, $R M H O$, vel eorum quadrupla. . omnia quadrata, PH , ad omnia quadrata frusti, $ABHM$, erunt vt, ON , ad compositam, ex, NR , & $\frac{1}{2}$. RO ; Et conuertendo omnia quadrata frusti, $ABHM$, ad omnia quadrata, PH , erunt vt composita, ex, NR , & $\frac{1}{2}$. RO , ad, NO , omnia verò quadrata, PH , omnium quadratorum trianguli, $R B H$, sunt tripla. . sunt vt, NO , ad $\frac{1}{2}$. eiusdem, NO , ergo, ex æquali, omnia quadrata frusti, $ABHM$, ad omnia quadrata trianguli, $R B H$, erunt vt composita, ex, NR , & $\frac{1}{2}$. RO , ad $\frac{1}{2}$. NO , vel vt horum tripla .i. vt composita ex tribus, NR , & sexquialtera, RO , ad ipsam, NO , porro si iunxerimus vnam, NR , cum, RO , fiet integra, ON , cum duabus, NR , & dimidia, RO , æqualis triplæ, NR , & sexquialteræ, RO ; ergo omnia quadrata frusti, $ABHM$, ad omnia quadrata trianguli, $R B H$, erunt vt composita ex dupla, NR , & dimidia, RO , cum, NO ; ad ipsam, NO ; quæ ostendere oportebat.

C O R O L L A R I V M.

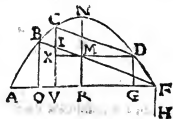
Quia autem probatum fuit omnia quadrata, PH , ad omnia quadrata frusti, $ABHM$, esse vt, NO , ad dimidiam, OR , cum, RN , sunt autem omnia quadrata, PH , ad omnia quadrata parallelogrammi, AC , vt quadratam, HO , ad quadratam, RM , .i. vt, ON , ad NR , idè omnia quadrata, PH , ad omnia quadrata frusti, $ABHM$, ab ipsdem demptis omnibus quadratis, AC , erunt vt, NO , ad dimidiam ipsius, OR .

THEOREMA XIXIII. PROPOS. XXIV.

Si intra curuam parabolæ ducatur vtcunq; recta linea in eandem terminata, & ad axem obliqua, deinde intra portionem ab ipsa resectam ducatur alia vtcunq; prædictæ parallela, agantur autem ab extremitate harum parallelarum lineæ axi æquidistantes: Vt basis resectæ portionis ad distantiam parallelarum ab eiusdem extremitate ductarum,

ita erit alia prædictæ parallela ad distantiam parallelarum ductarum ab eiusdem extremitate secundò dictæ .

Sit ergo intra curuam parabolicam, $ABCDF$, ducta utcumque; BF , obliquè secans axem, NR , in eandem curuam terminata, agatur deinde intra portionem, BNF , retectam à, BF , recta, C , D , parallela ipsi, BF ; ducantur insuper à punctis, B, C, D, F , axi, NR , parallelæ, BO, CV, DG, FH , & à puncto, F , cadat ipsi, NR , perpendicularis, FA , secans parallelas, DG, NR, CV, BO , in punctis, G, R, V, O , poterunt ergo ductarum parallelarum distantia tumi in ipsamet, AF , nam ipsa perpendiculariter dictas parallelas secat, erit ergo, OF , distantia parallelarum, BO, FH , ab extremis punctis rectæ, BF , ductarum; pariter, VG , erit distantia parallelarum, CV, DG , ab extremis punctis, CD , ductarum. Dico ergo, BF , ad, FO , esse vt, CD , ad, VG : Ducantur a puncto, D , ipsi, CV , perpendicularis, DX , secans, BF , in, M , quoniam ergo anguli, BOF, CXD , sunt recti, ideo sunt inter se æquales, item angulus, OBF , est æqualis angulo, VIF , & VIF , ipsi angulo, XCD , ergo angulus, OBF , erit æqualis angulo, XCD , & ideo reliquis, OFB , restitque, XDC , æqualis erit, & trianguli, BOF, CXD , similes erunt, vnde, BF , ad, FO , erit vt, CD , ad, DX , .i. ad, VG , quod ostendere opus erat.



46. Elem.

PROBLEMA II. PROPOS. XXV.

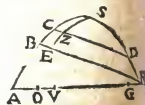
Asumpta iterum superioris figura, dimissa axi, & eadem parallelis, BO, CV, DG, FH , & ipsa, DX , figuram plenam describere cum portione, $BCDF$, communem habens angulum mixtum sub, BF , & curua, FD C , qui sit ad punctum, F , ita vt qualibet in descripta figura recta linea ipsi, BF , æquidistanter ducta, sit distantia parallelarum axi, quæ ab extremis punctis eiusdem rectæ lineæ, productæ vsque ad curuam parabolicam, duci possunt: Vocetur autem hæc descripta figura; figura distantiarum portionis, siue parabolæ, $BCDF$.

Rr 2

Quo-

Quoniam ergo, OF , est distantia parallelarum axi ductarum à punctis, BF , abicindatur a, BF , recta, FE , æqualis distantia, F O , insuper intelligatur adhuc ipsa, CD , ducta utcumque parallela rectæ, BF , terminans in puncta, C D , curvæ parabolæ, & cum sit, VG , distantia parallelarum axi, quæ à punctis, C D , ducuntur, abicindatur ab ipsa, CD , versus, D , ipsa, DZ , æqualis distantia, VG ; sic ductis in portione, $BCDF$, omnibus lineis, regula, BF , in earundem singulis intelligantur sumptæ distantia, sicut acceptæ fuerunt, EF , ZD , quarum extrema puncta sint in curva parabolica, $FDCB$, sint autem in huius curvæ ea parte, in qua sunt puncta, DF , patet ergo si sumamus punctum, S , verticem portionis, BSF , quod ductarum omnium linearum extrema puncta erunt in curva parabolica, quæ incipit à vertice, S , & definit in, F ;

per alia ergo extrema puncta earundem distantiarum intelligatur ducta linea, SZE . Dico figuram, SEF , comprehensam recta, EF , curva parabolica, SDF , & linea, SZE , esse huiusmodi, quod, si duxerimus intra ipsam utcumque ipsi, BF , parallelam, quæ producaturs vsq; ad curvam parabolicam,



huius portio manens in figura, SEF , erit distantia parallelarum axi, quæ ducuntur ab extremis punctis ab eadem producta in curva parabolica signatis. Intelligatur ergo ducta utcumque, DZ , ipsi, BF , parallela, & producta vsq; ad curvam parabolicam incidens illi in puncto, C , quoniam ergo, CD , est vna earum, quæ dicuntur omnes lineæ figuræ, BSF , portio eiusdem manens intra figuram, SEF , erit distantia parallelarum axi, quæ ab eisdem extremis punctis ductæ intelliguntur, & hoc per constructionem patet, quoniam ab ipsa, CD , abicisa est, DZ , quæ terminat in lineam, SZE , æqualis distantia, ergo figura, SEF , descripta est, qualem problema postulabat; quæ vocetur figura distantiarum portionis, sive parabolæ, BSF .

COROLLARIUM:

Quia verò ostensum est, BF , ad distantiam parallelarum axi à, B , F , ductarum, esse ut, CD , ad distantiam parallelarum axi à punctis, C , D , ductarum, sunt autem, EF , ZD , æquales distantia, ideo erit, BF , ad, FE , ut, CD , ad, DZ , & sic erit qualibet ducta in portione, BSF , parallela ipsi, BF , ad eiusdem partem inclusam figuræ, SEF , ut, BF , ad, FE .

THEO.

THEOREMA XXIV. PROPOS. XXVI.

Incadem antecedentis figura ostendemus omnia quadrata portionis, BSF , ad rectangula sub eadem portione, BSF , & sub figura, SEF , regula communi, BF , esse vt, B F , ad, FE .

Est enim quadratum, BF , ad rectangulum sub, BF , FE , vt, B F , ad, FE ; similiter ducta vtcunque, CD , parallela regulę, BF , ostendemus quadratum, CD , ad rectangulum, sub, CD , DZ , esse vt, CD , ad, DZ , est autem vt, BF , ad, FE , ita, CD , ad, DZ , ergo quadratum, BF , ad rectangulum, BFE , erit vt quadratum, CD , ad rectangulum, CDZ , sic ostendemus quamlibet ductam intra portionem, BSF , parallelam regulę, BF , ad eiusdem portionem inclusam figura, SFE , esse vt quadratum, BF , ad rectangulum sub, BF , FE , ergo quadratum, BF , ad rectangulum sub, BF , FE , erit vt omnia quadrata portionis, BSF , ad rectangula sub portione, BSF , & sub figura, SEF , vt autem quadratum, BF , ad rectangulum sub, BF , FE , ita, BF , ad, FE , ergo omnia quadrata portionis, BSF , ad rectangula sub portione, BSF , & figura, SEF , erunt vt, B F , ad, FE , quod ostendere opus erat.

Coroll.
4. 12.

THEOREMA XXV. PROPOS. XXVII.

S intra curuam parabolę duę vtcunque ducantur rectę lineę in eandem terminatę, quarum vna rectę, altera obliquę axim secet, sint autem constitutarum ab eisdem parabolę diametri inter se æquales: Omnia quadrata parabolę per eam, quę rectę axim secat, constitutę, regula eadem, erunt æqualia rectangulis sub parabola per obliquam ad axem constituta, regula eadem, & sub figura distantiarum eiusdem parabolę per obliquam ad axem constitutę.



Sint

Sint intra curuam parabolicam, BAC , duæ utcunquæ ductæ in eandem terminatæ, DF , MC , quarum, DF , rectè, altera, MC , obliquè secet axem, AP , sit autem descripta linea, HR , ut sit constituta, HRC , figura distantiarum portionis, MFC , & ab eodem vertice, H , à quo ducitur linea, HR , ducatur, HQ , parallela axi, AP , & sint diametri, AZ , HO , parabolæ, DAF , MHC , inter se æquales. Dico ergo omnia quadrata parabolæ, DAF , regula, DF , esse æqualia rectangulis sub parabola, MHC , regula, MC , & sub, HRC , figura distantiarum eiuſdem parabolæ, MHC . Iungantur ergo, DA , AF , MH , HC , & à puncto, M , ducatur, MX , axi, AP , æquidistans, à puncto verò, C , perpendicularis axi, AP , producta vique in, B , tandem à puncto, H , ipsa, HI , perpendicularis ipsi, MC : Omnia ergo quadrata, DAF , parabolæ, regula, DF , ad rectangula sub parabola, MHC , regula, MC , & sub trilineo, HRC , habent rationem compositam ex ea,

Defin.
12. l. 1.

quam habent omnia quadrata parabolæ, DAF , regula, DF , ad omnia quadrata parabolæ, MHC , regula, MC , & ex ea, quam habent omnia quadrata parabolæ, MHC , regula, MC , ad rectangula sub parabola, MHC , & sub trilineo, HRC , regula eadem, MC : Omnia verò quadrata parabolæ, DMF , regula, DF , ad omnia quadrata parabolæ, MHC , regula, MC , sunt ut omnia quadrata trianguli, DAF , regula, DF , ad omnia quadrata trianguli, MHC , regula, MC , nam omnia quadrata parabolæ sunt sexquialtera omnium quadratorum triangulorum in



27. huius. eisdem basibus, & circa eisdem axes cum ipsis constitutorum, regulis basibus: Omnia insuper quadrata trianguli, DAF , regula, DF , ad omnia quadrata trianguli, MHC , regula, MC , habent rationem compositam ex ratione altitudinum, & quadratorum basium

D. Corol.
22. l. 2.

.i. ex ratione, quam habet, AZ , ad, HI , & ex ratione, quam habet quadratum, DF , ad quadratum, MC , vel quadratum, ZF , ad quadratum, OC , est autem, AZ , æqualis ipsi, HO , ex hypotesi, & ZF , ipsi, QC , ergo omnia quadrata trianguli, DAF , ad

Corol.
17. huius.

omnia quadrata trianguli, MHC , regulis iam dictis, habebunt rationem compositam ex ea, quam habet, OH , ad HI , & ex ea, quam habet quadratum, QC , ad quadratum, CO , quia verò trianguli, HIO , OQC , sunt æquianguli, ideò, OH , ad, HI , erit vt, OC , ad, CQ , ergo illa habebunt rationem compositam ex ea, quam habet, OC , ad, CQ , & quadratum QC , ad quadratum, CO , est autem

autem vt, OC , ad, CQ , ita, sumpta, QC , communi altitudine, rectangulum sub OC , CQ , ad quadratum, QC , ergo ratio composita ex ea, quam habet, OC , ad, CQ , & quadratum, QC , ad quadratum, CO , est eadem composita ex ea, quam habet rectangulum sub, OC , CQ , ad quadratum, CQ , & quadratum, CQ , ad quadratum; CO , .i. eadem ei, quam habet rectangulum sub, QC , CO , ad quadratum, CO , .i. eadem ei, quam habet, QC , ad, CO ; ergo omnia quadrata trianguli, DAF , ad omnia quadrata trianguli, MHC , vel omnia quadrata parabolæ, DAF , ad omnia quadrata parabolæ, MHC , regulis iam dictis, erunt vt, QC , ad, CO , quod serua.

Vtcrius omnia quadrata parabolæ, MHC , ad rectangula sub parabola, MHC , & trilineo, HRC , regula, MC , sunt vt, MC , ad, CR , vel ad, CX , .i. vt, OC , ad, CQ , ergo omnia quadrata parabolæ, DAF , regula, DF , ad rectangula sub parabola, MHC , & trilineo, HRC , regula, MC , habebunt rationem compositam ex ea, quam habet, QC , ad, CO , & ex ea quam habet, CO , ad, QC , idest habebunt eandem rationem, quam habet, QC , ad, QC , idest erunt illis æqualia, quod ostendere ppus erat.

Ex ante

COROLLARIUM I.

Hæc patet omnia quadrata parabola, DAF , regula, DF , ad omnia quadrata parabola, MHC , regula, MC , esse vt QC , ad, CO , vel, XC , ad CM , vel, DF , (quæ est æqualis ipsi, XC ,) ad, MC , dum diametri, AZ , HO , sunt æquales, vt in Theoremate ostensum est.

COROLLARIUM II.

Patet vterius, si intra curuam parabolicam duæ vtrunq; recta lineæ obli. quæ axem secantes, & in ipsam terminantes, ducta fuerint, regula pro qualibet parabola sumpta earum basi, quod rectangula sub dictis parabolis per easdem constitutis, & sub figura distantiarum earundem parabolarum, inter se erunt æqualia, quotiescunq; diametri earundem sint æquales, vtraq; enim singillatim æquabuntur omnibus quadratis parabolæ, cuius basis secet perpendiculariter axem eiusdem qui sit æqualis diametris dictarum parabolarum, & pro, qua sit regula eisdem basis.

THEO

THEOREMA XXVI. PROPOS. XXVIII.

SI intra curuam parabolicam duæ utrunque ductæ fuerint rectæ lineæ in eandem terminantes, quarum vna rectè, altera obliquè secet axim; omnia quadrata constitutæ parabolæ per eam, quæ axim rectè secat, regula eadem, ad rectangula sub parabola constituta per obliquè secantem axem, regula huius basi, & sub figura distantiarum eiusdem parabolæ, erunt vt quadratum axis primò dictæ parabolæ ad quadratum diametri secundò dictæ parabolæ.

Sint igitur intra curuam parabolicam, $A D H$, duæ ductæ rectæ lineæ in eadem terminantes, quarum vna rectè, altera obliquè secet axim, si ergo constitutarum ab iisdem parabolæ diametri sunt æquales, pater veritas Propositionis ex antecedenti Theor. non sint autem constitutarum parabolæ diametri æquales, sint autem duæ parabolæ constituentes, $A H$, rectè secans axem, $D O$, & $C G$, obliquè ipsum diuidens, existatq;

axis, $D O$, maior diametro parabolæ, $C E G$, quæ sit, $E M$, & sit ducta linea, $E R$, & constituta, $E R G$, figura distantiarum parabolæ, $C E G$. Dico ergo omnia quadrata parabolæ, $A D H$, regula, $A H$, ad rectangula sub parabola, $C E G$, & trilineo, $E R G$ regula, $C G$,



esse vt quadratum, $D O$, ad quadratum, $E M$, abscindatur ergo ab, $O D$, $D N$, æqualis ipsi, $E M$. & per, N , ducatur ipsi, $A H$, parallela, $B F$. Omnia ergo quadrata parabolæ, $A D H$, ad omnia quadrata parabolæ, $B D F$, regula communi, $A H$, vel, $B F$, sunt vt quadratum, $O D$, ad quadratum, $D N$, vel ad quadratum, $E M$, sed omnia quadrata parabolæ, $B D F$, regula, $B F$, sunt æqualia rectangulis sub parabola, $C E G$, & trilineo, $E R G$, regula, $C G$, ergo omnia quadrata parabolæ, $A D H$, regula, $A H$ ad rectangula sub parabola, $C E G$, & trilineo, $E R G$, regula, $C G$, erunt vt quadratum, $O D$, ad quadratum, $E M$, quod erat ostendendum.

aa. huius.

Ex antec.

COROLLARIUM.

Hinc patet, si duæ rectæ lineæ ad axem obliquæ parabolas constituerint, sumpta pro regula constituta parabola recta eam constituyente, quoniam rectangula sub dictis parabolis, & figuris distantiarum earundem ad omnia quadrata parabola, cuius basis sit ad axim recta (quæ pro eadem sumatur pro regula) sunt, ut quadrata diametrorum earundem ad quadratum axis illius tertia parabola; quod idè illa rectangula erunt inter se, ut diametrorum earundem parabolarum quadrata fuerint quoq; inter se.

THEOREMA XXVII. PROPOS. XXIX:

Omnia quadrata parabolæ, regulis basibus sunt inter se, ut omnia quadrata parallelogrammorum, in eisdem basibus, & circa eisdem axes, vel diametros existentium, regulis eisdem basibus.

Manifesta est hæc propositio, nam omnia quadrata dictarum parabolæ sunt subdupla omnium quadratorum eorundem parallelogrammorum, eisdem regulis assumptis, scilicet parabolæ basibus iam dictis. 21. huius

A. COROLL. SECTIO I.

A₄

Hinc colligimus conclusiones, quæ de omnibus quadratis parallelogrammorum collectæ sunt in Theorematis 9. 10. 11. 12. 13. Lib. 2. regulis ibidem assumptis, suppositis quibusdam conditionibus circa altitudines, vel latera æqualiter basibus inclinata, & quadrata basium, vel ipsas bases, verificari etiam de omnibus quadratis parabolæ, suppositis eisdem conditionibus circa axes, vel altitudines, vel circa diametros æqualiter basibus inclinatas, & circa quadrata basium, vel eisdem bases; nam his conditionibus axibus, vel altitudinibus, vel diametris, & quadratis basium, vel ipsis basibus competentibus, etiam altitudinibus, vel lateribus parallelogrammorum, æqualiter basibus inclinatis, & quadratis basium, vel eisdem basibus, pariter conueniunt, quæ quidem parallelogramma sint in eisdem basibus, & circa eisdem axes vel diametros cum parabolis; & idè dictæ conclusiones, quæ tunc

Sf .••••• colli-

colliguntur pro omnibus quadratis dictorum parallelogrammorum, pro omnibus quadratis etiam parabolarum eisdem inscriptarum, tamquam pro earundem partibus proportionalibus, scilicet dimidijs, pariter ut vera recipi possunt.

B

B. S E C T I O II.

9. 1. 2.

ET quia ostensum est omnia quadrata parallelogrammorum in eadem altitudine tantum, regulis basibus, esse inter se, ut quadrata basium; & existentium in eadem basi esse, ut altitudines, vel etiam, ut latera eorundem aequaliter basibus inclinata, ideo pariter hic colligemus omnia quadrata parabolarum in eadem altitudine existentium, regulis basibus, esse ut quadrata basium, & existentium in eadem basis esse inter se, ut altitudines, vel ut diametros aequaliter basibus inclinatas.

C

C. S E C T I O III.

10. 1. 2.

Similiter quia ostensum est omnia quadrata parallelogrammorum, regulis basibus, habere inter se rationem compositam ex ratione quadratorum basium, & altitudinum, vel laterum aequaliter basibus inclinatorum; ideo colligemus, hic, omnia quadrata parabolarum regulis basibus, habere inter se rationem compositam ex ratione quadratorum basium, & altitudinum, vel diametrorum aequaliter basibus inclinatorum.

D

D. S E C T I O IV.

Consimili methodo colligemus, omnia quadrata parabolarum regulis basibus, quarum basium quadrata altitudinibus, vel diametris aequaliter basibus inclinatis reciprocantur, esse equalia, & quæ sunt equalia, esse parabolarum, quarum altitudines, vel diametri aequaliter basibus inclinata, basium quadratis reciprocantur.

E

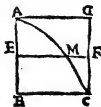
E. S E C T I O V.

DEniq; & hoc obtinemus, nempe omnia quadrata parabolarum, regulis basibus, quarum altitudines, vel diametri, basibus aequaliter inclinata, ad easdem bases eandem rationem habeant, esse inter se in tripla ratione basium, vel altitudinum, vel diametrorum aequaliter basibus inclinatarum; quæ omnia clarè, & facile patent.

THEOREMA XXVIII. PROPOS. XXX.

SI duæ rectæ lineæ ducantur, quarum altera parabolam tangat, altera verò axi, vel diametro parabolæ æquidistanter ducta eandem secet, in idem punctum concurrentes: Omnia quadrata parallelogrammi, regula tangente, erunt sexcupla omnium quadratorum trilinei sub dictis tangente, & secante, & curua parabolæ ab ipsdem inclusa, comprehensi.

Sit semiparabola, ACB , quam tangat lineæ, AD , & à puncto, A , ducta, AB , axis, vel diameter, integræ parabolæ, deinde agatur utcumque, DC , parallela axi, vel diametro, AB , secans curuam parabolæ in, C , & occurrens tangenti, AD , in, D , ducatur tandem à puncto, C , ipsi, AD , æquidistans, CB , secans, AB , in, B , regula autem sit, AD . Dico ergo omnia quadrata parallelogrammi, AC , esse omnium quadratorum trilinei, ADC , sexcupla: Omnia enim quadrata, AC , ad rectangula sub, AC , & semiparabola, ABC , sunt vt, AC , ad semiparabolam, ABC , .i. sexquialtera .i. vt 6. ad 4. omnia autem quadrata, AC , ad omnia quadrata semiparabolæ, ABC , sunt dupla .i. vt 6. ad 3. ergo omnia quadrata, AC , ad residuum demptis omnibus quadratis semiparabolæ, ABC , à rectangulis sub, AC , & semiparabola, ABC , .i. ad rectangula sub semiparabola, ABC , & trilineo, ADC , erunt in ratione sexcupla idest vt 6. ad 1. ad eandem verò bis sumpta, vt 6. ad 2. quoniam verò omnia quadrata, AC , ad omnia quadrata semiparabolæ, ABC , sum vt 6. ad 3. vt dictum est, idco omnia quadrata, AC , ad omnia quadrata semiparabolæ, ABC , cum rectangulis bis sub semiparabola, ABC , & trilineo, ADC , erunt vt 6. ad 5. ergo ad reliquum scilicet ad omnia quadrata trilinei, ADC , omnia quadrata, AC , erunt vt 6. ad 1. idest erunt eorundem sexcupla, quod ostendere oportebat.

Coroll. 1.
26. l. 2.

21. huius;

Coroll.
23. l. 2.

D. 23. h. 2.

A

A. COROLL. SECTIO I.

Hinc habetur omnia quadrata trilineorum sub tangentibus, & secantibus, veluti sunt, AD , DC , regulis tangentibus, esse inter se, ut omnia quadrata parallelogrammorum sub eisdem tangentibus, & secantibus, regulis istis tangentibus, quoniam dictorum trilineorum omnia quadrata sunt sexte partes omnium quadratorum dictorum parallelogrammorum; Et ideo pro ipsis etiam has conclusiones colligemus, scilicet.

B

B. SECTIO II.

Si dicti trilinei fuerint in eadem altitudine, quod omnia quadrata earundem erunt inter se, ut basium quadrata. s. tangentium; Et si fuerint dicti trilinei in eadem basi scilicet tangente, dicta omnia quadrata erunt inter se, ut altitudines, vel, ut secantes aequaliter basibus scilicet tangentibus, inclinata.

C

C. SECTIO III.

Item quod omnia quadrata dictorum trilineorum habebunt inter se rationem compositam ex ratione quadratorum basium, & ex ratione altitudinum, vel secantium aequaliter basibus, scilicet tangentibus, inclinatarum.

D

D. SECTIO IV.

Pariter quod omnia quadrata dictorum trilineorum, quorum tangentium quadrata altitudinibus, vel secantibus aequaliter tangentibus inclinatis recipiuntur, esse aequalia; & quae sunt aequalia, esse trilineorum, quorum basium, vel tangentium quadrata altitudinibus, vel secantibus aequaliter tangentibus inclinatis, recipiuntur.



E. SECTIO V.

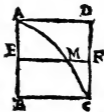
E.

Tandem, quòd, si dictorum trilineorum secantes ad tangentes eandem rationem habuerint, omnia quadrata eorundem erunt in tripla ratione tangentium, vel secantium.

THEOREMA XXIX. PROPOS. XXXI.

Exponatur figura Theor. antecedentis, & intra parallelogrammum, AC , ducatur utcumq; recta, EF , parallela ipsi, BC , quæ sumatur pro regula: Ostendemus .n. omnia quadrata, AC , demptis omnibus quadratis semiparabolæ, ABC , ad omnia quadrata, EC , demptis omnibus quadratis quadrilinei, $MEBC$, esse vt quadratum, AB , ad quadratum, BE .

Omnia .n. quadrata, AC , ad omnia quadrata, EC , demptis omnibus quadratis quadrilinei, $MECB$, habent rationem compositam ex ea, quam habent omnia quadrata, AC , ad omnia quadrata, EC , idest ex ea, quam habet, AB , ad, BE , & ex ea, quam habent omnia quadrata, EC , ad residuum, demptis ab ipsidem omnibus quadratis quadrilinei, $MEBC$, .i. ex ea, quam habet, AB , ad $\frac{1}{2}$. BE , duæ autem hæ rationes .i. quam habet, AB , ad, BE , & AB , ad $\frac{1}{2}$. BE , componunt rationem quadrati, AB , ad reſtangulum sub, EB , & $\frac{1}{2}$. BE , .i. ad dimidium quadrati, BE , ergo omnia quadrata, AC , ad omnia quadrata, EC , demptis omnibus quadratis quadrilinei, $MEBC$, erunt vt quadratum, AB , ad dimidium quadrati, BE , sunt autem omnia quadrata, AC , demptis omnibus quadratis semiparabolæ, ABC , dimidium omnium quadratorum, AC , quia omnia quadrata, AC , sunt dupla omnium quadratorum semiparabolæ, ABC , ergo omnia quadrata, AC , demptis omnibus quadratis semiparabolæ, ABC , ad omnia quadrata, EC , demptis omnibus quadratis quadrilinei, $MECB$, erunt vt dimidium quadrati, AB , ad dimidium quadrati, BE , idest vt quadratum, AB , ad quadratum, BE , quod erat demonstrandum.



13. huius.

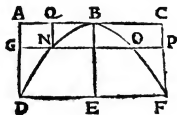
21. huius.

THEO-

THEOREMA XXX. PROPOS. XXXII.

SI parallelogrammum, & parabola fuerint in eadem basi, & circa eundem axim, vel diametrum constituta, basiſque ſumatur pro regula: Omnia quadrata dicti parallelogrammi ad omnia quadrata figuræ compositæ ex parabola, & alterutro trilincorum, qui ſiunt extra parabolam, demptis omnibus quadratis eiusdem trilinei, erunt vt dictum parallelogrammum ad dictam parabolam; ad eadem verò cum omnibus quadratis illius trilinci erunt, vt dictum parallelogrammum ad dictam parabolam ſimul cum dicti parallelogrammi. i. vt 24. ad 17.

Sit ergo parallelogrammum, AF , in eadem basi, DF , & circa eundem axim, vel diametrum, BE , cum parabola, DBF , regula ſit, DF . Dico omnia quadrata, AF , ad omnia quadrata figuræ, $CBDF$, demptis omnibus quadratis trilinei, BCF , eſſe, vt, AF , ad parabolam, DBF , eadem verò ad omnia quadrata fig. $CBDF$, eſſe vt, AF , ad parabolam, DBF , cum dicti parallelogrammi, AF ; quoniam enim, BE , eſt axis, vel diameter tum parabolæ, DBF , tum parallelogrammi, AF , idè ſi ducatur intra parallelogrammum, AF , vtcunq. recta linea parallela ipſi, DF , portiones eiusdem incluſæ trilinei, ADB , CFB , erunt inter ſe æquales, & idè parabola, DBF , erit figura, qualem poſtulat Prop. 29. Lib. 3. quapropter omnia quadrata, AF , ad omnia quadrata figuræ, $CBDF$, demptis omnibus quadratis trilinei, BCF , erunt vt, AF , ad parabolam, DBF .



Quoniam verò omnia quadrata, AF , ad omnia quadrata, BF , ſunt vt quadratum, DF , ad quadratum, FE , .i. quadrupla .i. vt 24. ad 6. omnia verò quadrata, BF , ſunt ſexcupla omnium quadratorum trilinei, BCF , .i. vt 6. ad 1. igitur omnia quadrata, AF , ad omnia quadrata trilinei, BCF , erunt vt 24. ad 1. idè vt, AF , ad ſui ipſius $\frac{24}{1}$. ergo omnia quadrata, AF , ad omnia quadrata ſig-

figuræ, $C B D F$, erunt vt, $A F$, ad parabolam, $D B F$, cum $\frac{1}{2}$. parallelogrammi, $A F$; parallelogrammum autem, $A F$, est sexquialterum parabolæ, $D B F$, \therefore ad illam, vt 24 . ad 16 . ergo si numero 16 . iungatur $\frac{1}{2}$. eiusdem parallelogrammi, $A F$, sicut 17 . igitur omnia quadrata, $A F$, ad omnia quadrata figuræ, $C B D F$, erunt vt 24 . ad 17 . quod ostendendum erat.

COROLLARIUM.

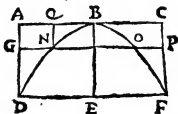
Hinc patet omnia quadrata, $A F$, esse sexquialtera omnium quadratorum figuræ, $C B D F$, demptis omnibus quadratis trilinei, $B C F$, nam sunt ad illa, vt, $A F$, ad parabolam, $D B F$, cuius parallelogrammum, $A F$, est sexquialterum.

THEOREMA XXXI. PROPOS. XXXIII.

IN eodem antec. Proposit. Schemate ostendemus omnia quadrata figuræ, $C B D F$, demptis omnibus quadratis, $B F$, ad omnia quadrata, $B F$, demptis omnibus quadratis trilinei, $B C F$, esse vt 11 . ad 5 .

Nam omnia quadrata, $A F$, ad omnia quadrata figuræ, $C B D F$, ostensa sunt esse, vt 24 . ad 17 . eadem verò ad omnia quadrata, $B F$, sunt vt 24 . ad 6 . quia sunt eorum quadrupla, ergo ad residuum $\frac{1}{2}$. ad omnia quadrata figuræ, $C B D F$, demptis omnib. quadratis, $B F$, erunt vt 24 . ad 11 .

conuertendo omnia quadrata figuræ, $C B D F$, demptis omnibus quadratis, $B F$, ad omnia quadrata, $A F$, erunt vt 11 . ad 24 . Item omnia quadrata, $A F$, ad omnia quadrata, $B F$, sunt vt 24 . ad 6 . omnia verò quadrata, $B F$, ad omnia quadrata trilinei, $B C F$, sunt vt 6 . ad 1 .



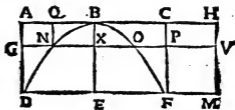
ergo omnia quadrata, $A F$, ad omnia quadrata trilinei, $B C F$, sunt vt 24 . ad 1 . eadem verò ad omnia quadrata, $B F$, sunt vt 24 . ad 6 . ergo omnia quadrata, $A F$, ad omnia quadrata, $B F$, demptis omnibus quadratis trilinei, $B C F$, erunt vt 24 . ad 5 . erant autem omnia quadrata figuræ, $C B D F$, demptis omnibus

bus quadratis, BF , ad omnia quadrata, AF , vt 11. ad 24. ergo, ex æquali, omnia quadrata figuræ, $CBDF$, demptis omnibus quadratis BF , ad omnia quadrata, BF , demptis omnibus quadratis tri-
lini, BCF , erunt vt 11. ad 5. quod erat ostendendum.

THEOREMA XXXII. PROPOS. XXXIV.

A Ssumpta eadem anteced. Theor. figura, si producaturs
basis, DF , (quæ retineatur pro regula) vtcunq; in,
 M , & per M , ipsi, BE , parallela ducatur, MH , cui occur-
rat, AC , producta, in ipso, H . Omnia quadrata, AM ,
demptis omnibus quadratis, CM , ad omnia quadrata figu-
ræ, $HBDM$, demptis omnibus quadratis quadrilini, H
 BFM , erunt vt, AF , ad parabolam, DBF , idest erunt
eorum sexquialtera: Quod facillè patebit, quia parabola, D
 BF , inscripta parallelogramo, AF , est figura, qualem po-
stulat Proposit. 30. Lib. 3. Vterius autem dico omnia qua-
drata, AM , ad omnia quadrata figuræ, $BDMH$, esse vt
quadratum, DM , ad quadratum, ME , dimidium qua-
drati, ED , cum rectangulo sub sexquiertia, DE , &
sub, EM .

In constructa figura igitur omnia quadrata figuræ, $HBDM$, per
rectam, BE , diuiduntur in omnia quadrata semiparabolæ, BDC ,
D.13.1.2. in omnia quadrata, BM , & in rectangula bis sub semiparabola, B
 DE , & sub EH , nunc ad horum singula comparemus omnia qua-
drata, AM : Om-
nia igitur quadr
ta, AM , ad om-
nia quadrata, BM ,
sunt vt quadra-
tum, DM , ad
quadratum, ME ,
quod serua. Item
omnia quadrata,



AM , ad omnia quadrata, AE , sunt vt quadratum, MD , ad qua-
dratum, DE , omnia verò quadrata, AE , sunt dupla omnium qua-
dratorum semiparabolæ, BDE , ergo omnia quadrata, AM , ad
omnia quadrata semiparabolæ, BDE , sunt vt quadratum, MD ,
ad dimidium quadrati, DE , quod etiam serua. Tandem omnia qua-

quadrata, $A M$, ad rectangula sub, $A B$, $E H$, sunt ut quadratum, $D M$, ad rectangulum, $D E M$; rectangula vero sub, $A E$, $F H$, ad rectangula sub semiparabola, $B D E$, & sub, $E H$, sunt ut, $A E$, ad semiparabolam, $B D E$, (quia, $E H$, est parallelogramum) id est sexquialtera, i. ut, $D E$, ad $\frac{2}{3}$, $D E$, i. ut, rectangulum sub, $D E M$, (sumpta, $E M$, communi altitudine) ad rectangulum sub, $D E$, & sub, $E M$, ergo, ex æquali, omnia quadrata, $A M$, ad rectangula sub semiparabola, $B D E$, & sub, $B M$, erunt ut quadratum, $D M$, ad rectangulum sub, $D E$, & sub, $B M$; ad eadem vero bis sumpta erunt, ut idem quadratum, $D M$, ad rectangulum bis sub, $D E$, & sub, $E M$, scilicet, & sub, $E M$, ergo, colligendo, omnia quadrata, $A M$, ad omnia quadrata, $B M$, & ad omnia quadrata semiparabolæ, $B D E$, cum rectangulis bis sub, $H E$, & semiparabola, $B D E$, id est ad omnia quadrata figuræ, $H B D M$, erunt ut quadratum, $D M$, ad quadratum, $M E$, & dimidium quadrati, $E D$, cum rectangulo sub sexquialtera, $D E$, & sub, $E M$, simul iuncta quæ nobis erant demonstranda.

Coroll. 1.
26. 1. 2.

C O R O L L A R I V M.

Hinc apparet, quod methodo huius in Propos. 32. ostendi poterat omnia quadrata, $A F$, ad omnia quadrata figuræ, $C B D F$, esse ut 24. ad 17. prius demonstrando omnia quadrata, $A F$, ad omnia quadrata figuræ, $C B D F$, esse ut quadratum, $D E$, ad quadratum, $F E$, quadrati, $E D$, & rectangulum sub sexquialtera, $D E$, & sub, $E F$, ut nempe 24. ad 17. veluti calculanti patebit, quod hic apposui, ut eam rationem etiam hoc pacto teneamus.

T H E O R E M A XXXIII. PROPOS. XXXV.

IN eadem anteced. Propos. figura ostendemus omnia quadrata, $B M$, ad omnia quadrata figuræ, $B F M H$, esse ut quadratum, $E M$, ad quadratum, $M F$, cum rectangulo sub, $E F$, & sub, $F M$, vna cum, quadrati, $E F$, regula eadem retenta.

Omnia .n. quadrata figuræ, $B F M H$, per rectam, $C F$, diuiduntur in omnia quadrata, $C M$, in omnia quadrata trilinei, $B C F$, & in rectangula bis sub trilineo, $B C F$, & sub, $C M$; ad horum ergo singula comparemus omnia quadrata, $B M$; hæc igitur ad omnia

D. Corol.
23. 1. 2.

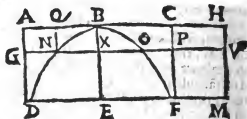
T t

qua-

quadrata, CM , sunt vt quadratum, EM , ad quadratum, MF , quod serua. Item omnia quadrata, BM , ad omnia quadrata, BF , sunt vt quadratum, ME ,

30. huius.

ad quadratum, EF , omnia verò quadrata, BF , sunt sexcupla omnium quadratorū trilinei, BCF , .i. sunt ad illa, vt quadratum, EF , ad eiusdem $\frac{1}{2}$. ergo, ex æquali, omnia quadrata, BM , ad omnia quadrata trili-



nei, BCF , sunt vt quadratum, EM , ad $\frac{1}{2}$. quadrati, EF , quod etiã serua. Tandem omnia quadrata, BM , ad rectangula sub, BF , FH , sunt vt quadratum, EM , ad rectangulum sub, EF , FM , rectangula verò sub, BF , FH , ad rectangula sub trilineo, BCF , & sub, CM , sunt vt, BF , ad trilineum, BCF , (nam, CM , est parallelogrammum) idest sunt eorum tripla. .i. sunt vt, EF , ad $\frac{1}{2}$. EF , .i. vt rectangulum, EFM , ad rectangulum sub $\frac{1}{2}$. EF , & sub, FM , ergo, ex æquali, omnia quadrata, BM , ad rectangula sub trilineo, BCF , & sub, FH , erunt vt quadratum, EM , ad rectangulum sub $\frac{1}{2}$. EF , & sub, FM , ad eadem verò bis sumpta, vt quadratum, EM , ad rectangulum bis sub $\frac{1}{2}$. EF , & sub, FM , idest semel sub $\frac{1}{2}$. EF , sub, FM , ergo, colligendo, omnia quadrata, BM , ad omnia quadrata, CM , ad omnia quadrata trilinei, BCF , & ad rectangula bis sub trilineo, BCF , & sub, FH , .i. ad omnia quadrata figuræ, $BFMH$, erunt vt quadratum, EM , ad quadratum, MF , rectangulum sub $\frac{1}{2}$. EF , & sub, FM , vna cum $\frac{1}{2}$. quadrati, EF , quod ostendere opus erat.

Coroll. 1.
26. L2.

C O R O L L A R I V M.

Hinc colligimus omnia quadrata, BM , ad residuum, demptis ab eisdem omnibus quadratis figuræ, $BFMH$, esse vt quadratum, EM , ad residuum, demptis à quadrato. EM , bis omnibus .s. quadrato, FM , rectangulo sub, MF , & $\frac{1}{2}$. FE , cum $\frac{1}{2}$. quadrati, EF , hoc autem residuum est rectangulum sub, MF , & sextitertia, FE , cum $\frac{1}{2}$. quadrati, EF ; nam si à quadrato, EM , dempseris quadratum, FM , remanebunt duo rectangula sub, MF , FE , cum quadratum, FE , vltimus si à rectangulo bis sub, MF , FE ; dempseris rectangulum sub, MF , & $\frac{1}{2}$. FE , idest

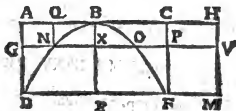
E, idest rectangulum bis sub, *MF*, & sub $\frac{1}{2}$. *FE*, remanet rectangulum bis sub, *MF*, & $\frac{1}{2}$. *FE*, idest semel sub, *MF*, & sexquiertia, *FE*: Tandem ablato $\frac{1}{2}$. a quadrato, *FE*, remanent $\frac{1}{2}$. eiusdem quadrati, & de omnia quadrata, *BM*, ad residuum, demptis omnibus quadratis figura, *BFMH*, erunt vt quadratum, *EM*, ad rectangulum sub, *MF*, & sexquiertia, *FE*, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, *FE*.

THEOREMA XXXIV. PROPOS. XXXVI.

In eodem Schemate Theor. Prop. 34. ostendemus omnia quadrata figura, *BDMH*, demptis omnibus quadratis, *BM*, ad omnia quadrata, *BM*, demptis omnibus quadratis figura, *BFMH*, esse vt, *EM*, cum $\frac{1}{2}$. *EM*, & $\frac{1}{2}$. *ED*, ad, *MF*, cum $\frac{1}{2}$. *MF*, & $\frac{1}{2}$. *FE*.

Omnia enim quadrata, *AM*, ad omnia quadrata figura, *DBH* *M*, ostendimus esse, vt quadratum, *DM*, ad quadratum, *ME*, rectangulum sub, *ME*, & sexquiertia, *ED*, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, *ED*, eadem verò ad omnia quadrata, *BM*, sunt vt quadratum, *DM*, ad quadratum, *ME*, ergo omnia quadrata, *AM*, ad omnia quadrata figura, *HBDM*, demptis omnibus quadratis, *BM*, erunt vt quadratum, *DM*, ad rectangulum sub, *ME*, & sexquiertia, *ED*, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, *ED*, & conuertendo, hæc ad illa erunt, vt rectangulum sub sexquiertia, *ED*, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, *ED*, ad quadratum, *DM*: Omnia verò quadrata, *AM*, ad omnia quadrata, *BM*, sunt vt quadratum, *DM*, ad quadratum, *ME*, & tandem omnia quadrata, *BM*, ad eorum residuum, demptis omnibus quadratis figura, *BHMF*, sunt vt quadratum, *EM*, ad rectangulum sub, *MF*, & sexquiertia, *FE*, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, *FE*, ergo, ex æquali, omnia quadrata figura, *BDMH*, demptis omnibus quadratis, *BM*, ad omnia quadrata, *BM*, demptis omnibus quadratis figura, *BFMH*, erunt vt rectangulum sub, *ME*, & sexquiertia, *ED*, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, *ED*, ad rectangulum sub, *MF*, & sexquiertia, *FE*, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, *FE*; quia verò rectangulum sub, *ME*, & sexquiertia, *ED*, æquatur re-

34. huius.



Ex Corol. autcc.

T t a ctangul-

ctangu'o sub sexquitertia, ME , & sub, ED , quia bases eorum sunt altitudinibus reciproce, & eadem ratione rectangulum sub sexquitertia, EF , & sub, FM , æquatur rectangulo sub EF , & sexquitertia, FM , ideo supradicta ratio erit eadem ei, quam habet rectangulū sub, DE , vel, EF , & sub sexquitertia, EM , cum $\frac{1}{2}$. quadrati, DE , idest cum rectangulo sub, EF , & $\frac{1}{2}$. EF , ad rectangulum sub, EF , & sub sexquitertia, FM , cum $\frac{1}{2}$. quadrati, EF , idest cum rectangulo sub, EF , & $\frac{1}{2}$. EF , duo autem rectangula sub, EF , & sub sexquitertia, EM , & sub, EF , & $\frac{1}{2}$. EF , cōficiunt rectangulum sub, BF , & sub composita ex $\frac{1}{2}$. EF , & sexquitertia, EM ; pariter alia duo rectangula sub, EF , & $\frac{1}{2}$. EF , & sub, EF , & sexquitertia, FM , cōficiunt rectangulum sub, EF , & composita ex $\frac{1}{2}$. EF , & sexquitertia, FM , ergo omnia quadrata figuræ, $BDMH$, demptis omnibus quadratis figuræ, $BMFH$; erunt vt rectangulum sub, EF , & composita ex $\frac{1}{2}$. EF , & sexquitertia, EM , ad rectangulum sub eadem altitudine, EF , & sub composita ex $\frac{1}{2}$. EF , & sexquitertia, FM , .i. vt composita ex $\frac{1}{2}$. EF , vel $\frac{1}{2}$. ED , & sexquitertia, EM , ad compositam ex $\frac{1}{2}$. EF , & sexquitertia, FM , idest vt, EM , cum $\frac{1}{2}$. ME , & $\frac{1}{2}$. ED , ad, MF , cum $\frac{1}{2}$. MF , & $\frac{1}{2}$. FE , quod ostendere oportebat.

1.2.clem.

THEOREMA XXXV. PROPOS. XXXVII.

In figura Prop. 32 ostendemus, regula, DF , omnia quadrata semiparabolæ, DBE , ad omnia quadrata figuræ, $C B D F$, demptis omnibus quadratis trilinci, $B C F$, esse vt octava pars, DF , ad duas tertias eiusdem, DF , .i. vt 3. ad 16.

Nam omnia quadrata semiparabolæ, BDE , sunt dimidium omnium quadratorum, AE , idest sunt ad illa, vt $\frac{1}{2}$. quadrati, DE , ad quadratum, DE , item omnia quadrata, AE , ad omnia quadrata, AF , sunt vt quadratum, DE , ad quadratum, DF ; tandem omnia quadrata, DF , ad omnia quadrata figuræ, $C B D F$, demptis omnibus quadratis trilinci, BCF , sunt sexquialtera, idest sunt vt quadratū, DF , ad rectangulum sub, DF , & $\frac{1}{2}$. DF , ergo, ex æquali, omnia qua-

20. huius.

Corol. 32. huius.



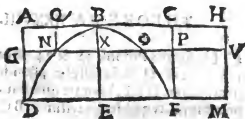
quadrata semiparabolæ, BDC , ad omnia quadrata figuræ, CBD
 F , demptis omnibus quadratis trilinei, BCF , erunt -vt dimidium
 quadrati, DE , .i. vt rectangulum sub $\frac{1}{2}$. DF , & sub, DF , ad rectan-
 gulum sub $\frac{2}{3}$. DF , & sub, DF , .i. vt $\frac{1}{2}$. DF , ad $\frac{2}{3}$. DF , .i. vt $\frac{1}{3}$. D
 F , ad $\frac{1}{3}$. DF , .i. vt $\frac{1}{3}$. ad 16 . quod ostendere opus erat.

THEOREMA XXXVI. PROP. XXXVIII.

IN figura Prop. 34. adhuc ostendemus omnia quadrata
 figuræ, $HBDM$, demptis omnibus quadratis figuræ, B
 HMF , ad omnia quadrata figuræ, CBD , demptis omni-
 bus quadratis trilinei, BCF , esse vt, DM , MF , ad, FD .

Quoniam .n. omnia quadrata, AM , demptis omnibus quadra-
 tis, CM , sunt ad omnia quadrata figuræ, $HBDM$, demptis om-
 nibus quadratis figu-

ræ, $BHMF$, vt, AF ,
 ad parabolum, DBF ,
 .i. vt omnia quadrata,
 AF , ad omnia quadra-
 ta figuræ, CBD ,
 demptis omnibus qua-
 dratis trilinei, BCF ,
 ergo, permutando,
 omnia quadrata, A
 M , demptis omnibus



quadratis, CM , ad omnia quadrata, AF , erunt vt omnia quadra-
 ta figuræ, $HBDM$, demptis omnibus quadratis figuræ, $HBFM$,
 ad omnia quadrata figuræ, CBD , demptis omnibus quadratis
 trilinei, BCF , sunt autem omnia quadrata, AM , demptis omnibus
 quadratis, CM , ad omnia quadrata, AF , vt rectangulum bis sub,
 MF , FD , cum quadrato, FD , .i. rectangulum sub composita ex,
 DM , MF , & sub, FD , ad quadratum, FD , .i. vt composita ex,
 DM , MF , ad, FD , ergo omnia quadrata figuræ, DM , HBD , dem-
 ptis omnibus quadratis figuræ CBD , demptis omnibus quadra-
 tis trilinei, BCF , erunt vt, DM , MF , ad, FD , quod ostendere
 opus erat.

THEOREMA XXXVII. PROP. XXXIX.

IN Schemate adhuc Prop. antec. ostendemus omnia quadrata figuræ, $H B D M$, demptis omnibus quadratis figuræ, $B H M F$, esse ad omnia quadrata semiparabolæ, $B D E$, vt, $D M$, $M F$, ad $\frac{1}{2}$ ipsius, $F D$.

37. huius Nam omnia quadrata figuræ, $H B D M$, demptis omnibus quadratis figuræ, $B H M F$, ad omnia quadrata figuræ, $C B D F$, demptis omnibus quadratis trilinei, $B C F$, ostensa sunt esse, vt, $D M$, $M F$, ad, $F D$, hæc autem ad omnia quadrata semiparabolæ, $B D E$, sunt vt $\frac{1}{2}$. $F D$, ad $\frac{1}{2}$. ipsius, $F D$, sc. vt, $F D$, ad $\frac{1}{2}$. $F D$, ergo, ex æquali, omnia quadrata figuræ, $H B D M$, demptis omnibus quadratis figuræ, $B H M F$, ad omnia quadrata semiparabolæ, $B D E$, erunt vt, $D M$, $M F$, ad $\frac{1}{2}$. ipsius, $F D$, quod ostendere opus erat.

THEOREMA XXXVIII. PROP. XL.

SI in figuris Propos. 32. & 34. ducantur, $G P$, $G V$, regulis, $D E$, $D M$, parallelæ, ostendemus (si ipsæ secauerint parabolam, $D B F$,) omnia quadrata figuræ, $C B D F$, demptis omnibus quadratis trilinei, $B C F$, ad omnia quadrata figuræ, $C B N P$, demptis omnibus quadratis quadrilinei, $B C P O$. Vel omnia quadrata figuræ, $H B D M$, demptis omnibus quadratis figuræ, $B H M F$, ad omnia quadrata figuræ, $H B N V$, demptis omnibus quadratis figuræ, $H V O B$, esse vt parabolam, $D B F$, ad parabolam, $N B O$.

Demonstratio præsentis, Theor. erit conformis demonstrationibus Prop. 19. 20. Lib. 3. quapropter inde petatur.

C O R O L L A R I V M.

HInc colligemus omnia quadrata figuræ, $H B D M$, demptis omnibus quadratis figuræ, $B H M F$, ad omnia quadrata figuræ, $H B N V$, demptis omnibus quadratis figuræ, $B H V O$, esse vt omnia quadrata figuræ, $C B D F$, demptis omnibus quadratis trilinei, $B C F$, ad omnia quadrata figuræ, $C B N P$, demptis omnibus quadratis quadrilinei, $B C P O$.

quadrata figura, $CBNP$, demptis omnibus quadratis quadrilineti, $BCPO$; & vtraque esse, vt cubum, DF , ad cubum, NO .

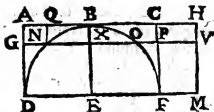
Ex 2. hujus
34.

THEOREMA XXXIX. PROPOS. XLI.

In eisdem figuris ostendemus, regulis adhuc ipsis, DM , DF , omnia quadrata figuræ, $C B D F$, ad omnia quadrata figuræ, $C B N P$, esse vt parallelepipedum sub, BE , & $\frac{1}{2}$. quadrati ipsius, DF , ad parallelepipedum sub, BX , & his spatijs simul compositis .f. quadrato, XP , . quadrati, NX , & rectangulo sub sexquitercia, NX , & sub, XP : Omnia verò quadrata figuræ, $H B D M$, ad omnia quadrata figuræ, $H B N V$, esse vt parallelepipedum sub, BE , & his spatijs .f. quadrato, ME , . quadrati, ED , & rectangulo sub sexquitercia, DE , & sub, EM , ad parallelepipedum sub, BX , & his spatijs .f. quadrato, VX , . quadrati, XN , & rectangulo, sub sexquitercia, NX , & sub, XV .

Ducatur per, N , ipsi, BE , parallela, NQ , in vtraq; figura, igitur omnia quadrata

figuræ, $C B D F$, ad omnia quadrata figuræ, $C B N P$, habet rationem compositam ex ea, quam habent omnia quadrata figuræ, $C B D F$, ad omnia quadrata, AF , .i. ex ea, quam habent $\frac{1}{2}$. quadrati, DF , ad



quadratum, DF , & ex ratione omnium quadratorum, AF , ad omnia quadrata, AP , .i. ex ratione, EB , ad, BX , & ex ratione omnium quadratorum, AP , ad omnia quadrata, QP , .i. ex ratione quadrati, GP , vel quadrati, DF , ad quadratum, PN , & tandem ex ratione omnium quadratorum, QP , ad omnia quadrata figuræ, $C B N P$, .i. ex ratione quadrati, NP , ad quadratum, PX , cum $\frac{1}{2}$. quadrati, XN , & cum rectangulo sub sexquitercia, NX , & sub, XP , harum autem rationum istarum .f. quam habent $\frac{1}{2}$. quadrati, DF , ad quadratum, DF , quadratum, DF , ad quadratum, NP , & quadratum, NP , ad hęc simul .f. quadratum, PX , $\frac{1}{2}$. quadrati, NX , & rectangulum sub sex-

21. huius

34. huius.

qui.

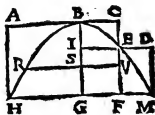
quiertia, NX , & sub, XP , conficiunt rationem $\frac{1}{2}$ quadrati, DF , ad hæc spatia ultimo dicta, hæc vero ratio, cum ea, quam habet, EB , ad BX , conficit rationem parallelepidi sub, BE , & $\frac{1}{2}$ quadrati, DF , ad parallelepidum sub, BX , & dictis spatijs ultimo dictis, scilicet quadrato, PX , $\frac{1}{2}$ quadrati, NX , & rectangulo sub sexquiertia, NX , & sub, XB , ergo omnia quadrata figuræ, $CBDF$, ad omnia quadrata figuræ, $CBNB$, erunt vt parallelepidum sub, BE , & $\frac{1}{2}$ quadrati, DF , ad parallelepidum sub, BX , & dictis spatijs ultimo dictis.

Eadem methodo compositionis proportionum, sumptis medijs omnibus quadratis, AM , AV , QV , inter omnia quadrata figurarum, $HBDM$, $HBNV$, ostendemus pariter omnia quadrata figuræ, $HBDM$, ad omnia quadrata figuræ, $HBNV$, esse vt parallelepidum sub, BE , & his spatijs .i. quadrato, ME , $\frac{1}{2}$ quadrati, ED , & rectangulo sub sexquiertia, DE , & sub, EM , ad parallelepidum sub, BX , & sub his spatijs .i. quadrato, VX , $\frac{1}{2}$ quadrati, XN , & rectangulo sub sexquiertia, XN , & sub, XV , quæ erant nobis ostendenda.

THEOREMA XL. PROPOS. XLII.

S intra parabolam axi, vel diametro eiusdem parallela ducatur recta linea in curuam, & basim parabolæ terminata, quæ basim sumatur pro regula, ducta verò tangente parabolam in termino dicti axis, vel diametri, & producta dicta parallela vsque ad ipsam, compleatur parallelogrammum sub ipsa, & basim maiori portione: Omnia quadrata constituti parallelogrammi ad omnia quadrata residuæ figuræ eodem inclusæ parallelogrammo, ab eodem dempto trilineo extra semiparabolam facto, erunt vt quadratum basim dicti frusti ad quadratum residui eiusdem basim, dempta ab eadem dimidia basim totius parabolæ, simul cum $\frac{1}{2}$ quadrati huius dimidiæ, & rectangulo sub sexquiertia talis dimidiæ, & eodem basim residuo iam dicto.

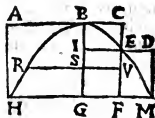
Sit ergo parabola, HBM , cuius axis, vel diameter, BG , basis, HM , ducatur autem intra ipsam eadem, BG , parallela, EF , ducta verò tangente, AC , in termino, B , quæ erit parallela basi, HF , producatuſ verius, FE , illi productæ occurrens in, C , & compleatur parallelogrammum, AF , regula verò sit, HM . Dico ergo omnia quadrata, AF , ad omnia quadrata figuræ, $CBHF$, esse vt quadratum, HF , ad quadratum, FG , quadrati, GH , & rectangulum sub sexquitercia, HG , & sub, GF . Hęc autem erit consimilis demonstrationi secundæ partis Theor. 32. ideo inde colligatur.



THEOREMA XLI. PROPOS. XLIII.

IN eadem anteced. Proposit. figura ostendemus omnia quadrata, AF , ad omnia quadrata figuræ, $CBHF$, demptis omnibus quadratis trilinei, BCE . esse vt parallelepipedum sub, BG , & quadrato, HF , ad reliquum parallelepipedum sub, BG , & his spatii .i. quadrato, FG , quadrati, GH , & rectangulo sub sexquitercia, HG , & sub, GF , ab eodem dempto .i. parallelepipedum sub, CE , & quadrato, FG .

Nam omnia quadrata, AF , ad omnia quadrata, BF , ducta per, E , ipsa, EI , æquidistans, HM , sunt vt parallelepipedum sub, AH , & quadrato, HF , ad parallelepipedum sub, BI , & quadrato, IE , sunt autem omnia quadrata, BE , sexcupia omnium quadratorum trilinei, BCE , ideo omnia quadrata, AF , ad omnia quadrata trilinei, BCE , erunt vt parallelepipedum sub, AH , vel, BG , & sub quadrato, HF , ad parallelepipedum sub, BI , & quadrato, IE , sextam partem: Quia verò omnia quadrata, AF , ad omnia quadrata figuræ, $CBHF$, sunt vt quadratum, HF , ad hæc spatia .i. quadratum FG , quadrati, GH , & rectangulum sub sexquitercia, HG , & sub, GF , .i. sumpta, BG , communi altitudine, vt parallelepipedum sub, BG , & quadrato, HF , ad paral-



34. huius.

V v

Iclc-

lelepipedium sub, $B G$, & dictis spatijs, idè omnia quadrata, $A F$, ad omnia quadrata figuræ, $C B H F$, demptis omnibus quadratis trilinei, $B C E$, erunt vt parallelepipedum sub, $B G$, & quadrato, $H F$, ad reli suam, dempta sexta parte parallelepipedum sub, $B I$, vel, $C E$, excessu, $B G$, super, $E F$, & sub quadrato, $I E$, à parallelepipedo sub, $B G$, & dictis spatijs, .i. quadrato, $F G$, .i. quadrati, $G H$, & re-ctangulo sub sexquitercia, $H G$, & sub, $G F$.

THEOREMA XLII. PROPOS. XLIV.

IN eadem figura Prop. 42. ducta intra frustum parabolæ, $E B H F$, recta, $V R$, parallela basi, $H M$, ostendemus omnia quadrata figuræ, $C B H F$, ad omnia quadrata figuræ, $C B R V$, esse vt parallelepipedum sub, $B G$, & his spatijs .i. quadrato, $F G$, .i. quadrati, $G H$, & re-ctangulo sub sexquitercia, $H G$, & sub, $G F$, ad parallelepipedum sub, $B S$, & sub his spatijs, scilicet quadrato, $V S$, .i. quadrati, $S R$, & re-ctangulo sub sexquitercia, $R S$, & sub, $S V$.

Huius demonstratio non est alia à demonstratione Propos. 41. idè ibi in secunda eiusdem parte recolatur.

THEOREMA XLIII. PROP. XLV.

IN eodem Propos. 42. Schemate ostendemus omnia quadrata figuræ, $C B H F$, demptis omnibus quadratis trilinei, $B C E$, ad omnia quadrata semiparabolæ, $B H G$, esse vt reliquum parallelepipedum sub, $B G$, & his spatijs .i. quadrato, $F G$, .i. quadrati, $G H$, & re-ctangulo sub, $F G$, & sexquitercia, $G H$, ab eodem dempta sexta parte parallelepipedum sub, $C E$, & quadrato, $F G$, ad dimidium parallelepipedum sub, $B G$, & quadrato, $G H$.

Etenim omnia quadrata figuræ, $C B H F$, demptis omnibus quadratis trilinei, $B C E$, ad omnia quadrata, $A F$, conuertendo, sunt vt parallelepipedum sub, $B G$, & his spatijs, scilicet quadrato, $F G$, .i. quadrati, $G H$, & re-ctangulo sub, $F G$, & sexquitercia, $G H$, ab eodem dempto .i. parallelepipedum sub, $C E$, & quadrato, $F G$, ad

G , ad

G, ad parallelepipedum sub, B G, & quadrato, H F; item omnia quadrata, A F, ad omnia quadrata, A G, sunt vt quadratum, F H, ad quadratum, H G, .i. sumpta, B G, communi altitudine, vt parallelepipedum sub, B G, & quadrato, F H, ad parallelepipedum sub, B G, & quadrato, H G: Tandem omnia quadrata, A G, dupla sunt omnium quadratorum semiparabolæ, B H G, ergo, ex æquali, omnia quadrata figuræ, C B H F, demptis omnibus quadratis trilinei, B C E, ad omnia quadrata semiparabolæ, B H G, erunt vt parallelepipedum sub, B G, & his spatijs .i. quadrato, F G, & quadrati, G H, & rectangulo sub, F G, & sexquitertia, G H, ab eodem dempto, $\frac{1}{2}$. parallelepipedum sub, C E, & quadrato, F G, ad dimidium parallelepipedum sub, B G, & quadrato, G H, quod erat demonstrandum.

THEOREMA XLIV. PROP. XLVI.

In parabola ducta axi, vel diametro æquidistanter recta linea, si deinde fiat parallelogrammum sub eadem ducta, & sub basi, angulum habens æqualem angulo inclinationis eiusdem ductæ ad basim, regula sumpta basi. Rectangula sub parallelogrammis, in quæ dictum parallelogrammum diuiditur à ducta linea, sunt dupla rectangulorum sub portionibus frusti parabolæ, dicto parallelogrammo inclusæ, per eandem ductam constitutis.

Sit parabola, A Z G, in basi, Z G, circa axim, vel diametrum, A Q, cui parallela ducatur vtcumque recta, D P, fiat autem parallelogrammum sub, Z Q, D P, angulum habens æquale angulo inclinationis, D P, ad Z G, .i. angulo, qui fit, D P G, vtcumque ex duobus, D P G, D P Z, sit autem hoc parallelogrammum, H G, regula vero, H G. Dico ergo, rectangula

sub, H P, P E, dupla esse rectangulorū sub portionibus, B D P Z, D G P. Sumpto ergo vtcumq; in, D P, puncto, T, per, T, ducatur, R F, ipsi, Z G, æquidistans secansq; curuam parabolæ in, S I, & A Q, in, O. Rectangulum ergo, Z P Q, ad rectangulum, S T I, habet rationem

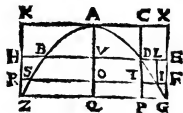


- compositam ex ea, quam habet rectangulum, ZPG , ad rectangulum, ZQG , idest ex ea, quam habet, DP , ad, AQ , & ex ratione rectanguli, ZQG , ad rectangulum, SOI , vel quadrati, QG , ad quadratum, OI , idest ex ea, quam habet, QA , ad, AO , & ex ratione rectanguli, SOI , ad rectangulum, STI , idest ex ratione, AO , ad, DT , ergo rectangulum, ZPG , vel, RTF , ad rectangulum, STI , erit vt, PD , ad DT , abscissam. Et quoniam, HG , est parallelogrammum in eadem basi, & altitudine cum frusto, $BZGD$, & per punctum, T , vtcunq. sumptum ducta, BP , regulæ parallela, quæ est basis, ZG , inuentum est rectangulum BTP , ad rectangulum, STI , esse vt, PD , ad DT ; quatuor ergo horum magnitudinum ordinibus constructis, iuxta has quatuor magnitudines, quæ inuentæ sunt esse proportionales, & hoc modo solito, reperimus rectangula sub, HP , PE , ad rectangula sub portionibus, $BZPD$, DGP esse vt maximè abscissarum, DP , ad omnes abscissas, DP , recti, vel eiusdè obliqui transitus .i. esse eorum dupla, quod ostendere opus erat.
1. huius.
3. huius.
Iux. Cor. 3. 26. l. 2.
Corol. 2. 19. l. 2.

THEOREMA XLV. PROP. XLVII.

IN antec. figura ostendemus, regula eadem, ZG , omnia quadrata, DG , ad omnia quadrata, DPG , esse vt, ZP , ad compositam ex $\frac{1}{2} ZP$, & $\frac{1}{2} PG$: Omnia verò quadrata, DC , ad omnia quadrata trilinei, DGE , esse vt, ZP , ad sui reliquum, demptis ab eadem $\frac{1}{2} ZP$, cum $\frac{1}{2} PG$.

- Coroll. 1. 26. l. 2.
3. huius.
Ex antec.
Iux. A. 23. l. 2.
- Rectangula enim sub, HP , PE , ad rectangula sub, HP , & portione, DPG , sunt vt, EP , ad portionem, DPG , .i. vt, ZP , ad compositam ex $\frac{1}{2} ZP$, & $\frac{1}{2} PG$; eadem autem rectangula sub, HP , PE , sunt dupla rectangulorum sub portionibus, $DBZP$, DPG , .i. sunt ad illa, vt, ZP , ad $\frac{1}{2} ZP$, ergo ad residuum rectangulorum sub, HP , & DPG , demptis rectangulis sub portionibus, $DBZP$, DGP , idest ad rectangula sub trilineo, DPG , & trilineo, $BHZZ$, .i. trilineo, DEG , erunt vt, ZP , ad $\frac{1}{2} PG$, .i. sumpta, PG , cõmuni altitudine, vt rectangulum, ZPG , ad rectangulum sub, PG , & $\frac{1}{2} PG$, .i. ad $\frac{1}{2}$ quadrati, PG , sunt autem omnia quadrata, DG , ad rectangula sub, EP ,



EP, PH, vt quadratum, GP, ad rectangulum, GPZ, ergo, ex æquali, omnia quadrata, DG, ad rectangula sub trilineis, DIG, DEG, erunt vt quadratum, PG, ad $\frac{1}{2}$. quadrati, PG, .i. erunt eorum sexcupla: Quoniam ergo omnia quadrata, DG, ad rectangula, sub, DG, & trilineo, DGP, sunt vt, DG, ad, DGP, .i. vt, ZP, ad compositam ex $\frac{1}{2}$. ZP, & $\frac{1}{2}$. PG, sunt autem omnia quadrata, DG, sexcupla rectangulorum sub trilineis, DPG, DEG, .i. ad ea, vt, ZP, ad $\frac{1}{2}$. ZP, ergo omnia quadrata, DG, ad omnia quadrata, DGP, erunt vt, ZG, ad residuum, dempto $\frac{1}{2}$. ZP, à composita ex $\frac{1}{2}$. ZP, & $\frac{1}{2}$. PG, quia verò si ab $\frac{1}{2}$. ZP, dematur, $\frac{1}{2}$. ZP, remanent $\frac{1}{2}$. ZP, ideo omnia quadrata, DG, ad omnia quadrata, DPG, erunt vt, ZP, ad compositam ex $\frac{1}{2}$. ZP, & $\frac{1}{2}$. PG, vt dictum est.

Quia verò nunc ostensum est omnia quadrata, DG, ad omnia quadrata, DPG, esse vt, ZP, ad compositam ex $\frac{1}{2}$. ZP, & $\frac{1}{2}$. PG, omnia autem quadrata, DG, ad rectangula sub trilineis, DPG, DEG, sunt vt, ZP, ad $\frac{1}{2}$. ZP, & ad eadem bis sumpta, vt, ZP, ad $\frac{1}{2}$. ZP, ideo omnia quadrata, DG, ad omnia quadrata, DPG, & ad rectangula bis sub, DPG, DEG, erunt vt, ZP, ad compositam ex $\frac{1}{2}$. ZP, & $\frac{1}{2}$. PG, ergo omnia quadrata, DG, ad residuum, demptis omnibus quadratis, DPG, & rectangulis bis sub, DPG, DEG, ad omnia quadrata trilinei, DEG, erunt vt, ZP, ad residuum, demptis $\frac{1}{2}$. ZP, & $\frac{1}{2}$. PG, ab eadem, ZP, quæ nobis ostendenda erat.

THEOREMA XLVI. PROPOS. XLVIII.

IN supradictæ Propos. figura, ducta, AX, parallela basi, ZG, quæ tanget parabolam in, A, cui occurrat, GE, producta, in puncto, X, ostendemus omnia quadrata trilinei, DPG, ad omnia quadrata semiparabolæ, AQG, habere rationem compositam ex ea, quam habet composita ex $\frac{1}{2}$. ZP, & $\frac{1}{2}$. PG, ad, ZP, & ex ratione parallelepipedum sub, DP, & quadrato, PG, ad dimidium parallelepipedum sub, AQ, & quadrato, QG; Omnia vero quadrata trilinei, AXG, ad omnia quadrata trilinei, DEG, habere rationem compositam ex ea, quam habet parallelepipedum sub, AQ, & quadrato, QG, sexta pars, ad parallelepipedum sub, DP, & quadrato, PG, & ex ea, quam habet, ZP, ad residuum, demptis ab eadem, ZP, .i. ZP, cum $\frac{1}{2}$. PG.

Omnia .n. quadrata trilinei, DPG, ad omnia quadrata semiparabolæ

- ra bolæ, A QG, habent rationem compositam ex ea, quam habent omnia quadrata, D P G, ad omnia quadrata, D G, idest ex ratione compositæ ex $\frac{1}{2}$. Z P, & $\frac{1}{2}$. P G, ad, Z P, & ex ea, quam habent omnia quadrata, D G, ad omnia quadrata, A G, .i. ex ratione parallelepipedum sub, D P, & quadrato, P G, ad parallelepipedum sub, A Q, & quadrato, Q G, & tandem ex ea, quam habent omnia quadrata, A G, ad omnia quadrata semiparabolæ, A Q G, .i. ex ratione parallelepipedum sub, A Q, & quadrato, Q G, ad eiusdem dimidium: Duæ autem rationes parallelepipedum sub, D P, & quadrato, P G, ad parallelepipedum sub, A Q, & quadrato, Q G, & ratio huius ad eiusdem dimidium, conficiunt rationem parallelepipedum sub, D P, & quadrato, P G, ad $\frac{1}{2}$. parallelepipedum sub, A Q, & quadrato, Q G, ergo omnia quadrata, D P G, ad omnia quadrata semiparabolæ, A Q G, habent rationem compositam ex ratione rectæ compositæ ex $\frac{1}{2}$. Z P, & $\frac{1}{2}$. P G, ad, Z P, & ex ratione parallelepipedum sub, D P, & quadrato, P G, ad $\frac{1}{2}$. parallelepipedum sub, A Q, & quadrato, Q G, ut dictum est.
- Insuper omnia quadrata trilinei, A X G, ad omnia quadrata trilinei, D E G, habent rationem compositam ex ratione omnium quadratorum, A X G, ad omnia quadrata, A G, .i. subsexcupla .i. ex ratione $\frac{2}{3}$. parallelepipedum sub, A Q, & quadrato, Q G, ad idem parallelepipedum, & ex ratione omnium quadratorum, A G, ad omnia quadrata, D G, .i. parallelepipedum sub, A Q, & quadrato, Q G, ad parallelepipedum sub, D P, & quadrato, P G, quæ duæ rationes conficiunt rationem $\frac{2}{3}$. parallelepipedum sub, A Q, & quadrato, Q G, ad parallelepipedum sub, D P, & quadrato, P G, & tandem ex ratione omnium quadratorum, D G, ad omnia quadrata trilinei, D E G, .i. ex ea, quam habet, Z P, ad residuum, ab eadem, Z P, demptis $\frac{1}{3}$. Z P, cum $\frac{1}{3}$. P G, ergo omnia quadrata trilinei, A X G, ad omnia quadrata trilinei, D E G, habent rationem compositam ex ea, quam habet $\frac{2}{3}$. parallelepipedum sub, A Q, & quadrato, Q G, ad parallelepipedum sub, D P, & quadrato, P G, & ex ea, quam habet, Z P, ad sui residuum, demptis ab ea $\frac{1}{3}$. Z P, cum $\frac{1}{3}$. P G, quæ ostendere oportebat.

THEOREMA XLVII, PROPOS. XLIX.

IN eadem figura Propos. 46. ostendemus, producta, P D, versus, A X, cui occurrat in, C, omnia quadrata trilinei, D G P, ad omnia quadrata figuræ, C A Z P, demptis omnibus quadratis trilinei, A C D, habere rationem compositam ex ea, quam habet composita ex $\frac{1}{2}$. Z P, & $\frac{1}{2}$. P G, ad Z P, & ex ratione parallelepipedum sub, D P, & quadrato, P G, ad par-

ralle-

rallelepipedum sub, A Q, & his spatijis .i. quadrato, P Q, quadrati, Q Z, & rectangulo sub sexquitercia, Z Q, & sub, Q P, ab eodem dempta $\frac{1}{2}$. parallelepiedi sub, C D, & quadrato, Q P,

Completo parallelogrammo, K P, omnia igitur quadrata trilinei, D P G, ad omnia quadrata figure; C A Z P, demptis omnibus quadratis trilinei, A C D, habent rationem compositam ex ea, quam habent omnia quadrata, D P G, ad omnia quadrata, D G, .i. ex ratione compositæ ex $\frac{1}{2}$. Z P, & $\frac{1}{2}$. P G, ad, Z P, & ex ratione omnium quadratorum, D



47 huius.

G., ad omnia quadrata, K P, .i. ex ratione parallelepiedi sub, D P, & quadrato, P G, ad parallelepipedum sub, A Q, & quadrato, Z P, & tandem ex ratione omnium quadratorum, K P, ad omnia quadrata figura, C A Z P, demptis omnibus quadratis trilinei, A C D, .i. ex ratione parallelepiedi sub, A Q, & quadrato, Z P, ad parallelepipedum sub, A Q, & his spatijis .i. quadrato, P Q, $\frac{1}{2}$. quadrati, Q Z, & rectangulo sub, P Q, & sexquitercia, Q Z, ab eodem dempta $\frac{1}{2}$. parallelepiedi sub, C D, & quadrato, P Q; duæ autem rationes parallelepiedi sub, D P, & quadrato P G, ad parallelepipedum sub, A Q, & quadrato, Z P, & huius parallelepiedi ad parallelepipedum sub, A Q, & spatijis iam dictis, ab eodem dempta $\frac{1}{2}$. parallelepiedi sub, C D, & quadrato, P Q, componunt rationem parallelepiedi sub, D P, & quadrato, P G, ad parallelepipedum sub, A Q, & dictis spatijis ab eodem dempta $\frac{1}{2}$. parallelepiedi sub, C D, & quadrato, P Q, ergo omnia quadrata trilinei, D G P, ad omnia quadrata figura, C A Z P, demptis omnibus quadratis trilinei, A C D, erunt in ratione composita ex ea, quam habet $\frac{1}{2}$. Z P, cum $\frac{1}{2}$. P G, ad, Z P, & ex ea, quam habet parallelepipedum sub, D P, & quadrato, P G, ad parallelepipedum sub, A Q, & his spatijis .i. quadrato, P Q, $\frac{1}{2}$. quadrati, Q Z, cum rectangulo sub, P Q, & sexquitercia, Q Z, ab eodem parallelepipedo dempta $\frac{1}{2}$. parallelepiedi sub, C D, & quadrato, P Q, quod ostendere opus erat.

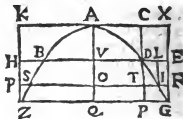
34. huius.

Defin. 2.

THEOREMA XLVIII. PROPOS. L:

I Neadem figura, ducta per, l, lL , æquidistante ipsi, AQ , adhuc ostendemus omnia quadrata trilinei, DGP , ad omnia quadrata trilinei, DIT , habere rationem compositam ex ea, quam habet rectangulum, ZPG , cum quadrati, PG , ad rectangulum, STI , cum quadrati, TI , & ex ea, quam habet quadratum, PG , ad quadratum TI .

41. huius. Nam omnia quadrata, DGP , ad omnia quadrata, DIT , habent rationem compositam ex ea, quam habent omnia quadrata, DGP , ad omnia quadrata, DG , .i. ex ea, quam habet $\frac{1}{2}$. ZP , cū $\frac{1}{2}$. PG , ad, ZP , .i. sumpta, PG , communi altitudine, ex ea, quam habet rectangulum sub $\frac{1}{2}$. ZP , & $\frac{1}{2}$. PG , & sub, PG , ad rectangulum, ZPG , item ex ratione omnium quadratorum, DG , ad omnia quadrata, DI , scilicet composita ex ea, quam habet, PD , ad, DT , & quadratum, PG , ad quadratum, TI , est autem, vt, PD , ad, DT , ita rectangulum, ZPG , ad rectangulum, STI ; Tandem verò componitur ex ea, quam habent omnia quadrata, DI , ad omnia quadrata, DIT , idest ex ratione, ST , ad $\frac{1}{2}$. TI , cum $\frac{1}{2}$. TI , idest sumpta, TI , communi altitudine, ex ea, quam habet rectangulum, STI , ad rectangulum sub, TI , & composita ex $\frac{1}{2}$. ST , & $\frac{1}{2}$. TI , istæ autem rationes .i. quam habet rectangulum sub $\frac{1}{2}$. ZP , & $\frac{1}{2}$. PG , & sub, PG , ad rectangulum, ZPG , & huius ad rectangulum, STI , & tandem rectanguli, STI , ad rectangulum sub, TI , & $\frac{1}{2}$. ST , cum $\frac{1}{2}$. TI , componunt rationem rectanguli sub $\frac{1}{2}$. ZP , & $\frac{1}{2}$. PG , & sub, PG , ad rectangulum sub $\frac{1}{2}$. ST , & $\frac{1}{2}$. TI , & sub, TI .i. triplicatis terminis, componunt rationem rectanguli sub, ZP , PG , cum rectangulo, sub $\frac{1}{2}$. PG , & sub, PG , .i. cum $\frac{1}{2}$. quadrati, PG , ad rectangulum sub, ST , TI , cum rectangulo sub $\frac{1}{2}$. TI , & sub, TI , .i. cum $\frac{1}{2}$. quadrati, TI , & remansit sola ratio quadrati, PG , ad quadratum, TI , ergo omnia quadrata trilinei, DGP , ad omnia quadrata trilinei, DIT , habebunt rationem compositam ex



47. huius.

ca,

ea, quam habet rectangulum, ZIG , cum $\frac{1}{2}$. quadrati, IG , ad rectangulum, STI , cum $\frac{1}{2}$. quadrati, TI , & ex ea, quam habet quadratum, PG , ad quadratum, TI , quod, &c.

THEOREMA XLIX. PROPOS. LI.

IN omnibus huius Libri 4. Propositionibus, in quibus duarum quarumcunque figurarum notificata fuit ratio omnium quadratorum, iuxta regulas in eisdem assumptas, nota etiam euadit ratio similarium solidorum, quæ ex illis gignuntur figuris, iuxta easdem regulas.

Quoniam enim ostensum est Lib. 1. Prop. 33. ut omnia quadrata duarum figurarum inter se sumpta cum datis regulis, ita esse solida similaria genita ex istis figuris iuxta easdem regulas, idem in Propositionibus huius Libri inuenta est ratio omnium quadratorum duarum figurarum cum quibusdam regulis, colligimus etiam nunc eandem esse rationem duorum similarium solidorum, quæ ex illis figuris iuxta easdem regulas, genita dicuntur. Ut ex. g. in Prop. 21. respecta denuo illius figura, cum ostensum est omnia quadrata, AP , esse dupla omnium quadratorum parabolæ, VEF , regula sumpta, VF , & item omnia quadrata parabolæ, VEF , esse sexquialtera omnium quadratorum trianguli, VEF , concludemus pariter solidum simile genitum ex, AP , ad sibi simile genitum ex parabola, VEF , duplam habere rationem; hoc verò ad solidum sibi simile genitum ex triangulo, VEF , habere rationem sexquialteram, genita autem dicta solida intellige iuxta dictam regulam, VF ; patet ergo propositum.

S C H O L I U M.

Quoniam autem aperte colligitur ex Lib. 1. Prop. 46. & 47 si omnes figurae similes parabola, quæ sumantur regula eiusdem basi, sint circuli, diametros in eadem parabola sitos habentes, cui sint erecti, solidum simile genitum ex dicta parabola esse conoides parabolicum, cuius basis rectè secat axim; si verò sint ellipses homologas diametros in eadem parabola sitos habentes eidem erecta, quarum secunda diametri sint aequales distantia parallelarum, qua ducuntur ab extremis prima diametri aequidistanter axi, esse pariter conoides parabolicum, cuius basis tunc obliquè axim secat. Idem ex his infra

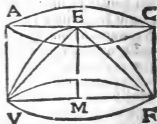
X x

scripta

Scripta sequuntur Corollaria, in quibus exempla adhibebimus, veluti Lib. 3. effectum est, assumptis nempe omnibus figuris similibus genetrici-
 cium figurarum, qua sint circuli, diametros in ipsis genetricibus figu-
 ris, quibus sunt erecti, sitos habentes, qua per reuolutionem figurarum
 circa suos axes describi facile apprehendi possunt, propter quod in ex-
 plis tantummodo axes assumemus congruenter ipsarum genetricium figurarum
 reuolutioni, licet exempla etiam assumptis diametris confici possent
 per descriptionem omnium similiarum figurarum haud tamen per reuolu-
 tionem factam. Liceat autem Prop. antecedentium reassumptas figu-
 ras sub ampliori forma quandoque proponere, vel sub angustiiori, pro-
 ut expedire comperietur, seruata semper earundem similitudine.

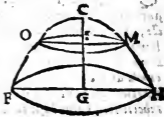
C O R O L L A R I V M I.

IN Prop. 11. ergo si intelligantur tres figurae, nempe parallelo-
 grammum, AF, triangulus, EVF, & parabola, VEF, circa com-
 munem axem reuolui, qui suppona-
 tur esse, EM, fiet ex AF, cylindrus,
 AF, ex triangulo, VEF, conus, VEF,
 & ex parabola, VEF, conoides para-
 bolicum, VEF, vnde patebit cylindrum,
 AF, esse duplum conoidis, VEF, &
 hoc esse sexquialterum coni, VEF; &
 vniuersalissimè, vt dictum est, soli-
 dum simile genitum ex AF, ad sibi
 simile genitum ex parabola, VEF, habere duplam rationem, hoc
 verò ad sibi simile genitum ex triangulo, VEF, rationem sexqui-
 alteram, quod tamen, ne figurae multiplicentur, seu nimis confun-
 dantur (quod etià impossibile obseruabimus) vno tantùm adhibito ex-
 plo, reuolutionis figurarum genetricium circa suos axes, explicare volui.



C O R O L L A R I V M II.

IN Prop. 22. assumpta eius figura, fiat exemplum per reuoluto-
 nem parabolæ, FCH, circa axem,
 CG, dimissis parallelogrammis, AH,
 RM, fiet igitur in hac reuolutione
 conoidea parabolica ex FCH, OCM,
 parabolis, quæ sint, FCH, OCM; vn-
 de patebit conoides parabolicum,
 FCH, ad conoides parabolicum, OCM,
 esse, vt quadratum, GC, ad quadratum,

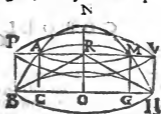


CI, &

CI, & sic esse quodlibet solidum simile genitū ex parabola, FCH, ad sibi simile genitum ex parabola OCM, iuxta communem regulam, FH, siue CG, sit axis, siue tantum diameter, quod iuxta antecedentis explicationem facillē intelligi potest.

COROLLARIUM III.

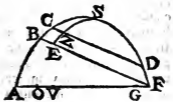
IN Prop. 23. assumpta figura Prop. 12. scilicet parabola, BNH, parallelogrammis, PH, AG, & triangulo, BRH, reuoluitur parabola, BNH, vt fiat nostrum exemplum, circa axem, NO, & insimul, PH, AG, & triangulus, BRH, circa RO, patebit ergo cylindrum ex, PO, ad frustum conoidis ex, ABOR, in reuolutione genitum, esse vt, ON, ad compositam ex, NR, & $\frac{1}{2}$. RO, ipsum vērō ad idem demptō cylindro ex, AO,



sc. AG, vt, NO, ad $\frac{1}{2}$. RO, ex Corollario huic Propositioni subiecto, hoc frustum tandem ad conum genitum ex triangulo, RBO, vt composita ex, ON, dupla, MR, & $\frac{1}{2}$. RO, ad ipsam, NO; & vniuersaliter quæcunque tōnda similia ex eisdem figuris genetricibus genita, iuxta communem regulam, BH, easdem rationes habere, vt supra dicta ad inuicem comparata, siue, NO, sit axis, siue tantum diameter; quod ex Propos. 51. clarē patet. Intelligatur autem in sequentibus, licet semper assumatur axis, tamen pro solidis similibus etiam assumptis diametris eadem ibi apposita verificari.

COROLLARIUM IV.

IN Propos. 16. veluti ostendimus in eiusdem figura hic apposita omnia quadrata portionis, BSF, ad rectangula sub portione, BSF, & figura distantiarum, SEF, esse vt, BF, ad FE, sic ostensum fuisset (assumptis vice quadratorum alijs figuris similibus, & vice rectangulorum, assumptis alijs similibus figuris eius generis, vt veluti est vnum quoduis dictorum



omnium quadratorum ad rectangulum adiacens lateri, à quo describitur, ita sit figura ab eodem latere descripta vice quadrati sumpta, ad figuram descriptam eodem latere vice rectanguli sumptam, siet

X 2 2

enim

enim eodem modo demonstratio his figuris assumptis) omnes figuras similes portionis, BSP , ad figuras v. ce. rectangulorum sumptas esse pariter, vt, BP , ad, EF , & pariter solidum, quorum omnes dictæ figuræ similes vice quadratorum sumptæ sunt omnia plana, ad solidum, quorum figuræ vice rectangulorum sumptæ sunt omnia plana, esse, vt, BF , ad, FB ; quæ quidem solidi non sunt solida ad invicem similia, quia utriusque solidi figuræ non sunt inter se similes, sed tantum sunt similes inter se, quæ sunt in vnoquoque horum solidorum singulatim sumpto.

COROLL. V. SECTIO I.

IN Prop. 27. similiter assumpta eiusdem figura, vt fiat nostrum exemplum reuoluatur parabola, BAC , circa AP , axem, vt fiat conoides parabolicum, BAC , à quo per planum a , DZ , descriptum in reuolutione abscindetur conoides parabolicum, DAF , cuius basis rectè axim, AP , secat, & est circulus, intelligatur autem etiam per, MC , planum extendi rectū ad planū parabolæ, BAC , per hoc igitur abscindetur pariter conoides parabolicum, cuius basis erit ellipsis, cuius maior diameter, MC , minor autem erit, CR . Dico nunc hæc duo conoidea esse inter se æqualia, cum diametri eorundem, AZ , HO , sint æquales: si enim intellexerimus conoides, DAF , planis parallelis basi secari, & pariter conoides, MHC , secari planis parallelis suæ basi, sicut, ductis omnibus eorundem planis, in conoide, DAF , dicta omnia plana, omnes figuræ similes inter se .s. omnes circuli figuræ genitricis, quæ est parabola, DAF ; in conoide verò, MHC , dicta omnia plana sicut omnes figuræ similes genitricis, MHC , .s. omnes ellipses eiusdem, quarum coniugatæ diametri erunt inter se, vt, MC , ad, CR , maiores diametros in figura genitrice, MHC , sitas habentes. Intelligantur nunc circa illas maiores diametros describi circuli in planis ellipsium iacentes, erit ergo quilibet circulus ad ellipsim ab eo comprehensam, vt maior diameter ad minorem, & quia istæ coniugatæ diametri sunt omnes inter se, maiores .s. ad minores, vt MC , ad, CR , .s. vt quadratum, MC , ad rectangulum, MCR , & vt vnum ad vnum; sic omnia ad omnia .s. vt omnes circuli figuræ genitricis, MHC , ad omnes eiusdem similes ellipses, ita circulus circa, MC , ad ellipsim circa, MC , .s. sic quadratum, MC , ad rectangulum, MCR ,



47. l. 1.

10. l. 3.

MCR, ita omnia quadrata figuræ genitricis, vel parabolæ, MH
 C, ad rectangula, sub parabola, MHC, & figura distantiarum, H
 RC, ita solidum, cuius omnes circuli figuræ genitricis, MHC,
 iuxta regulam basim, MC, sumpti sunt omnia plana, ad solidum,
 eius omnia plana sunt omnes similes ellipses iam dictæ figuræ ge-
 nitricis, MHC, sumptæ iuxta eandem regulam, scilicet ad conoides
 parabolicum, MHC; sunt verò omnes circuli parabolæ, DAF, iuxta
 regulam, DF, ad omnes circulos parabolæ, MHC, iuxta regulam,
 MC, ita omnia quadrata, DAF, ad omnia quadrata, MHC, iuxta
 easdem regulas: ideo ex æquali omnes circuli parabolæ, DAF, ad
 omnes ellipses similes iam dictas parabolæ, MHC, erunt vt omnia
 quadrata, DAF, retentis semper eidem regulis, ad rectangula sub,
 MHC, & figura distantiarum, HRC, omnes circuli, DAF, erunt
 æquales omnibus similibus ellipsibus iam dictis figuræ, MHC, ve-
 rum omnes circuli parabolæ, DAF, sumpti iuxta regulam, DF,
 quorum diametri sunt in figura genitrice, DAF, sunt omnia plana
 conoidis geniti in revolutione ex semiparabola, DAZ, omnes verò
 ellipses similes iam dictæ parabolæ, MHC, sunt omnia plana co-
 noidis parabolici resecti à plano ducto per, MC, ergo conoides pa-
 rabolicum, DAF, est æquale conoidi parabolico, MHC: Sed vni-
 uersaliter solidum genitum ex, DAF, habens omnia plana, quæ sint
 omnes figuræ similes inter se eiusdem genitricis, DAF, erit æquale
 solido genito ex, MHC, habenti omnia plana, quæ sint omnes fi-
 guræ similes inter se eiusdem genitricis figuræ, MHC, ad quas om-
 nes figuræ similes figuræ genitricis, DAF, sint vt omnia quadrata,
 DAF, ad rectangula sub figura genitrice, MHC, & figura distanti-
 arum, HRC, dummodo diametri, AZ, HO, inter se sint æquales,
 quæ hic nobis erant colligenda.

Iuxta reg-
DF.Plicitur
ex Coro.
47. 1.

S E C T I O I I.

IN Coroll. 1. colligitur solidum simile genitum ex parabola, D
 AF, ad sibi simile genitum ex parabola, MHC, esse vt, DF,
 ad MC, dum, AZ, HO, diametri fuerint æquales.

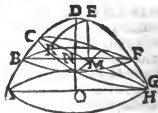
S E C T I O I I I.

IN Coroll. 2. colligitur, si fuerint duo plana axem conoidis pa-
 rabolicæ oblique secantia, sint autem abscissarum conoidum
 diametri inter se æquales, quod abscissæ conoides erunt inter se
 æquales; sed vniuersaliter, vice similibus ellipsium, quæ sunt om-
 nia

nia plana dictarum conoidum, alijs figuris similibus seorsim in vnoquoque solido assumptis, inter se eandem rationem, quam prædictæ similes ellipses habentibus, quod ea solida, quorum assumptæ similes figuræ sunt omnia plana, erunt inter se æqualia, dum diametri genitricium eorundem figurarum, quæ sunt abscissæ parabolæ, inter se quoque æquales fuerint.

COROLLARIUM VI.

IN Propos. 28. & eius Coroll. assumpta illius figura, & facto solito exemplo per reuolutionem, ADH, parabolæ circa axim, DO, habetur, quod si conois parabolica, ADH, in reuolutione descripta secetur quomodocunque planis siue ad axem rectis, siue obliquis, quod abscissæ conoides erunt inter se, vt quadrata diametrorum eorundem, Nam vt omnia quadrata, BDF, regula, BF, quæ axim, DO, rectè secat, ad rectangula sub parabola, CEG, & figura distantiarum, ERG, ita esse omnes circulos, BDF, diametros in ea fitas habentes, sumptos iuxta regulam, BF, ad omnes similes ellipses figuræ genitricis, CEG, sumptas iuxta regulam, CG, quarum diametri maiores sunt in figura, CEG, minores verò in figura distantiarum, REG, ostendemus, methodo antecedentis, ergo dicti omnes circuli parabolæ, BDF, ad dictas omnes ellipses parabolæ, CEG, erunt vt quadratum, DN, ad quadratum, EM, ergo & conois parabolica, BDF, ad conoidem parabolicam, CEG, erit vt quadratum, DN, ad quadratum, EM, vnde, conuertendo, conois parabolica, GEC, ad conoidem parabolicam, FDB, erit vt quadratum, EM, ad quadratum, DN, si ergo aliud planum, vtcunq; obliquè axem, DO, secauerit, erit conois parabolica, BDF, ad hanc conoidem vltimò resectam, vt quadratum, DN, ad quadratum diametri huius resectæ conoidis, ergo ex æquali conois parabolica, CEG, ad hanc conoidem vltimò resectam, cuius basis pariter obliquè secat axim, DO, erit vt quadratum, EM, ad huius diametri quadratum, quomodocunque igitur resecetur conois planis axem secantibus, resecta segmenta sunt, vt diametrorum quadrata. Sed vniuersaliter, si, vice circulorum, vel dictarum ellipsium, sumptamus alias figuras similes in vnoquoque solido seorsim, quorum sunt omnia plana, ijs existentibus omnibus figuris similibus genitri-



genitricium figurarum, quales sunt parabolae, BDF, CEG, dicta ex
 ipsidem genita solida iuxta regulas bases abscissarum paraboliarum,
 si dictae figurae similes fuerint inter se, ut praedicti circuli, vel simi-
 les e lipses, vel ut omnia quadrata, & rectangula sub abscissis pa-
 rabolis, & figuris distantiarum earundem, regulis semper pro vna-
 quaque earundem paraboliarum basibus sumptis, erunt inter se, ut
 quadrata diametrorum abscissarum per ducta plana paraboliarum,
 intellige tamen ressecantia plana semper in supradictis esse erecta
 plano genitricium figurarum, ut planum per, CG, erectum para-
 bolae, ADH, plano, similiter & quod per, BF, siue in conoide, siue
 in alijs iam dictis solidis, ut supradictum est genitis.

APPENDIX.

Exponatur parabola, ACE, circa axim, CM, in basi, AE, cui
 parallela ducatur utcumque, BD, intra ipsam, & iungatur, BE,
 ducaturque, RS, diameter parabola, BRE, & ut fiat nostrum exemplum
 reuo uatur parabola, ACE, circa axim
 manentem, CM, ut fiant conoides
 parabolicae, ACE, BCD, & per BE,
 ducatur planum erectum plano para-
 bolae, ACE, scindens frustum conoi-
 dis, BAE, in duas portiones, scilicet,
 BAE, BDE. Dico ergo portionem, BAE, ad portionem, BDE,
 ressecta, CO, aequali ipsi, RS,) esse ut quadratum, MO, cum rectangulo
 bis sub, MOC, ad quadratum, ON, cum rectangulo bis sub, ONC.

Nam conois, ACE, ad conoidem, BRE, est ut quadratum, MC,
 ad quadratum, CR, vel ad quadratum, OC, ergo, per conuersionem
 rationis, & conuertendo, portio solida, BAE, ad conoidem para-
 bolicam, ACB, erit ut residuum quadrati, MC, dempto quadrato,
 OC, ad quadratum, MC, id est, ut quadratum, MO, cum rectangulo
 bis sub, MOC, ad quadratum, MC, quod serua. Item quia conoi-
 dem, ACE, ad conoidem, BRE, diximus esse ut quadratum, MC,
 ad quadratum, CO, eadem autem conois, ACE, ad conoidem, BCD,
 est ut quadratum, MC, ad quadratum. CN, ergo conois, ACE, ad
 reliquum dempta conoide, BCD, a conoide, BRE, erit ut idem qua-
 dratum, MC, ad reliquum, dempto quadrato, CN, a quadrato, CO,
 id est, ad quadratum, ON, cum rectangulo bis sub, ONC, est ergo co-
 nois, ACE, ad portionem solidam, BDE, ut quadratum, MC, ad
 quadratum, ON, cum rectangulo bis sub, ONC, erat autem portio
 solida,



solida, BAE, ad conoidem parabolicam, ACE, vt quadratum, MO, cum rectangulo bis sub, MOC, ad quadratum, MC, ergo, ex æquali, portio solida, ABE, ad portionem solidam, BDE, erit vt quadratum, MO, cum rectangulo bis sub, MOC, ad quad. ON, cum rectang. bis sub, ONC, quod &c.

Sed vniuersaliter si sint solida similia genita ex parabolis, ACE, BCD, iuxta communem regulam, AE, & ducatur planum per, BE, rectum in plano parabolæ, ACE, scindens solidum simile genitum ex, BDEA, in duas portiones solidas, BAE, BDE, adhuc, consequenter supradictis, inueniemus has duas portiones solidas esse in eadem ratione, vt portiones solidæ productæ ex sectione frusti conoidis parabolice, BAED, .i. esse vt quadratum, MO, cum rectangulo bis sub, MOC, ad quadrat. ON, cum rectangulo bis sub, ONC, quod ex supradictis erui facile potest; quæ demonstratio currit etiã, si, CM, non sit axis, sed tantum diameter, vt consideranti clarè patebit.

A. A. COROLL. VII. SECTIO I.

IN Prop. 29. & Cor. Sect. 1. & 2. colligimus solida similia genita ex parabolis in eadem altitudine constituta, genita inquam iuxta regulas ipsarum bases, esse inter se, vt quadrata basium, & in iisdem basibus constituta, vt earum altitudines, vel vt diametros æqualiter basibus inclinatas; hoc igitur nedum concluditur de conoidibus parabolicis in eadem altitudine stantibus, quod fit, vt quadrata basium, vel in eadem basi existentium, quod sint, vt altitudines, sed de cæteris similibus solidis ex ipsis parabolis genitis iuxta regulas bases, vt dictum est.

B. B. S E C T I O II.

Item habemus conoides parabolicas, & cætera solida similia genita ex parabolis iuxta regulas bases, habere inter se rationem compositam ex ratione quadratorum basium, & altitudinum, vel diametrorum æqualiter basibus inclinatorum.

C. C. S E C T I O III.

Item eadem solida, quarum bases altitudinibus, vel diametris æqualiter basibus inclinatis reciprocantur, esse æqualia, & quæ sunt æqualia habere bases altitudinibus, vel diametris æqualiter basibus inclinatis, reciprocas.

D. SE-

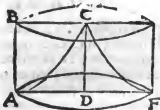
D. I. S E C T I O I V .

D

TAndem colligemus conoides parabolicas, & cætera solida similia ex parabolis genita iuxta regulas ipsarum bases, quarum axes, vel diametri ad homologas basium diametros, vel latera habeant eandem ratione. i. similes conoides parabolicas, & similia solida similia genita ex parabolis iam dictis, esse in tripla ratione dictarum homologarum linearum. 46. l. 1.

* COROLL. VIII. S E C T I O I . *

IN Prop. 30. exposita figura, ut fiat solitum exemplum, reuoluatur, ACD, circa manentem axim, DC, patebit ergo cylindrum genitum ex, BD, in reuolutione .s. BF, esse sexcuplum solidi geniti ex trilineo, CDA, .s. solidi, CAF. Sed vniuersaliter solidum simile genitum ex, BD, ad sibi simile genitum ex, CDA, sexcuplam rationem habere, siue CD, sit perpendicularis ipsi, DA, siue non; vocetur autem solidum genitum per reuolutionem ex, CDA, Apex parabolicus.



A. S E C T I O I I .

A

IN Corollario autem colligimus apices parabolicos in eadem altitudine existentes, esse ut basium quadrata, & in eisdem basibus esse, ut altitudines, sic etiam esse solida similia genita ex trilineis in eadem altitudine, vel in eadem basi existentibus, genita inquam iuxta regulas tangentes ipsas parabolæ.

B. S E C T I O I I I .

B

ITem, quod eadem solida quomodocunque sint, habeant inter se rationem compositam ex ratione basium, & altitudinum, vel secantium æqualiter tangentibus inclinatarum.

Y Y

C. SEC.

C

C. SECTIO IV.

Item, quod eadem solida bases habentia altitudinibus; vel secantibus æqualiter tangentibus inclinatis reciprocas, sint æqualia; & quæ sunt æqualia, bases habeant altitudinibus, vel secantibus æqualiter tangentibus inclinatis reciprocas.

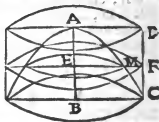
D

D. SECTIO V.

Tandem, quod eadem solida sint in tripla ratione tangentium, vel secantium parabolæ; si tangentes ad secantes semiparabolæ, ex quibus in reuolutione generantur, habeant eandem rationem.

COROLLARIUM IX.

IN Propof. 31. exposita figura, & vt fiat nostrum exemplum reuoluto, AC , circa manentem axim, AB , patet solidum, quod in reuolutione fit ex trilineo, ADC , ad solidum, quod fit ex trilineo, MFC , esse vt quadratum, AB , ad quadratum, BE , & vniuersaliter, solidum simile genitum ex, AC , dempto solido simili genito ex semiparabola, ACB , ad sibi simile genitum ex, EC , dempto solido simili genito ex frusto, ECB , esse vt quadratum, AB , ad quadratum, BE , genita, in quam intellige iuxta communem regulam, BC .

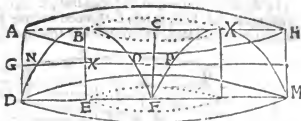


COROLL. X. SECTIO PRIOR.

IN Prop. 32. exposita figura, & vt fiat nostrum exemplum reuoluto, AF , circa manentem axim, CF , patebit cylindrum in reuolutione genitum ex AF , ad solidum genitum ex parabola, DBF , esse vt, AF , ad parabolam, DBF , & ita esse quodlibet solidum simile genitum ex, AF , ad sibi simile genitum ex figura, $CBDF$, dempto solido simili genito ex trilineo, BCF ; cylindrum verò genitum ex, AF , scilicet AM , ad solidum in reuolutione genitum ex figura, $CBDF$, esse vt, AF , ad parabolam, DBF , cum

cum $\frac{3}{2}$ parallelogrammi, AF , i. vt 24. ad 17. & ita efficitolidum

similare ge-
nitum ex, A
 F , ad sibi si-
milare geni-
tum ex figu-
ra, $CBDF$,
genita in-
quam iuxta
communem
regulam, D
 F . Vocetur



autem solidum, quod in reuolutione generatur ex parabola DB
 F . Semianulus strictus parabolicus; quod verò gignitur ex, figu-
ra, $CBDF$; Semibasis columnaris parabolica stricta.

SECTIO POSTERIOR.

IN Corollario colligitur cylindrum, AM , esse sexquialterum
semianuli stricti parabolici, $DBFXM$, vnde colligi potest pro-
prietates, quæ conoidibus, vel apicibus parabolicis in Corollarijs
7. & 8. Proposit. 51. huius in esse ostensa sunt, & de semianulis stri-
ctis parabolicis pariter concludi.

COROLLARIUM XL

IN Proposit. 33. habemus partem interiorem semianuli stricti
parabolici, ad exteriorem (quæ partes dissepantur per super-
ficiem in reuolutione descriptam in superioris figura per lineam, si-
ue axim, BE), esse vt 5. ad 11. & sic esse quodlibet solidum simila-
re genitum ex, BF , dempto solido simili genito ex trilineo, BC
 F , ad sibi simile genitum ex figura, $CBDF$, dempto solido si-
mili genito ex, BF , genita, inquam, iuxta communem regu-
lam, DF .

COROLL. XII. SECTIO PRIOR.

IN Prop. 34. assumpta eiusdem figura, vt fiat exemplum reuo-
luatur, AM , circa manentem axim, HM , fiat autem ex, AM ,
in reuolutione cylindrus, AL ; patet igitur cylindrum, AL , ad so-
lidum in reuolutione genitum ex parabola, DBF , esse vt, AF , ad

Y y 2

parabo-

SECTIO POSTERIOR.

EX Coroll. habetur cylindrum, BY , ad residuum, dempto semitympano parabolico, $BFKR$, ab eodem, esse ut quadratum, EM , ad rectangulum sub, MF , & sub sexquitercia, FE , cum $\frac{1}{2}$. quadrati, FE , & sic esse solidum simile genitum ex, BM , ad residuum, dempto ad eodem solido simili genito ex figura, BHM , iuxta communem regulam, DM .

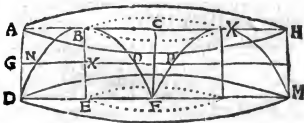
COROLLARIUM XIV.

IN Prop. 36. visa adhuc eadem figura, patet portionum semianulorum parabolici ex, DBF , parabola in revolutione geniti, quæ separantur a superficie descripta ab axi, BE , exteriorem ad interiorem .i. quæ gignitur a semiparabola, BDE , ad eam, quæ gignitur a semiparabola, BFE , esse ut, EM , cum $\frac{1}{2}$. EM , & $\frac{1}{2}$. ED , ad MF , cum $\frac{1}{2}$. MF , & $\frac{1}{2}$. FE , & sic esse solidum simile genitum ex figura, $DBHM$, dempto solido simili genito ex, BM , ad solidum simile genitum ex, BM , dempto solido simili genito ex figura, $BFMH$, iuxta communem regulam, DM .

COROLLARIUM XV.

IN Prop. 37. visa fig. Cor. 10. P. 5. huius, patet conoide m pa-

rabol. genitam in revolutione ex semiparabola, BDE , ad semianulum, strictum parabolium genitum ex parabola, BF , esse ut $\frac{1}{2}$. DF , ad $\frac{1}{2}$. DF , .i.



ut $\frac{1}{2}$. ad 16. & sic esse solidum simile genitum ex, DBE , semiparabola, ad sibi simile genitum ex figura, $CBDE$, dempto solido simili genito ex trilineo, BCF , iuxta communem regulam, DF .

CO.

COROLLARIUM XVI.

IN Propof. 38. confpecta adhuc eadem superiori figura, habetur femianulum latum parabolicum genitum in reuolutione ex parabola, DBF , ad femianulum strictum parabolicum genitum ex eadem, esse vt, DM, MF , ad FD , & sic esse solidum simile quodcumq; genitum ex figura, $HBDM$, dempto solido simili genito ex figura, $BHMF$, ad solidum sibi simili genitum ex figura, $CBDF$, dempto solido simili genito ex trilineo, BCF , iuxta communem regulam, DM .

COROLLARIUM XVII.

IN Prop. 39. vifâ eadem superioris figura, habemus femianulum latum parabolicum genitum ex parabola, DBF , ad conoidem parabolicam genitam ex eadem per reuolutionem, esse vt, DM, MF , ad $\frac{7}{11}$. ipfius, FD , & sic esse quodlibet solidum simile genitum ex, $HBDM$, dempto solido simili genito ex figura, $BHMF$, ad solidum sibi simile genitum ex femiparabola, BDE , iuxta communem regulam, DM .

COROLL. XVIII. SECTIO PRIOR.

IN Prop. 40. vifis fig. Cor. 10, & 12. superiorum, & ductis vt-cumque basi parabolæ, DBF , æquidistantibus intra ipfam, quæ sint, GP, GPV , patet femianulos parabolicos ex parabolis, DBF, NBO , in vtraq; figura per reuolutionem genitos, esse inter fe, vt ipfas parabolæ, DBF, NBO , & sic esse quodlibet solidum simile genitum ex figura, $HBDM$, dempto solido simili genito ex figura, $BFMH$, ad sibi simile genitum ex figura, $HBNV$, dempto solido simili genito ex figura, $HBOV$. Et sic etiam solidum simile genitum ex figura, $CBDF$, dempto solido simili genito ex trilineo, BCF , ad solidum sibi simile genitum ex figura, $CBNP$, dempto solido simili genito ex figura, $BCPO$, genita inquam iuxta communes regulas, DF .

SECTIO POSTERIOR.

EX Coroll. habetur femianulos latos parabolicos ex parabolis, DBF, NBO , in reuolutione circa, HM , genitos esse ad inuicem,

uicē, vt semianulos strictos parabolicos ex parabolis, DBF, NBC, genitos in reuolut. circa, CI, & sic solida similia, &c. & vtrique semianulos parabolicos, siue lates, siue strictos esse ad inuicem, vbi cubi dictarum paraboliarum basium, DF, NC, & sic etiam solida similia, &c.

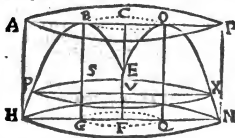
COROLLARIUM XIX.

IN Prop. 41. visis adhuc fig. Cor. 10. & 12. superiorum, patet semibasim columnarem strictam parabolicam genitam in reuolutione ex figura, CBDF, ad semibasim columnarem latam parabolicam genitam ex figura, CBNP, esse vt parallelepipedum sub, BE, & $\frac{1}{2}$ quadrati ipsius, DF, ad parallelepipedum sub, BX, & his spatijs. i. quadrato, XP, $\frac{1}{2}$ quadrati, NX, & rectangulo sub sexquitercia, NX, & sub, XP; & sic etiam esse quodlibet solidum simile genitum ex figura, CBDF, ad solidum sibi simile genitum ex figura, CBNP, iuxta communem regulam, DF, patet insuper semibasim columnarem latam parabolicam genitam in reuolutione circa, HM, ex figura, DBHM, ad semibasim columnarem latam parabolicam genitam ex figura, HBNV, esse vt parallelepipedum sub, BE, & his spatijs. i. quadrato, ME, $\frac{1}{2}$ quadrati, ED, & rectangulo sub sexquitercia, DE, & sub, EM, ad parallelepipedum sub, BX, & his spatijs. i. quadrato, VX, $\frac{1}{2}$ quadrati, AN, & rectangulo sub sexquitercia, NX, & sub, XV; & sic etiam esse solidum simile quodcumq; genitum ex figura, HBDM, ad solidum sibi simile genitum ex figura, HBNV, iuxta communem regulam, DM.

COROLLARIUM XX.

IN Prop. 42. assumpta figura, quæ ad ipsum pertinet. i. parallelogramo, AF, & frusto parabolæ maiori illi incluso. i. EBHF,

vt fiat nostrum exemplū reuoluatur, AF, circa manētē axim, CF, fiat autem ex AF, cylindrus, AN, & ex figura, HBCF, solidum, HBON,



quod vocetur semibasis columnaris media parabolica, & extensio plani, AN, in cylindrum producat in

cylindrum

cylindro parallelogramum, AN, & in semibasi columnari figura, HBON, quæ erit circa eam, CF, composita ex duabus figuris, EBHF, FEON, similibus, & æqualibus ei, quæ per reuolutionem semibasi columnarem, HBON, generat; patet ergo in hac Propositione, cylindrum, AN, ad semibasem columnarem mediam parabolicam, HBON, esse vt quadratum basis, HF, ad quadratum, FG, $\frac{1}{2}$ quadrati, GH, cum rectangulo sub sexquiertia, HG, & sub, GF; sic verò etiam erit quodlibet solidum simile genitum ex, AF, ad sibi simile genitum ex figura, CBHF, iuxta communem regulam, HF.

COROLLARIUM XXI.

IN Prop. 43. visa superioris figura, patebit cylindrum, AN, ad solidum genitum in reuolutione ex frusto maiori parabolæ, EBHF, (quod vocetur Aceruus maior parabolicus) .i. ad Aceruū, HBEON, esse vt parallelepipedum sub, BG, & quadrato, HF, ad reliquum parallelepedi sub, BG, & his spatijs .i. quadrato, FG, $\frac{1}{2}$ quadrati, GH, & rectangulo sub sexquiertia, HG, & sub, GF, ab eodem dempto .i. parallelepedi sub, CE, & quadrato, FG; Sic etiam erit solidum simile quodcumq; genitum ex, AF, ad sibi simile genitum ex figura, CBHF, dempto solido simili genito ex trilineo, BCE, iuxta communem regulam, HF.

COROLLARIUM XXII.

IN Prop. 44. adiuncta superioris figuræ linea, RV, parallela ipsi, HF, quæ, RV, sit producta vsq; in, X, per ipsam ducatur planum æquidistans basi, HN, quod faciet in semibasi columnari, HBON, communem sectionem circulum, RX, habetur ergo hinc semibasem columnarem mediam parabolicam, HBON, ad abscissum per circulum, RX, frustum, RBOX, esse vt parallelepipedum sub, BG, & his spatijs .i. quadrato, FG, $\frac{1}{2}$ quadrati, GH, & rectangulo sub sexquiertia, HG, & sub, GF, ad parallelepipedum sub, BS, & sub his spatijs .i. quadrato, VS, $\frac{1}{2}$ quadrati, SR, & rectangulo sub sexquiertia, RS, & sub, SV. Veluti etiam erit quodlibet solidum simile genitum ex figura, CBHF, ad sibi simile genitum ex figura, CBRV, iuxta communem regulam, HF.

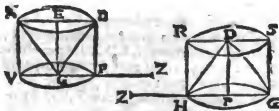
COROLLARIUM XXIII.

IN Prop. 45. visa adhuc anteced. figura, patet acervum maiorem parabolicum, HBEON, ad conoidem parabolicam genitam ex semiparabola, E H G, esse ut reliquum parallelepipedum sub, GB, & his spatii. s. quadrato, I G, $\frac{1}{2}$. quadrati, GH, & rectangulo sub, FG, & sexquitercia, GH, ab eodem depresso. parallelepipedum sub, CE, & quadrato, FG, ad dimidium parallelepipedum sub, EG, & quadrato, GH; ut etiam erit quodlibet solidum simile genitum ex figura, CBHF, dempto solido simili genito ex trilineo, BCE, ad solidum sibi simile genitum ex semiparabola, BHG, iuxta communem regulam, HF.

COROLLARIUM XXIV.

IN Prop. 47. sumatur ex figura Prop. 46. frustum minus parabolæ, quod est, DPG, cum Parallelogrammo, DG, & integra

basi parabolæ, ZAG, quæ est, ZG, & ut fiat solitum exemplum, reuoluetur, DG, circa manentem axim, DP, & iterum circa manentem



axim, EG, fiet ergo ex reuolutione circa, DP, à parallelogrammo, DG, cylindrus, RG, & à frusto parabolæ minori, PDG, solidum, quod sit, HDG, quodque uocetur, Acervus minor parabolicus; & ex reuolutione circa; EG, à parallelogrammo, DG, in alia figura cylindrus, DV, & à trilineo extra frustum minus parabolæ constituto solidum, DGX, quod est frustum apicis parabolici resectum per circulum, DX, quodque uocetur Frustum apicis parabolici. Patet ergo cylindrum, RG, ad acervum minorem parabolicum, HDG, esse ut, ZP, ad compositam ex $\frac{3}{4}$. ZP, & $\frac{1}{4}$. PG, ac cylindrum, DV, ad frustum apicis parabolici, DGX, esse ut, ZP, ad sui reliquum, demptis ab ea $\frac{3}{4}$. ZP, cum $\frac{1}{4}$. PG; Sic autem etiam erit quodlibet solidum simile genitum ex, DG, ad solidum sibi simile genitum ex frusto minori, DGP, ut, inquam, in priori parte huius Theor. dictum est; & sic etiam solidum quodlibet simile genitum ex, DG, ad sibi simile genitum ex trilineo, DEG, iuxta communem regulam,

Zz

regulam,

regulam, ZG, vt in posteriore dicti Theor. parte dictum est.

COROLLARIUM XXV.

IN Propositione 48. sumatur de figura Proposit. 46. parabola; ZAG, cum basi, ZG, & axi, AQ, & relecto eius minori frusto, DPG, de eiusdem figura adhuc sumatur, AXG, trilineum, in quo ducitur, DE, æquiditans ipsi, AX, & seorsum ponatur, vt autem fiat

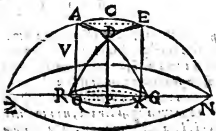


solitum exemplum, reuoluatur parabola, ZAG, circa manentem axim, AQ, & frustum minus eiusdem, quod est, DPG, circa, DP, ex quo fiat apertus minor, RDC. Insuper trilineum, AXG, reuoluatur circa, AX, vt fiat apertus parabolicus, AGZ, & ex GDE, eius frustum, GDE; patet igitur ex ipis Prop. 48. iterum minorem, RDC, ad conoidem parabolicam, ZAG, habere rationem compositam ex ea, quam habet composita ex $\frac{1}{2}$. ZP, & $\frac{1}{2}$. PG, ad, ZP, & ex ratione parallelepipedum sub, DP, & quadrato, PG, ad dimidium parallelepipedum sub, AQ, & quadrato, QG; & sic etiã esse quodlibet solidum simile genitum ex frusto parabolæ, DPG, ad sibi simile genitum ex semiparabola, AOG; iuxta communem regulam, ZG. Item ex eadem Prop. patet apicem parabolicum, AGZ, ad eius frustum, GDE, habere rationem compositam ex ea, quam habet sexta pars parallelepipedum sub AQ, & quadrato, QG, ad parallelepipedum sub, DP, & quadrato, PG, & ex ea, quam habet, ZP, ad residuum, demptis ab eadem, ZP, $\frac{1}{2}$. ZP, cum $\frac{1}{2}$. PG: Sic autem quoque erit quodcunque solidum simile genitum ex trilineo, AXG, ad sibi simile genitum ex trilineo, GDE, iuxta communem regulam, AX.

CORO

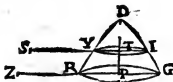
COROLLARIUM XXVI.

N Propositione 49. assumpta de figura Proposit. 46. parabola, ZAG, cum axi, AQ, & illi parallela, DP, abscindatur ab axi, AQ, ipsa, AV, excessus, AQ, super, DP, & vt fiat solum exemplum, reuoluantur tū frustum maius, ZADP, tū frustum minus, DPG, circa communem axem, DP, vt ex frusto maiori, DAZP, fiat acruus maior parabolicus, ZADON, & ex frusto minori, DPG, fiat acruus minor parabolicus, RDG: Pa tet ergo ex hac Propos. acruum minorem, RDG, ad acruum maiorem, ZADON, habere rationem compositam ex ea, quam habet composita ex $\frac{1}{2}$. ZP, & $\frac{1}{3}$. PG, ad ZP, & ex ratione parallelepipedum sub, DP, & quadrato, FG, ad parallelepipedum sub, AQ, & his spatijs, I. quadrato, PQ, $\frac{1}{3}$. quadrati, QZ, & rectangulo sub sexquiteria, ZQ, & sub, QP, dempto ab eodem $\frac{1}{3}$. parallelepipedum sub, AV, & quadrato, QP: Sic autem erit etiam quodlibet solidum simile genitum ex frusto minori, DPG, ad sibi simile genitum ex figura, CAZP, Prop. 46. dempto solido simili genito ex trilineo, ACD, iuxta communem regulam, ZG.



COROLLARIUM XXVII.

N Propositione 50. de figura Proposit. 46. sumatur frustum minus parabola, quod est, DPG, quodque secatur per rectam, TI, æquidistantem ipsi, PG, accipiantur insuper duæ integræ, ZG, SI, & vt fiat nostrum exemplum, reuoluat, DPG, frustum circa manentem axim, DP, vt ex, DPG, fiat acruus minor, RDG, & ex, DTI, eius frustum, YDI, patet ergo ex hoc Theorem. acruum minorem, RDG, ad resectum frustum, YDI, habere rationem compositam ex ea, quam habet rectangulum, ZPG, cum $\frac{1}{3}$. quadrati,



Zz 2

10.

PG, ad rectangulum, SFI, cuius quadrati, FI, & ex ea, quam habet quadratum, PG, ad quadratum, FI. Ut etiam erit quodlibet solidum si nunciatum ex frusto minori parabolæ, quod est, DPG, ad sibi si nunciatum ex trilineo, DFI, iuxta communem regulam, PG.

S C H O L I V M.

Pura alia posse nos adhuc circa hac examinare, præcipue soliditatem eius, quæ præcederet, revoluta parabola circa basim, vel illi parallelam, siue tangentem parabolam, siue extra ipsam constitutam, & proportionem eisdem segmentorum; necnon, & aliorum corporum, quorum notitia tum ob speculationem iucunda, tum in ordine ad praxim considerata, non inutilis etiam esse videtur, sed hæc alij indaganda relinquam. Hæc autem nunc delibasse sufficiat.

Finis quarti Libri.

GEOMETRIÆ

CAVALERII.

LIBER QUINTVS.

*In quo de Hyperbola, Oppositis Sectionibus,
ac solidis ab eisdem generis, habetur
contemplatio.*

THEOREMA I. PROPOS. I.



QMNIA quadrata Hyperbolæ, regula sumpta basi scilicet vna ex ordinatim applicatis ad axim, vel diametrum eiusdem, ad omnia quadrata parallelogrammi in eadem basi, & altitudine cum ipsa, erunt vt linea composita ex dimidia transversa lateris hyperbolæ, & diametri, vel axis eiusdem, ad compositam ex transverso latere, & axi, vel diametro eiusdem: Eadem verò ad omnia quadrata trianguli in eadem basi, & altitudine cum ipsa erunt, vt composita ex sexquialtera transversa lateris, & axi, vel diametro eiusdem, ad compositam ex transverso latere, & axi, vel diametro eiusdem.

Sit

Sitigitur hyperbola, DBF, in basi, DF, cuius axis, vel diameter, EB, & tranſuerſum latus, BO, bifariam diuifum in, N, deſcribatur verò parallogrammū, AF, in eadem altitudine, & baſi cum hyperbola, DBF, & nunc circa axim, vel diametrum, BE, circa quam

titetiam triangulum, BDF. Dico ergo omnia quadrata hyperbolæ, DBF, regula, DF, ad omnia quadrata, AF, eſſe vt compositam ex, NB, & $\frac{1}{2}$. BE, ad, OE; ad omnia verò quadrata trianguli, DBF, eſſe vt compositam ex ſexquialtera, OB, & ipſa, BE, ad, OE, ſumatur in, BE, vt-
cunq; punctum, M, & per, M, ducatur, MG, parallela ipſi, DF, ſecans curuam hyperbolæ in, H. Eſt ergo quadratum, Ee, vel quadratum, GM, ad quadratum, MH, vt rectangulum, OEB, ad rectangulum, OMB, eſt autem, BF, parallelogrammum in eadem altitudine, & baſi cum ſemihyperbola, BEF, & punctum, M, vt-
cunq; ſumptum, per quod acta eſt ipſi, DF, parallela, MG, regula, DF, repertumque eſt, vt quadratum, GM, ad quadratum, MH, ita eſſe rectangulum, OEB, ad rectangulum, OMB, ergo horum quatuor ordinum magnitudines erunt proportionales ſc. omnia quadrata, BF, magnitudines primi ordinis collectæ iuxta primam ſc. iuxta quadratum, GM, ad omnia quadrata ſemihyperbolæ, BEF, magnitudines ſecundi ordinis collectas iuxta ſecundam ſc. iuxta quadratum, MH, erunt vt rectangula ſub maximis abſciſſarum, BE, magnitudines tertij ordinis collectæ iuxta tertiam ſc. iuxta rectangulum ſub, OE, EB, ad rectangula ſub omnibus abſciſſis, EB, adiuncta, BO, & ſub omnibus abſciſſis, EB, magnitudines quarti ordinis collectas iuxta primam, ſc. iuxta rectangulum, OMB, verum rectangula ſub maximis abſciſſarum, EB, adiuncta, BO, & ſub maximis abſciſſarum, EB, ad rectangula ſub omnibus abſciſſis, EB, adiuncta, BO, & ſub omnibus abſciſſis, EB, recti, vel eiufdem obliqui tranſitus, ſunt vt, OE, ad compositam ex, NB, & $\frac{1}{2}$. BE, ergo, conuertendo, omnia quadrata ſemihyperbolæ, BEF, ad omnia quadrata, BF, vel eorum quadrupla ſc. omnia quadrata hyperbolæ, DBF, ad omnia quadrata, AF, etiam ſi, AF, non eſſet circa axim, vel diametrum, BE, ſed tantum in eadem altitudine cum hyperbola, DBF, erunt, vt composita ex, O, B, & $\frac{1}{2}$. BE, ad, OE.



39.l. 3. &
Scho. 40.

Coroll. 3.
26.l. 2.

Corol. 3.
1. 2.

24.l. 2.

Quoniam verò omnia quadrata, AF, ſunt tripla omnium quadrata-

dratorum trianguli, DBF, idè sunt ad illa, vt, OE, ad $\frac{1}{2}$. OE, ostensum autem est omnia quadrata hyperbolæ, DBF, ad omnia quadrata, AF, esse vt compositam ex $\frac{1}{2}$. OB, & $\frac{1}{2}$. BE, ad, OE, ergo, ex æquali, omnia quadrata hyperbolæ, DBF, ad omnia quadrata trianguli, DBF, etiam si non esset circa axim, vel diametrum, BE, sed tantum in eadem altitudine cum hyperbola, DBF, erunt vt composita ex $\frac{1}{2}$. OB, & $\frac{1}{2}$. BE, ad $\frac{1}{2}$. OE, vel vt horum tripla .i. vt composita ex sexquialtera, OB, & ipsa, BE, ad, OE, quod ostendere opus erat.

THEOREMA II. PROPOS. II.

SI duæ ad axim, vel diametrum hyperbolæ ordinatim applicatæ fuerint rectæ lineæ, hyperbolas constituentes, sit autem earum altera regula: omnia quadrata hyperbolæ ab vna earundem constitutæ ad omnia quadrata hyperbolæ per aliam constitutæ, erunt vt parallelepipedum sub composita ex sexquialtera transuersi lateris hyperbolarum dictarum, & sub axi, vel diametro hyperbolæ primò dictæ, & sub quadrato eiusdem axis, vel diametri ad parallelepipedum sub composita ex eiusdem transuersi lateris sexquialtera, & axi, vel diametro hyperbolæ secundo dictæ, & sub quadrato eiusdem axis, vel diametri.

Sint intra curuam hyperbolæ duæ vtcunq; ad axim, vel diametrum, NE, Ordinatim ductæ rectæ lineæ, HG, DF, hyperbolas, NHG, NDF, constituentes, sit autem earum altera, vt, DF, sumpta pro regula, & transuersum eorundem latus, NO, bifariam diuisum in, B, cui in directum sit adiecta, OX, æqualis dimidiæ, ON. Dico ergo omnia quadrata hyperbolæ, DNF, ad omnia quadrata hyperbolæ, HNG, esse vt parallelepipedum sub, XE, & quadrato, EN, ad parallelepipedum sub, XM, & quadrato, MN. Fiant ergo in basibus, DF, HG, & circa axes, vel diametros, NM, ME, parallelogramma, AF, CG: Omnia ergo quadrata hyperbolæ, DNF, ad omnia quadrata hyperbolæ, HNG, habent rationem compositam ex ea, quam habent omnia quadrata hyperbolæ, DNF, ad omnia quadrata, AF, omnia quadrata, AF, ad omnia quadrata, CG, & omnia quadrata, CG, ad omnia quadrata hyperbolæ, HNG; sed omnia quadrata hyperbolæ, DNF, ad omnia qua-

De sim. 12.
l.

Ex ætrec.

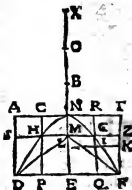
dra.

11. l. 2.

Corol. 39.
& Sch. 40.
l. 1.

Ex antec.

drata, AF, sunt vt composita ex $\frac{1}{2}$. ON. i. ex, BN, & $\frac{1}{2}$. NE, ad OE, vel vt istorum tripla. s. vt, XE, ad triplam, OE. Insuper omnia quadrata, AF, ad omnia quadrata, CG, habent rationem compositam ex ea, quam habet quadratu, DF, ad quadratu, HG, idest rectangulum, OEN, ad rectangulu, OMN, i. horu tripla, i. rectangulum sub tripla, OE, & EN, sola, ad rectangulu sub tripla, OM, & sola, MN, & ex rñe, EN, ad, NM; tandem omnia quadrata, CG, ad omnia quadrata hyperbolæ, HNG, sunt vt, OM, ad compositam ex, BN, & $\frac{1}{2}$. NM, i. vt tripla, OM, ad, MX, idest sumpta, MN, communi altitudine, vt rectangulu sub tripla, OM, & sub, MN, ad rectangulu sub, XM, MN, ergo omnia quadrata hyperbolæ, DNF, ad omnia quadrata hyperbolæ, HNG, habent rationem compositam ex ea, quam habet, XE, ad triplam, EO, i. sumpta, EN, communi altitudine, ex ea, quam habet rectangulum, XEN, ad rectangulum sub, NE, & tripla, EO, & ex ea, quam habet rectangulum sub tripla, OE, & sub, EN, ad rectangulum sub tripla, OM, & sub, MN, & rectangulum sub tripla, OM, & sub, MN, ad rectangulum sub, MN, & MX, & tandem ex ea, quam habet, EN, ad, NM; porro istæ rationes. s. quam habet rectangulum sub, XE, & EN, ad rectangulum sub tripla, OE, & EN, item quam habet rectangulum sub tripla, OE, & EN, ad rectangulum sub tripla, OM, & MN, & quam habet rectangulum sub tripla, OM, & MN, ad rectangulum, XMN, faciunt rationem rectanguli, XEN, ad rectangulum, XMN, quæ simul cum ratione: quam habet, EN, ad, NM, conficit rationem parallelepipedi sub, NE, & rectangulo, NEX, .i. sub, XE, & quadrato, EN, ad parallelepipedum sub, NM, & rectangulo, NMX, .i. sub, XM & quadrato, MN, ergo omnia quadrata hyperbolæ, DNF, ad omnia quadrata hyperbolæ, HNG, erunt vt parallelepipedum sub, XE, & quadrato, EN, ad parallelepipedum sub, XM, & quadrato, MN, quod ostendere oportebat.



36. l. 2.

THEOREMA III. PROPOS. III.

IN eadem antecedentis figura, si producatu, HG, hinc inde vsque ad curuam hyperbolicam, cui incidat in, SZ,

NX , & ON , & NE , regula eadem, DF , retenta; ostendemus omnia quadrata parallelogrammi, SF , ad omnia quadrata frusti hyperbolæ, $HDFG$, esse vt rectangulum, OEN , ad rectangulum sub, OE , & NM , vna cum rectangulo sub composita ex NO , & ME , & sub, ME ; Omnia verò quadrata trianguli, DMF , ad omnia quadrata eiusdem frusti, $HDFG$, esse vt rectangulum, OEN , ad rectangulum sub, OE , & tripla, NM , vna cum rectangulo sub composita ex, NX , & ME , sub, ME .

Sumatur in, ME , vtcunq; punctum, L , & per ipsum regulæ, DF , parallela ducatur, LK , curuam hyperbolicam in, I , secans; Est ergo quadratum, EF , vel quadratum, LK , ad quadratum, LI , vt rectangulum, OEN , ad rectangulum, OLN ; est autem parallelogrammum, MF , in eadem basi, & altitudine cum figura, $MGFE$, punctum, L , sumptum est vt cunque, perq; ipsum regulæ, DF , ducta parallela, LK , repertum est, vt quadratum, KL , ad quadratum, LI , ita esse rectangulum, OEN , ad rectangulum, OLN ; quatuor ergo ordinum magnitudines constructæ iuxta has quatuor inuentas magnitudines proportionales, erunt quoq; proportionales .i. omnia quadrata; MF , ad omnia quadrata figuræ, $MGFE$, quæ sunt



magnitudines primi, & secundi ordinis constructæ iuxta primam, & secundam .i. iuxta quadratum, KL , & quadratum, LI , erunt, vt rectangula sub maximis abscissarum, EM , adiuncta, MO , & sub maximis abscissarum, EM , adiuncta, MN ; ad rectangula sub omnibus abscissis, EM , adiuncta, MO , & sub omnibus abscissis, EM , adiuncta, MN , quæ sunt magnitudines tertij, & quarti ordinis collectæ iuxta tertiam, & quartam .i. iuxta rectangulum, OEN , OLN ; verum rectangula sub maximis abscissarum, EM , adiuncta, MO , & sub eisdem adiuncta, MN , ad rectangula sub omnibus abscissis, EM , adiuncta, MO , & sub iisdem adiuncta, MN , omnibus recti vel eiusdem obliqui transitus sumptis, sunt, vt rectangulum, OEN , ad rectangulum sub, OE , & NM , vna cum rectangulo sub composita ex NO , & ME , & sub, ME , ergo omnia quadrata, MF , ad omnia quadrata figuræ, $GMEF$, vel horum quadrupla .i. omnia quadrata, SF , ad omnia quadrata frusti, $HDFG$,

Coroll. 3.
26.1.2.

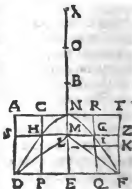
Coroll. 31.
1.2.

- erunt, vt rectangulum, OEN, ad rectangulum sub, OE, & , NM, vna cum rectang. sub composita ex $\frac{1}{2}$. ON, & $\frac{1}{2}$. ME, & sub, ME.
24. l. 2. Quia verò omnia quadrata trianguli, DMF, sunt $\frac{1}{2}$. omnium quadratorum, SF, ideo ad omnia quadrata frusti, HDFG, erunt vt $\frac{1}{2}$. rectanguli, OEN, ad rectangulum sub, OE, & $\frac{1}{2}$. NM, vna cū rectangulo sub composita ex $\frac{1}{2}$. ON, & $\frac{1}{2}$. ME, & sub, ME, vel vt horum tripla. i. vt rectangulum, OEN, ad rectangulum sub, OE, & tripla, NM, vna cum rectangulo sub composita ex sexquialtera, ON, .i. ex, NX, & ON, & $\frac{1}{2}$. NE, & sub, ME, quæ ostendere opus erat.

THEOREMA IV. PROPOS. IV.

IN eadem antecedentis figura productis, CH, RG, versus basem, DF, cui incidant in, PQ, regula eadem retenta, ostendemus omnia quadrata, SF, ad omnia quadrata frusti, HDFG, demptis omnibus quadratis, HQ, esse vt rectangulum, OEN, ad rectangulum sub, EM, & sub composita ex $\frac{1}{2}$. EM, integra, MN, & $\frac{1}{2}$. NO: Omnia verò quadrata trianguli, DMF, ad eadem esse ostendemus, vt rectang: OEN, ad rect. sub composita ex, EX, dupl. 2, NM, & sub, ME.

- In antec. Omnia .n. quadrata, SF, ad omnia quadrata frusti, HDFG, ostensa sunt esse, vt rectangulum, OEN, ad rectangulum sub, OE, & NM, vna cum, rectangulo sub composita ex $\frac{1}{2}$. ON, & $\frac{1}{2}$. ME, & sub, ME: Omnia verò quadrata SF, ad omnia quadrata, HQ, sunt vt quadratum, DF, ad quadratum, PQ, vel ad quadratum, HG, .i. vt rectangulum, OEN, ad rectangulum, OMN, ergo eadem ad reliquum omnium quadratorum frusti, DHGF, demptis omnibus quadratis, HQ, erunt vt rectangulum, OEN, ad reliquum, dempto rectangulo, OMN, à rectangulis sub, OE, MN, & sub composita ex $\frac{1}{2}$. ON, & $\frac{1}{2}$. ME, & sub, ME, est autem rectangulum sub, OE, MN, æquale rectangulis sub, OM, MN, & sub, EM, MN, ergo dempto rectangulo, OMN, a rectangulo sub, OE, MN, remanet rectangulum, EMN, ad quod vna cum rectangulo sub composita ex $\frac{1}{2}$. ON, & $\frac{1}{2}$. ME, & sub, ME, ipsum rectangulum OEN, erit vt omnia quad. SF, ad omnia quad. frusti, HDFG, demptis



p tis

ptis omnibus quadratis, HQ, æquatur autem rectangulum, EMN, cum rectangulo sub, EM, & sub composita ex $\frac{1}{2}$. EM, & $\frac{1}{2}$. NO, rectangulo sub, EM, & sub composita ex $\frac{1}{2}$. EM, integra, MN, & $\frac{1}{2}$. NO, ergo omnia quadrata, SF, ad omnia quadrata frusti, DHGF, demptis omnibus quadratis, HQ, erunt vt rectangulum, OEN, ad rectangulum sub, EM, & sub composita ex $\frac{1}{2}$. EM, integra, MN, & $\frac{1}{2}$. NO.

Omnia verò quadrata trianguli, DMF, ad eadem erunt, vt $\frac{1}{2}$. rectanguli, OEN, ad rectangulum sub, EM, & sub composita ex $\frac{1}{2}$. EM, integra, MN, & $\frac{1}{2}$. NO, .i. vt totum rectangulum sub, OEN, ad rectangulum sub, EM, & sub composita ex, EM, tripla, MN, & NX, .i. sub, EM, & sub composita ex, EX, & dupla, MN, quæ ostendenda erant.

THEOREMA V. PROPOS. V.

IN eadem figura, regula eadem retenta, ostendemus omnia quadrata, AF, demptis omnibus quadratis hyperbolæ, DNF, ad omnia quadrata, SF, demptis omnibus quadratis frusti, HDGF, esse vt parallelepipedum sub composita ex ipsa, XE, EN, & sub quadrato, NE, ad parallelepipedum sub composita ex eadem, XE, & cum, EN, NM, & sub quadrato, ME.

Quia enim omnia quadrata, AF, ad omnia quadrata hyperbolæ, DNF, sunt vt, OE, ad compositam ex $\frac{1}{2}$. ON, & $\frac{1}{2}$. NE, idè per conuersionem rationis, & conuertendo omnia quadrata, AF, demptis omnibus quadratis hyperbolæ, DNF, ad omnia quadrata, AF, erunt vt composita ex $\frac{1}{2}$. ON, & $\frac{1}{2}$. NE, ad, OE, .i. sumpta, NE, communi altitudine, vt rectangulum sub composita ex $\frac{1}{2}$. ON, & $\frac{1}{2}$. NE, & sub, NE, ad rectangulum, OEN. Quoniam verò omnia quadrata, AF, demptis omnibus quadratis hyperbolæ, DNF, ad omnia quadrata, SF, demptis omnibus quadratis frusti, DHGF, habent rationem compositam ex ea, quam habent omnia quadrata, AF, demptis omnibus quadratis hyperbolæ, DNF, ad omnia quadrata, AF, .i. ex ea, quam habet rectangulum sub composita ex $\frac{1}{2}$. ON, & $\frac{1}{2}$. NE, & sub, NE, ad rectangulum, NEO; & ex ratione, quam habent omnia quadrata, AF, ad omnia quadrata, SF, idè ex ea, quam habet, NE, ad, EM, & tandem ex ea, quam habent omnia quadrata, SF, ad omnia quadrata, SF, demptis omnibus quadratis frusti, HDGF

1. huius

Defin. 12.
1. 1.

10. 1.2.

G, ideò omnia quadrata, AF, demptis omnibus quadratis hyperbolæ, DNF, ad omnia quadrata, SF, demptis omnibus quadratis frusti, HDFG, habebunt rationem compositam ex ea, quam habet rectangulum sub composita ex $\frac{1}{2}$. ON, & $\frac{1}{3}$. NE, & sub, NE, ad rectangulum, NEO, & ex ea, quam habet, NE, ad, EM, & ex ea, quam habent omnia quadrata, SF, ad omnia quadrata, SF, demptis omnibus quadratis frusti, HD

FG. Quoniam autem omnia quadrata, SF, ad omnia quadrata frusti, HDFG, sūt vt rectangulum, OEN, ad rect. sub OE, NM, cum rectag. sub composita ex $\frac{1}{2}$. ON, & $\frac{1}{3}$.

ME, & sub, ME, ideò oia quadrata, SF, ad residuum, demptis omnibus quadratis frusti,

HDFG, erunt vt rectangulum, OEN, ad residuum, demptis à rectangulo, OEN, re-

ctangulo, sub, OE, NM, vna cum rectangulo sub composita ex $\frac{1}{2}$. ON, & $\frac{1}{3}$. ME,

& sub, ME; si igitur à rectangulo, OEN, demptis rectangulum sub, OE, MN, re-

manebit rectangulum sub, OE, EM, rur-

sus si à rectangulo sub, OE, EM, demptis rectangulum sub com-

posita ex $\frac{1}{2}$. ON, & $\frac{1}{3}$. ME, & sub, ME, .i. si demptis rectangu-

lum sub, OB, & ME, remanebit rectangulum sub, BE, EM, à quo

si adhuc auferas rectangulum sub $\frac{1}{3}$. ME, & sub, ME, .i. $\frac{1}{3}$. qua-

drati, ME, habebimus rectangulum, BEM, dempto $\frac{1}{3}$. quadrati,

ME, ad quod rectangulum, OEN, erit vt omnia quadrata, SF, ad

sui reliquum, demptis omnibus quadratis frusti, HDFG, ergo om-

nia quadrata, AF, demptis omnibus quadratis hyperbolæ, DNF,

ad omnia quadrata, SF, demptis omnibus quadratis frusti, HDF

G, habebunt rationem compositam ex his rationibus .s. ex ea, quã

habet rectangulum sub composita ex $\frac{1}{2}$. ON, & $\frac{1}{3}$. NE, & sub, NE,

ad rectangulum, OEN, & ex ratione, NE, ad, EM, & ex ea, quam

habet rectangulum, OEN, ad rectangulum, BEM, dempto $\frac{1}{3}$. qua-

drati, ME; harum autem istæ duæ, quam .s. habet rectangulum

sub composita ex $\frac{1}{2}$. ON, & $\frac{1}{3}$. NE, & sub, NE, ad rectangulum,

OEN, & quam habet rectangulum, OEN, ad rectangulum, BEM,

dempto $\frac{1}{3}$. quadrati, ME, consiciunt rationem rectanguli sub com-

posita ex $\frac{1}{2}$. ON, & $\frac{1}{3}$. NE, & sub, NE, ad rectangulum, BEM,

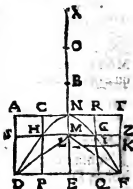
dempto $\frac{1}{3}$. quadrati, ME, vel, his triplicatis, consiciunt rationem

rectanguli sub composita ex tribus, BN, .i. ex, NX, & ter $\frac{1}{3}$. NE,

.s. dupla, NE, .s. sub composita ex, NE, & EX, & sub, NE, ad

rectangulum sub tripla, BE, & sub, EM, demptis $\frac{1}{3}$. idest integro

dem-



huius.

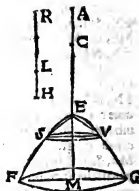
dempto quadrato, ME, quia verò tripla, BE, est composita ex, E, X, & dupla, EN, si à rectangulo sub composita ex, EX, & dupla, EN, & sub, EM, abstuleris quadratum, ME, .i. rectangulum sub, ME, & ME, remanebit rectangulum sub composita ex ipsa, XE, EN, NM, & sub, EM, illas ergo tres componentes rationes in has duas resolutas habemus, scilicet in eam, quam habet rectangulū sub, XEN, integra, & sub, EN, ad rectangulum sub integra, XE, EN, NM, & sub, ME, & in eam, quam habet, NE, ad, EM, quæ duæ rationes componunt rationem parallelepipedum sub, NE, & sub rectangulo integræ, XEN, ductæ in, EN, idest parallelepipedum sub integra, XEN, & quadrato, NE, ad parallelepipedum sub, ME, & rectangulo integræ, XE, EN, NM, ductæ in, ME, .i. ad parallelepipedum sub integra, XE, EN, NM, & quadrato, ME, ergo omnia quadrata, AF, demptis omnibus quadratis hyperbolæ, DNF, ad omnia quadrata, SF, demptis omnibus quadratis frusti, HDFG, erunt vt parallelepipedum sub integra, XEN, & quadrato, NE, ad parallelepipedum sub integra, XE, EN, NM, & quadrato, ME, quod erat ostendendum. 36.2.

PROBLEMA I. PROPOS. VI.

A Data hyperbola portionem abscindere per lineam ad eiusdem axim, vel diametrum ordinatim applicatam, cuius omnia quadrata, regula propositæ hyperbolæ basi, ad omnia quadrata trianguli in eadem basi, & circa eundem axim, vel diametrum cum portione, siue hyperbola abscissa, existentis, habeant datam rationem, quam oportet esse quidem maioris inæqualitatis, sed tamen minorem sexquialtera.

Sit ergo data hyperbola, FEG, cuius axis, vel diameter, EM & latus transversum, CE, cuius sit, AE, sexquialtera, basis, & regula, FG, data ratio, quam habet, HR, ad, RL, maioris inæqualitatis, sed minor sexquialtera, oportet ergo ab hyperbola, FEG, per lineam ad, EM, ordinatim applicatam .i. basi, siue regulæ, FG, parallelam, portionem, siue hyperbolam abscindere, cuius omnia quadrata ad omnia quadrata trianguli in eadem basi, & circa eundem axim, vel diametrum cum ipsa habeant rationem, quam habet, HR, ad, RL; quia ergo ratio, HR, ad, RL, est minor sexquialtera, crit minor ea, quam habet, AE, ad, EC, & etiã diui-

diuidendo minor ea, quam habet, AC, ad, CE, eandem ergo, quam habet, HL, ad, LR, habebit, AC, ad maiorem, CE, sit illa, CO, & per, O, ducatur, SV, parallela ipsi regula, FG, iunganturque, SE, EV: Omnia ergo quadrata hyperbolæ, SEV, ad omnia quadrata trianguli, SEV, sunt vt, AO, ad, OC, quia verò, AC, ad, CO, est vt, HL, ad, LR, componendo, AO, ad, OC, erit vt, HR, ad, RL, ergo omnia quadrata hyperbolæ, SEV, ad omnia quadrata trianguli, SEV, erunt vt, HR, ad, RL, in ratione data, quod facere opus erat.



THEOREMA VI. PROPOS. VII.

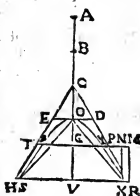
SI circa datam hyperbolam describantur asymptoti, eiusdem autem basis vsq; ad asymptotos producat, quæ sumatur pro regula: Omnia quadrata hyperbolæ ad omnia quadrata trianguli asymptotis, & basi comprehensi, habebunt rationem compositam ex ea, quam habet quadratum basis hyperbolæ ad quadratum basis trianguli, & ex ea, quam habet rectangulum sub composita ex sexquialtera transversilateris, & axi, vel diametro datæ hyperbolæ, sub eodem axi, vel diametro, ad rectangulum sub composita ex transverso latere, & axi, vel diametro eiusdem hyperbolæ; & sub composita ex transverso latere, & eodem axi, vel diametro.

Sit igitur data hyperbola, cuius basis, SX, circa axim, vel diametrum, OV, cuius transversum latus sit, BO, bifariam in C, diuisum, sit autem illi in directum adiuncta, AB, æqualis, BC, deinde ducta per, O, tangente hyperbolam, quæ sit, ED, cui erit parallela basis, SX, abscindantur, EO, OD, ita vt quadratum, E O, & quadratum, OD, seorsim sint æqualia quartæ parti rectanguli sub, BO, latere transversio, & sub eiusdem recto latere, si ergo iunctis, CE, CD, ipsæ producantur indefinitè versus basim, SX, cui productæ occurrant in punctis, H, R, erunt, CH, CR, asym-

r. 2. C. P. 1.

ptoti

ptoti datæ hyperbolæ. Dico igitur omnia quadrata hyperbolæ, SOX, ad omnia quadrata trianguli, HCR, habere rationem compositam ex ea, quam habet quadratum, SX, ad quadratum, HR, & rectangulū, AVO, ad rectangulum, BVC, iungantur, OS, OX: Omnia ergo quadrata hyperbolæ, SOX, ad omnia quadrata trianguli, HCR, habent rationem compositam ex ea, quam habent omnia quadrata hyperbolæ, SOX, ad omnia quadrata trianguli, SOX, .i. ex ea, quam habet, AV, ad, VB, & ex ea, quam habent omnia quadrata trianguli, SOX, ad omnia quadrata trianguli, HCR, quæ est composita ex ea, quam habet quadratum, SX, ad quadratum, HR, & ex ea, quam habet, OV, ad, VC, habemus ergo has tres rationes componentes rationem, quam habent omnia quadrata hyperbolæ, SOX, ad omnia quadrata trianguli, HCR, scilicet eam, quam habet quadratum, SX, ad quadratum, HR, & quam habet, AV, ad, VB, & tandem, quam habet, OV, ad, VC, harum autem istæ duæ .i. quæ habet, AV, ad, VB, & OV, ad, VC, componunt rationem rectanguli, AVO, ad rectangulum, BVC, ergo omnia quadrata hyperbolæ, SOX, ad omnia quadrata trianguli, HCR, habent rationem compositam ex ea, quam habet quadratum, SX, ad quadratum, HR, & rectangulum, AVO, ad rectangulum, BVC, quod ostendere opus erat.



Defin. 12.
l. 1.
1. huius.
D. Cor.
21. l. 2.

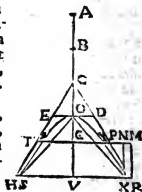
6. sec.

THEOREMA VII. PROPOS. VIII.

IN eadem antecedi. figura, regula eadem, retenta, ostendemus (ducta intra hyperbolam, SOX, ipsa, IY, occurrente asymptotis, CH, CR, in, T, P.) omnia quadrata trapezium, THRP, ad omnia quadrata frusti hyperbolæ, ISXY, esse in ratione composita ex ea, quam habet rectangulum sub, GP, VR, cum quadrato, PM, ad quadratum, VX, & ex ea, quam habet rectangulum, BVO, ad rectangulum sub, BV, OG, una cum rectangulo sub composita ex .BO, & .GV, & sub, GV.

Du-

Ducantur per puncta, X, R, XN, RM , rectæ lineæ parallelæ
 axi , vel diametro hyperbolæ, OV , occurrentes, TP , productæ, in,
 N, M : Omnia ergo quadr. trapezij, $GPRV$, ad omnia quadrata
quadrilinei, $GVXY$, habent rationem compositam ex ea, quam
habent omnia quadrata trapezij, $PGVR$, ad omnia quadrata,
 GR , .i. ex ea, quam habet rectangulum sub, PG, VR , cum $\frac{1}{2}$. qua-
drati, PM , ad quadratum, VR , & ex ea, quam habent omnia qua-
drata, GR , ad omnia quadrata, GX , idest ex ea, quam habet qua-
dratum, RV , ad quadratum, VX ; quæ duæ rationes componunt
rationem, quam habet rectangulum sub,
 GP, VR , cum $\frac{1}{2}$. quadrati, PM , ad qua-
dratum, VX ; & tandem ex ea, quam ha-
bent omnia quadrata, GX , ad omnia
quadrata, $GXYV$, .i. ex ea, quam habet
rectangulum, BVO , ad rectangulum sub,
 BV, GO , vna cum rectangulo sub com-
posita ex $\frac{1}{2}$. BO , & $\frac{1}{2}$. GV , & sub, GV ,
ergo omnia quadrata trapezij, $PGVR$,
ad omnia quadrata quadrilinei, $YGVX$,
vel eorum quadrupla .i. omnia quadrata
trapezij, $THRP$, ad omnia quadrata fru-
sti, $ISXY$, habebunt rationem compo-
sitam ex ea, quam habet rectangulum sub,
 GP, VR , cum $\frac{1}{2}$. quadrati, PM , ad quadratum, VX , & ex ea, quæ
habet rectangulum, BVO , ad rectangulum sub, BV, GO , vna cum
rectangulo sub composita ex $\frac{1}{2}$. BO , & $\frac{1}{2}$. GV , & sub, GV , quod
ostendere opus erat.



THEOREMA VIII. PROPOS. IX.

Visa adhuc anteced. figura, exponemus aliter rationē
ibi adinuentam tantummodo compositam ex dua-
bus, ad quam solum eandem reducentes, probando .s. om-
nia quadrata trianguli, HCR , regula eadem, HR , retentā
ad omnia quadrata hyperbolæ, SOX , esse vt cubus, CV ,
est ad parallelepipedum ter sub, CO , & quadrato, OV ,
cum cubo, OV .

6. huius

Nam vt in suprascripta Proposit. ostensum est, omnia quadrata
trianguli, CHR , ad omnia quadrata hyperbolæ, SOX , conuertē-
do, habent rationem compositam ex ea, quam habet quadratū,
 HR ,

HR, ad quadratum, SX, & rectangulum, BVC, ad rectangulum:
 AVO, quæ est composita pariter ex duabus .i. ex ea, quam habet, 5. l. 20
 CV, ad, VO, & ex ea, quam habet, BV, ad, VA, vt autem, bV,
 ad, VA, sic est, sumpra, OV, communi altitudine, rectangulum,
 BVO, ad rectangulum, AVO, quod terua. Sumatur nunc harum
 rationum componentium ea, quam habet quadratū, HR, ad qua-
 dratum, SX, quæ est eadem ei, quam habet quadratum, HV, ad 5. 2. Elem.
 quadratum, VS, quia verò rectangulum, HSR, cum quadrato, SV, 10. 2. Cō.
 est æquale quadrato, HV, ideò quadratum, VS, est excessus; quo
 quadratū, HV, superat rectang. HSR, & quia rectangul. HSR, est
 æquale quadrato, EO, ideò, vt quadratum, HV, ad rectangulum, 4. 6. Elem.
 HSR, ita erit idem quadratum, HV, ad quadratum, EO, & ita
 erit quadratum, VC, ad quadratum, CO, quia triangula, CEO,
 CHV, sunt similia, ergo, per conuersionem rationis, quadratum,
 HV, ad excessum sui super quadratum, EO, .i. ad quadratum, VS,
 erit vt quadratum, VC, ad excessum sui super quadratum, CO, .i.
 ad rectangulū bis sub, CO, OV, cum quadrato, OV, .i. ad rectan-
 gulum semel sub, BO, OV, cum quadrato, OV, .i. ad integrum
 rectangulū, BVO; erit ergo, vt quadratum, HV, ad quadratum,
 VS, ita quadratum, CV, ad rectangulum, BVO, hæc ergo ratio,
 quam nempe habet quadratum, CV, ad rectangulum, BVO, sum-
 pta vice eius, quam habet quadratum, HV, ad quadratum, VS,
 vel quadratum, HR, ad quadratum, SX, (quæ erat vna rationum
 componentium) componit rationem omnium quadratorum trian-
 guli, HCR, ad omnia quadrata hyperbolæ, SOX, inuoluta sumpta
 cum ea, quam habet rectangulum, BVO, ad rectangulum, AVO,
 & cum ea, quam habet, CV, ad, VO; harum autem trium rationū
 componentium ea, quam habet quadratum, CV, ad rectangulum,
 BVO, & quam habet hoc rectangulum, BVO, ad rectangulum,
 AVO, componunt rationem quadrat, CV, ad rectangulum, AV
 O, illas ergo tres in has duas rationes retolutas habemus. In eam,
 quam habet quadratum, CV, ad rectangulum, AVO, & in eam,
 quam habet, CV, ad, VO, porro istæ duæ rationes componunt
 rationem parallelepipedī sub, CV, & quadrato, CV, .i. cubi, CV,
 ad parallelepipedum sub, OV, & rectangulo, AVO, .i. parallele-
 pipedī sub, AV, & quadrato, VO, .i. parallelepipedī sub, AO, &
 quadrato, OV, cum cubo, OV, .i. parallelepipedī ter sub, CO, &
 quadrato, OV, cum cubo, OV; ergo omnia quadrata trianguli, 36. l. 1.
 HCR, ad omnia quadrata hyperbolæ, SOX, erunt vt cubus, CV,
 ad parallelepipedum ter sub, CO, & quadrato, OV, cum cubo, O
 V, quod ostendere opus erat.

THEOREMA IX. PROPOS. X.

Si à centro hyperbolæ duæ intra asymptotos eiusdem ductæ fuerint rectæ lineæ indefinitè productæ, agantur autem intra curuam hyperbolicam parallelæ tangentibus in punctis concursus duarum linearum, & curuæ hyperbolicæ hinc inde ad eandem productæ, erunt istæ bases hyperbolarum, quarum diametri, vel axes erunt portiones duarum à centro interceptæ inter ipsas, & earundem hyperbolarum vertices: Dico autem omnia quadrata vnius duarum hyperbolarum, regula eiusdem basi, ad omnia quadrata alterius. regula quoq; huius basi, habere rationem compositam ex ratione rectanguli sub composita ex sexquialtera transuersi lateris hyperbolæ primò dictæ, & axi, vel diametro eiusdem, & sub composita ex transuerso latere, & axi, vel diametro hyperbolæ secundò dictæ, ad rectangulum sub composita ex sexquialtera transuersi lateris hyperbolæ secundò dictæ, & axi, vel diametro eiusdem, & sub composita ex transuerso latere, & axi, vel diametro hyperbolæ primò dictæ; & ex ratione parallelepipedum sub altitudine hyperbolæ primò dictæ, basi verò, basis eiusdem quadrato ad parallelepipedum sub altitudine hyperbolæ secundò dictæ, basiq; pariter eiusdem basis quadrato.

Sit ergo hyperbolæ, $AD\text{C}$, utcumq; basis, AC , centrum, E , per quod intra eiusdem asymptotos, EY , EZ , ductæ sint, $FEDB$, $HEVI$, utcumq; indefinitè productæ, sit tamen altera earum diameter iam expositæ hyperbolæ, pro alia hyperbola autem constituenda, ducta pariter sit utcumq; intra curuam hyperbolicam, & in eandem hinc inde producta ipsa, OX , parallela tangenti curuam hyperbolicam in puncto, V , in quo ipsam, HI , secat. Dico ergo omnia quadrata hyperbolæ, $AD\text{C}$, regula, AC , ad omnia quadrata hyperbolæ, OVX , regula, OX , habere rationem compositam (sumptis, EF , FM , æqualibus ipsi, ED , & EH , HR , æqualibus ipsi, EV .) ex ratione rectanguli sub, MB , HI , ad rectangulum sub, RI , FB ; & ex ratione parallelepipedum sub altitudine hyperbolæ, $AD\text{C}$,

&

OVX, familia rectangulo, XOP, regula, OX, habebunt rationem compositam ex ea, quam habet rectangulum sub, MB, HI, ad rectangulum sub, RI, FB, & ex ea, quam habet parallelepipedum sub altitudine hyperbolæ, ADC, basi quadrato, AC, ad parallelepipedum sub altitudine hyperbolæ, OVX, basi rectangulo, XOP, quod erat demonstrandum.

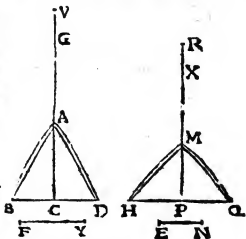
THEOREMA XI. PROPOS. XII.

Asumptis quibuscunq; hyperbolis, in vnaquaq; regula basi, ostendemus omnia quadrata vnus ad omnia quadrata alterius, habere rationem compositam ex ratione rectanguli sub composita ex sexquialtera transuersi lateris, & axi, vel diametro hyperbolæ primò dictæ, & sub composita ex transuerso latere, & axi, vel diametro hyperbolæ secundò dictæ ad rectangulum sub composita ex transuersi lateris sexquialtera, & axi, vel diametro hyperbolæ secundò dictæ, & sub composita ex transuerso latere, & axi vel diametro hyperbolæ primò dictæ, & ex ratione parallelepipedum sub altitudine hyperbolæ primò dictæ, basi autem quadrato basis eiusdem, ad parallelepipedum sub altitudine hyperbolæ secundò dictæ, basi pariter quadrato basis eiusdem. Vel si comparentur omnia quadrata hyperbolæ primò dictæ, ad omnia rectangula hyperbolæ secundò dictæ similia cuidam rectangulo, illa ad hæc habebunt rationem compositam ex ratione prædictorum rectangulorum, & ex ratione parallelepipedum primò dictæ ad parallelepipedum sub altitudine hyperbolæ secundò, dictæ basi rectangulo, cui omnia dicta rectangula sunt similia. Vel tandem si comparentur omnia rectangula primæ hyperbolæ similia cuidam rectangulo ad omnia rectangula secundæ hyperbolæ similia pariter cuidam rectangulo, illa ad hæc habebunt rationem compositam ex ratione parallelepipedum sub altitudine hyperbolæ primò dictæ basi rectangulo, cui omnia eiusdem rectangula sunt similia, ad parallelepipedum sub altitudine secundæ hyperbolæ basi rectangulo, cui omnia eiusdem rectangula iam dicta sunt simi-

similia, & ex ratione, quæ in huius Theorematis supradictis casibus inter illa duo rectangula primò loco exposita fuit.

Sint assumptæ quæcunq; hyperbolæ, BAD, HMQ, circa axes, vel diametros, AC, MP, circa quas sint quoq; triangula, BAD, HMQ, & in basibus, BD, HQ, latus autem transuertium hyperbolæ, BAD, sit, GA, cuius sexquialtera, VA; & latus transuertium hyperbolæ, HMQ, sit, MX, cuius sexquialtera, MR, sint autem expositæ duæ utcunq; rectæ lineæ, FY, EN. Dico omnia quadrata hyperbolæ, BAD, regula, BD, ad omnia quadrata hyper-

bolæ, HMQ, regula, HQ, habere rationem compositâ ex ea, quam habet rectangulum sub, VC, XP, ad rectangulum sub RP, CG, & ex ea, quam habet parallelepipedum sub altitudine hyperbolæ, BAD, & sub quadrato, BD, ad parallelepipedum sub altitudine hyperbolæ, HMQ, basi quadrato, HQ; quod ostendemus ad modum Propos. 10. Si verò comparentur om-



nia quadrata hyperbolæ, BAD, ad omnia rectangula hyperbolæ, HMQ, similia rectangulo sub, HQ, EN, ostendemus illa ad hæc habere rationem compositam ex ratione primò dicta inter illa rectangula, & ex ratione parallelepipedi sub altitudine hyperbolæ, BAD, basi quadrato, BD, ad parallelepipedum sub altitudine hyperbolæ, HMQ, basi rectangulo sub, HQ, EN; hocq; ostendemus iuxta methodum Propos. antecedentis. Si tandem comparentur omnia rectangula hyperbolæ, BAD, similia rectangulo sub, BD, FY, ad omnia rectangula hyperbolæ, HMQ, similia rectangulo sub, HQ, EN, ostendemus propositum de his hoc pacto: Nã omnia rectangula hyperbolæ, BAD, similia rectangulo sub, BD, FY, ad omnia quadrata eiusdem, BAD, sunt vt rectangulum sub, BD, FY, ad quadratum, BD, .i. vt parallelepipedum sub altitudi-

ne

ne hyperbolæ, BAD, basi rectangulo sub, BD, FY, ad parallelepipedum sub eadem altitudine basi quadrato, BD: pariter omnia quadrata hyperbolæ, BAD, ad omnia rectangula hyperbolæ, HMQ, similia rectangulo sub, HQ, EN, habent rationem compositam ex ratione rectanguli sub, VC, XP, ad rectangulum sub, RP, GC, & parallelepipedum sub altitudine hyperbolæ, BAD, & sub quadrato, BD, ad parallelepipedum sub altitudine hyperbolæ, HMQ, basi rectangulo sub, HQ, EN, ergo, ex æquo, omnia rectangula hyperbolæ, BAD, similia rectangulo sub, BD, FY, regula, BD, ad omnia rectangula hyperbolæ, HMQ, similia rectangulo sub, HQ, EN, regula, HQ, habebunt rationem compositam ex ratione rectanguli, sub, VC, XP, ad rectangulum sub, RP, GC, & ex ratione parallelepipedum sub altitudine hyperbolæ, BAD, basi rectangulo sub, BD, FY, ad parallelepipedum sub eadem altitudine, & basi quadrato, BD, & ex ratione huius parallelepipedum ad parallelepipedum sub altitudine hyperbolæ, HMQ, basi rectangulo sub, HQ, EN; .i. compositam ex ratione parallelepipedum sub altitudine hyperbolæ, ABD, basi rectangulo sub, BD, FY, ad parallelepipedum sub altitudine hyperbolæ, HMQ, basi rectangulo sub, HQ, EN, quæ erant ostend.

THEOREMA XII. PROPOS. XIII.

Similium hyperbolarum omnia quadrata, regulis earum basibus, sunt in tripla ratione axium, vel diametrorum earundem.

Sint similes hyperbolæ, BAD, HMQ, earum latera transuersa, GA, XM, quorum sint sexquialteræ, AV, MR, in directum axibus, vel diametris, AC, MP, bases, & regulæ sint, BD, HQ. Dico omnia quadrata hyperbolæ, BAD, ad omnia quadrata hyperbolæ, HMQ, esse in tripla ratione eius, quam habet, AC, ad, MP, iungantur, BA, AD, HM, MQ. Quoniam ergo hyperbolæ sunt similes basis, BD, ad, CA, erit vt basis, HQ, ad, PM, & sunt anguli in clinationis, AC, ad, BD, & MP, ad, HQ, inter se æquales, ergo triangula, BAD, HMQ, sunt similia, & ideo omnia quadrata eorundem, regulis, iisdem, erunt inter se in tripla ratione laterum homologorum .i. eius, quam habet, BD, ad, HQ, vel, AC, ad, MP; quia verò quadratum, BC, ad rectangulum, GCA, est vt hyperbolæ, BAD, rectum latus ad transuerium .i. vt rectum latus ad transuerium hyperbolæ, HMQ, quia ille sunt similes .i. vt qua-

Juxta def.
Apoll. 6.
Con.

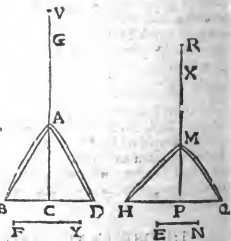
F Cor. 22
l. 2.

dra.

21 primi
C. 1.

Iuxta def.
Comand.
& dicti
ad Schol.
28. 1. 1.

dratum, HP, ad rectangulum, MPX, idèò quadratum, BC, ad re-
ctangulum, ACG, erit vt quadratum, HP, ad rectangulum, MPX;
quia autem ratio, quam habet, BC, ad, CA, & BC, ad, CG, com-
ponit rationem quadrati, BC, ad rectangulum, ACG, & item ra-
tio, quam habet, HP, ad, PM, & HP, ad PX, componit rationem
quadrati, HP, ad rectan-
gulum, MPX, harum
autem rationum com-
ponentium ea, quam
habet, BC, ad, CA, est
eadem, ci, quam ha-
bet, HP, ad, PM, idèò
reliquæ componentiu
erunt eadem .f. BC, ad
CG, erit vt, HP, ad, P
X, est autem etiam, A
C, ad, CB, conuertendo
vt, MP, ad PH, ergo, ex æquali, & con-
uertendo, GC, ad CA, B
C, erit vt, XP, ad PM, &
diuidendo, GA, ad, A



C, erit vt, XM, ad MP, & antecedentium dimidijs .f. VG, ad AC,
erit vt, RX, ad, MP, est autem eadem, VG, ad, GP, vt eadem, R
X, ad, XM, ergo, VG, ad, GC, erit vt, RX, ad, XP, & componen-
do, VC, ad, CG, erit vt, RP, ad PX, est autem, VC, ad, CG, vt omnia
quadrata hyperbolæ, BAD, ad omnia quadrata trianguli, B
AD, & RP, ad PX, vt omnia quadrata hyperbolæ, HMQ, ad omnia
quadrata trianguli, HMQ, ergo omnia quadrata hyperbolæ,
BAD, ad omnia quadrata trianguli, BAD, erunt vt omnia qua-
drata hyperbolæ, HMQ, ad omnia quadrata trianguli, HMQ, &
permutando, omnia quadrata hyperbolæ, BAD, ad omnia qua-
drata hyperbolæ, HMQ, erunt vt omnia quadrata trianguli, BA
D, ad omnia quadrata trianguli, HMO, . . . in tripla ratione eius,
quam habet, AC, ad, MP, quod ostendere opus erat.

1. huius.

FCor. 22.
1. 2.

THEOREMA XIII, PROPOS. XIV.

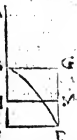
Si exponatur semiperbola, quæ per axem, vel diametrum
integre sit abscissa, habens pro basi dimidiam basis
inte-

integræ hyperbolæ, fiat autem parallelogrammum unum sub dicta basi, & axi, vel diametro, in angulo ab eisdem contento, sumpta basi pro regulâ: Omnia quadrata dicti parallelogrammi ad omnia quadrata trilinei extra hyperbolam constituti, erunt vt idem parallelogrammum unum ad sui reliquum ab eodem dempta semihyperbolâ, vna cum excessu, quo dicta semihyperbolâ superat: dicti parallelogrammi, cum $\frac{1}{2}$. parallelogrammi sub tangente hyperbolæ, & axis, vel diametri hyperbolæ ea positione, ad quam reliqua sit, vt integra axis, vel diameter ad eiusdem latus transfuersum.

Sit ergo axis, vel diameter hyperbolæ, BE, cuius dimidia, BED, latus transfuersum, AB, & in angulo, BED, sub, BE, ED, constitutum parallelogrammum, GE, sit autem, vt, EB, ad, BA, ita, EH, ad, HB, & per, H, ducta, HM, parallela ipsi, ED, quæ summatur, pro regulâ, ita vt sit constitutum parallelogrammum sub, HB, & sub, BG, quæ erit tangens hyperbolam in puncto, B. Dico igitur omnia quadrata, BD, ad omnia quadrata trilinei, BGD, esse
 ut, BD, ad sui reliquum, dempto ab eodem: teni hyperbolâ, BE
 D, vna cum excessu, quo ipsa superat $\frac{1}{2}$. dicti parallelogrammi, B
 D, cum $\frac{1}{2}$. BM. Nam omnia quadrata, BD, ad rectangula sub, B
 D, & semihyperbolâ, BED, sunt vt, BD, ad ipsam, BED, rectan-
 gula verò sub, BD, & BED, æquantur rectangulis sub, BGD, B
 ED, simul cum omnibus quadratis, BED, ergo omnia quadrata,
 BD, ad rectangula sub, BGD, BED, cum omnibus quadratis, BE
 D, erunt vt, BD, ad, BED; sunt autem omnia quadrata, BE, ad
 omnia quadrata, BED, vt, AE, ad compositam ex $\frac{1}{2}$. AB, & $\frac{1}{2}$. B
 E, .i. vt, BE, ad compositam ex $\frac{1}{2}$. BH, & $\frac{1}{2}$. HE, quia, AE, BE,
 proportionaliter diuiduntur in punctis, B, H, .i. vt parallelogram-
 mum, BD, ad compositum ex $\frac{1}{2}$. EM, & $\frac{1}{2}$. HD, .i. vt, BD, ad
 compositum ex $\frac{1}{2}$. BD, & $\frac{1}{2}$. BM, ergo omnia quadrata, BD, ad
 rectangula sub, BGD, BED, erunt vt, BD, ad excessum, quo semihyperbolâ superat $\frac{1}{2}$. BE, cum $\frac{1}{2}$. BM, erant autem omnia qua-
 drata, BD, ad rectangula sub, BGD, BED, vna cum omnibus qua-
 dratis, BED, vt, BD, ad, BE, ergo omnia quadrata, BD, ad
 rectangula bis sub, BGD, BED, vna cum omnibus quadratis, BE

C c c

D, e.

Corollar.
26. 2.C Co. 23.
1. 2.

2. huius

5. 1. 2.

D, erunt vt, BD, ad, BED, vna cum excessu, quo, BED, superat, $\frac{1}{2}$. BD, cum $\frac{1}{2}$. BM, ergo per conuersionem rationis omnia quadrata, BD, ad omnia quadrata, BGD, erunt vt, BD, ad sui reliquum, ab eodem dempta semihyperbola, BED, & excessu, quo eadem superat $\frac{1}{2}$. BD, & $\frac{1}{2}$. BM, quod erat ostendendum.

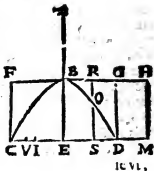
S C H O L I V M.

Hanc Propositionem apposui, vt & nonnullas alias inferius, que licet supponant quadraturam hyperbolæ iam notam, vt & ipsa completè intelligantur non inutiliter tamen aliquantulum scribi existimari, vt si alicuius indistrix illius quadratura in lucem prodeat, illic & hic apposita nota fiant; vel è conuersò, vt per hæc aliquando adiuuenta statim illius quadraturæ nobis innotescat; vide cum scimus, quam rationem habeat, BD, ad semihyperbolam, BED, apprehendemus statim, quam rationem habeant omnia quadrata, BD, ad omnia quadrata trilinei, BGD: Vel è contra, si quando notificabimus, quam rationem habeant omnia quadrata, BD, ad omnia quadrata trilinei, BGD, statim compertum habebimus, quam rationem habeat, BD, ad semihyperbolam; BED, & eius quadratura nota reddetur.

THEOREMA XIV. PROPOS. XV.

Si parallelogrammum, & hyperbola fuerint in eadem basi, & circa eundem axim, vel diametrum, regula basi. Omnia quadrata dicti parallelogrammi ad omnia quadrata figuræ compositæ ex hyperbola, & alterutro trilineorum extra hyperbolam constitutorum, demptis omnibus quadratis assumpti trilinei, erunt vt dictum parallelogrammum ad inscriptam hyperbolam.

Sit hyperbola, CBD, in basi, CD, circa axim, vel diametrum, BE, eius latus tranuersum, AB, in eadem autem basi, CD, & circa eundem axim, vel diametrum, BE, sit parallelogrammum, FD, regula verò, CD. Dico ergo omnia quadrata, FD; ad omnia quadrata figuræ, GBCD, demptis omnibus quadratis trilinei, BGD, alterutrius ex duobus, BFC, BGD, es-



se vt, FD, ad hyperbolā, CBD, quod patet nam, CBD, est figura qualem postulat Prop. 19. Lib. 3. est enim, BE, communis axis, vel diameter, FD, parallelogrammi, & hyperbolæ, CBD, vnde patet. propositum.

THEOREMA XV. PROPOS. XVI.

IN eadem anteced. Propos. figura, si producat, CD, utcunq; in, M, & compleatur parallelogrammum, HC, regula, CM: Omnia quadrata, FM, demptis omnibus quadratis, GM, ad omnia quadrata figuræ, HBCM, demptis omnibus quadratis figuræ, HBDM, erunt vt, FD, ad hyperbolam, CBD.

Patet hoc Theor. nam, CBD, est figura, qualem postulat Prop. 30. Lib. 3. quia, BE, est communis axis, vel diameter, parallelogrammi, FD, & hyperbolæ, CBD, vnde, &c.

COROLLARIUM.

Hinc habetur omnia quadrata, FD ad omnia quad. figuræ, GBCD, demptis omnibus quadratis trilinei, BGD, esse vt omnia quadrata FM, demptis omnibus quadratis, GM, ad omnia quadrata figuræ, HBCM, demptis omnibus quadratis fig. HBDM, quia utraq; sunt, vt, FD, ad hyperbolam, CBD.

THEOREMA XVI. PROPOS. XVII.

IN eadem Prop. 15. figura si intelligamus ductam utcunq; axi, vel diametro, BE, parallelam, RS fiat autē, vt oīa quad. FE, ad oīa quad. semihyperb. BCE, regula, CD, i. vt, AE, ad compositam ex AB, & BE, ta quadratum, CE, ad quadratum; EI, & vt, FE, ad semihyperbolā, BCE, ita esse supponatur, CE, ad EV, ubicunq; cæciet pūctum, V. Dico omnia quadrata, FS, ad omnia quadrata figuræ, RBCS, regula, CD, esse vt quadratum CD, ad quadratum, SE, quadratum, EI, & rectangulum bis sub, VE, ES.

- D. Co. 23. b. 2. Omnia .7. quadrata figuræ, RBCS, secantur per, BE, in omnia quadrata, BS, in omnia quadrata semihyperbolæ, BCE, & in rectangula bis sub, BCE, & sub, BS, ad horum ergo singula comparemus omnia quadrata, FS; hæc igitur ad omnia quadrata, BS, sunt vt quadratum, CS, ad quadratum, SE, pariter omnia quadrata, FS, ad omnia quadrata, FE, sunt vt quadratum, SC, ad quadratum, CE, omnia verò quadrata, FE, ad omnia quadrata, BCE, sunt vt quadratum, CE, ad quadratum, EI, ergo, ex æquali, omnia quadrata, FS, ad omnia quadrata, BCE, erunt vt quadratum, CS, ad quadratum, EI; quod serua. Item omnia quadrata, FS, ad rectangula sub, FE, ER, sunt vt quadratum, CS, ad rectangulum, CES, rectangula verò sub, FE, ER, ad rectang. sub, BCE, ER, sunt vt, FE, ad, BCE, .i. vt, CE, ad, VE, .i. sumpta, ES, communi altitudine, vt rectangulum, CES, ad rectangulum, VES, ergo, ex æquo, omnia quadrata, FS, ad rectangula sub, BCE, ER, erunt vt quadratum, CS, ad rectangulum, VES, ad eadem verò bis sumpta, vt quadratum, CS, ad rectangulum bis sub, VES; ergo, consequentibus simul collectis, omnia quadrata, FS, ad omnia quadrata, BS, ad omnia quadrata, BCE, & ad rectangula bis sub, BCE, ER, idest ad omnia quadrata figuræ, RBCS, erunt vt quadratum, CS, ad quadratum, SE, quadratum, EI, & rectangulum bis sub, VE, ES; qua methodo similiter ostendemus omnia quadrata, FD, ad omnia quadrata figuræ, GBCD, esse vt quadratum, CD, ad quadratum, DE, quadratum, EI, & rectangulum bis sub, VE, ED; & similiter omnia quadrata, FM, ad omnia quadrata figuræ, HBCM, esse vt quadratum, CM, ad quadratum, ME, quadratum, EI, & rectangulum bis sub, VE, EM, quod ostendere opus erat.
14. l. 2.
- Coroll. 1. 26. l. 2.
- D. Co. 23. b. 2.



THEOREMA XVII. PROPOS. XVIII.

IN eadem Prop. 15. figura ostendemus omnia quadrata figuræ, HBCM, demptis omnibus quadratis figuræ, H BDM, regula eadem retenta, ad omnia quadrata figuræ, GBCD, de nptis omnibus quadratis trilinei, BGD, esse vt composita ex, CM, MD, ad, DC.

Hoc

Hoc Theorema demonstrabitur methodo Sect. 2. Collorarij
 29. Prop. 33. Lib. 3. quod similiter quacunq; figura existente, CB
 D, dummodo, BE, sit communis axis eius, & , FD, faciliè collige-
 mus.

THEOREMA XVIII. PROPOS. XIX.

IN eodem Prop. 15. figura ostendemus omnia quadrata
 BCE, regula, CD, ad omnia quadrata figuræ, GBCD,
 demptis omnibus quadratis trilinei, BGD, esse vt quadra-
 tum, IE, ad rectangulum sub, CD, & dupla, VE.

Nam omnia quadrata, BCE, ad omnia quadrata, FE, sunt vt
 quadratum, IE, ad quadratum, EC, item omnia quadrata, FE,
 ad omnia quadrata, FD, sunt vt quadratum, EC, ad quadratum, ^{9.1.2.}
 CD, & tandem omnia quadrata, FD, ad omnia quad. figuræ, GBC
 D: demptis omnib. quadratis trilinei, BGD, sunt vt, FD, ad hyper-
 bolâ, CBD, .i. vt, CE, ad, EV, vel vt, CD, ad duplâ, VE, vel vt qua- ^{15. huius.}
 dratum, CD, ad rectangulû sub, CD, & dupla, VE, ergo, ex æquali,
 omnia quadrata semihyperbolæ, BCE, ad omnia quadrata figu-
 ræ, GBCD, demptis omnibus quadratis trilinei, BGD, erunt vt qua-
 dratum, EI, ad rectangulum sub, CD, & dupla, VE, quod erat de-
 monstrandum.

COROLLARIUM:

QVia verò omnia quadrata figura, GBCD, demptis omnibus qua-
 dratis trilinei, BGD, ad omnia quadrata fig. HBCM, demptis om-
 nibus quadratis figuræ, BHMD, ostensa sunt esse, vt, CD, ad, DMC, .i.
 sumpta communi altitudine dupla, VE, vt rectangulum sub, CD, &
 dupla, VE, ad rectangulum sub, CMD, & dupla, VE, idè etiam, ex ^{18. huius.}
 æquali, omnia quadrata, BCE, ad omnia quadrata figuræ HBCM, de-
 mptis omnibus quadratis figuræ, BHMD, erunt vt quadratum, EI,
 ad rectangulum sub, CMD, & dupla, VE.

SCHOLIUM.

Hæc, & similia possumus circa hyperbolam, eiusque portiones
 contemplari, quorum plurima Lectoris industria examinanda
 relinquo, tum ad nimiam prolixitatem evitandam, tum etiam; quia
 hæc Theorematamini fortè reliquis iucunda erunt, tum completa

eorum notitia in suppositione eiusdem hyperbola quaderaturæ deficiat; si quis tamen adhuc voluerit alia circa eandem contemplari, methodum tenere poterit Lib. 2. & 3. à me prosequutam, mihi verò post hyperbolarum speculationem ad oppositas sectiones, & coniungatas Apolloniij opportunè videtur transcendendum.

THEOREMA XIX. PROPOS. XX.

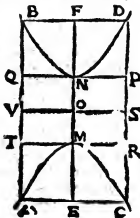
SI ad axim, vel diametrum vtriusq; oppositarum sectionum ordinatim applicentur rectæ lineæ in eisdem terminatæ, ita vt abscissæ per eandem ab axibu, vel diametris versus vertices sint æquales erunt istæ applicatæ parallelogrammi opposita latera, quod parallelogrammum si compleatur, regula applicatarum altera sumpta omnia quadrata parallelogrammi constituti ad reliquum, demptis ab iisdem omnibus quadratis oppositarum hyperbolarum iam per diastas ordinatim applicatas constitutarum, erunt vt recta angulum sub composita ex transuerso latere, & axi, vel diametro alterutrius oppositarum hyperbolarum, & sub composita ex hoc axi, vel diametro, & transuersi lateris, ad rectangulum bis sub transuersi lateris, & sum composita ex eiusdem transuersi lateris, & axi, vel diametro alterutrius oppositarum hyperbolarum, cum quadrati eiusdem axis, vel diametri.

Sint oppositæ sectiones, AMC, BND, quarum latus transuersum sit, NM, communis axis, vel diameter earundem, ad quam hinc inde productam ordinatim applicentur, BD, AC, in sectiones terminatæ, abeudentes versus vertices, NM, axes, vel diametros, FN, ME, hyperbolarum, BND, AMC, (quas pariter oppositas voco) quæ sint inter se æquales, iunganturque, BA, DC, & sit, O, centrum oppositarum sectionum, BND, AMC: Quoniam ergo, FN, ME, sunt æquales, erunt etiam æquales, BD, AC, & sunt equidistantes, quia ad eandem diametrum, vel axim, FE, sunt ordinatim applicatæ, ergo, BA, DC, erunt equidistantes, & BC, parallelogrammum. Dico ergo (regula sumpta altera applicatarum, AC, BD, vt, AC,) omnia quadrata, BC, ad reliquum eorundem demptis omnibus quadratis oppositarum hyperbolarum, BND, AMC, esse vt rectangulum, NEO, ad rectangulum, NOE,

bis,

Elicitur
ex 29. Pri.
Con.

bis, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, EM. Ducantur per, M, O, puncta paralle- 17. Primi
 le, AC, ipse, VS; TR, igitur, TR, tanget sectionem, AMC, & 17. Cor.
 sunt parallelogramma, TC, VC, VD: Omnia ergo quadrata pa-
 rallelogrammi, VC, ad omnia quadrata hyperbolæ, AMC, ha-
 bent rationem compositam ex ea, quam habent omnia quadrata, De fin. 2
 VC, ad omnia quadrata, TC, .i. ex ratione, OE, ad, EM, & ex 11.
 ratione omnium quadratorum, TC, 10. l. 2.
 ad omnia quadrata hyperbolæ, AMC, .i. huius.
 idest ex ea, quam habet, NE, ad co-
 positam ex, OM, & $\frac{1}{2}$. ME, istæ de
 rationes autem .i. quam habet, OE, .i.
 ad, EM, & NE, ad compositam ex, .i.
 OM, & $\frac{1}{2}$. ME, componunt rationem
 rectanguli sub, NE, EO, ad rectangu-
 lum sub, EM, & sub composita ex, O
 M, & $\frac{1}{2}$. ME, ergo omnia quadrata,
 VC, ad omnia quadrata hyperbolæ,
 AMC, sunt vt rectangulum, NEO, ad
 rectangulum sub, EM, & sub compo-
 sita ex, OM, & $\frac{1}{2}$. ME, quod est æqua-
 le rectangulis sub, OM, & ME, & sub
 $\frac{1}{2}$. ME, & sub, ME, .i. rectangulo, OME, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, MF;
 quia verò rectangulum, NEO, æquatur rectangulo, NEO, cum 4. Sec. E.
 quadrato, OE, quadratum verò, OE, æquatur quadratis, EM, M 17. Cor.
 O, cum rectangulis bis sub, EMO, ideo si ab his dempseris semel
 rectangulum, EMO, remanebit de quadrato, OE, rectangulum,
 EMO, cum quadratis, EM, MO, rursus si dempseris $\frac{1}{2}$. quadrati,
 EM, a quadrato, EM, remanebunt $\frac{1}{2}$. quadrati, EM, rectangulū,
 EMO, cum quadrato, MO, rectangulum verò, EMO, cum qua-
 drato, OM, æquatur rectangulo, EOM, vel, EON, quod collectū
 simul cum $\frac{1}{2}$. quadrati, EM, est residuum, quod remanet detracto
 rectangulo, EMO, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, EM, a quadrato, EO, ergo
 detracto rectangulo, EMO, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, EM, a quadrato, E
 O, iuncto rectangulo, EON, .i. a rectangulo, NEO, remanent
 duo rectangula, NOE, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, ME; quia ergo ostensum
 est omnia quadrata, VC, ad omnia quadrata hyperbolæ, AMC,
 esse vt rectangulum, NEO, ad rectangulum, OME, cum $\frac{1}{2}$. qua-
 drati, ME, ideo, per conuersionem rationis, omnia quadrata, V
 C, ad reliquum, demptis ab iisdem omnibus, quadratis hyperbo-
 læ, AMC, erunt vt rectangulum, NEO, ad rectangulum bis sub,
 NOE, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, EM. Eodem pacto, si ducamus per, N,
 ipsam,



6. l. 2.

4. Sec. E.
17. Cor.

ipsam, QP, parallelam ipsi, BD, quæ erit tangens sectionem, BN. D, in puncto, N, ostendens omnia quadrata, BS, ad reliquum, demptis omnibus quadratis hyperbolæ, BND, (sumptis medijs omnibus quadratis, BP,) esse vt rectangulum, MFO, ad rectangulum bis sub, MOF, cum $\frac{1}{2}$ quadrati, FN, .i. vt rectangulum, NE O, ad rectangulum bis sub, NOE, cum $\frac{1}{2}$ quadrati, EM, nam, E M, est æqualis, NF, & ideo etiam, EN, æqualis, MF, &, EO, pariter est æqualis ipsi, OF. Tandem vt vnum ad vnum, ita omnia ad omnia .i. vt omnia quadrata, BS, ad reliquum, demptis omnibus quadratis hyperbolæ, BND, .i. vt rectangulum, MFO, ad rectangulum bis sub, MOF, cum $\frac{1}{2}$ quadrati, FN, ita omnia quadrata, BC, ad reliquum, demptis ab eisdem omnibus quadratis hyperbolicum oppositarum, AMC, BND, est autem, vt rectangulum, MFO, ad rectangulum bis sub, MOF, cum $\frac{1}{2}$ quadrati, FN, ita rectangulum, NOE, ad rectangulum bis sub, NOE, cum $\frac{1}{2}$ quadrati, EM, ergo omnia quadrata, BC, ad reliquum demptis ab eisdem omnibus quadratis oppositarum hyperbolicum, AMC, BND, erunt vt rectangulum sub, NEO, ad rectangulum bis sub, NOE, cum $\frac{1}{2}$ quadrati, ME, quod ostender copus erat.

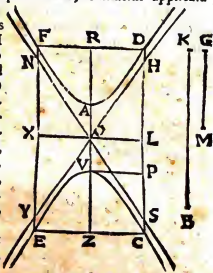
THEOREMA XX. PROPOS. XXI.

SI, veluti in anteced. sit parallelogrammum habens opposita latera, quæ sint ad diametrum transuersam oppositam sectionem ordinatim applicata, quæq; oppositarum hyperbolarum sint bases, insuper describantur earum asymptoti, & regula sit latus transuersum, constituti parallelogrammi omnia quadrata ad omnia quadrata figuræ, quæ continetur lateribus parallelogrammi iam dicti, lateri transuerso parallelis, & portionibus oppositarum sectionum inter eadem latera comprehensis, erunt vt quadratū vniuscuiusvis laterum dicti parallelogrammi lateri transuerso æquidistantium ad quadratum lateris transuersi, vna cum $\frac{1}{2}$ quadrati portionis dicti lateris eiusdem parallelogrammi, quæ inter asymptotos inclusa manet.

Sint oppositæ sectiones, FAD, EVC, quarum latus transuersum, AV, centrum, O, per quod transeant earum asymptoti, YO
H, NOS,

H, NOS, sit autem, veluti in anteced. Prop. constitutum parallelogrammum, FC, cuius opposita latera, FD, EC, sint ad ax m, vel diametrum, AV, in eadem productam, ordinatim applicata,

erunt, DC, FE, ipsi, AV, equi distantes, sint earum portiones inter asymptotos conclusæ, HS, NY, regula sit, AV. Dico ergo omnia quadrata, FC, ad omnia quadrata figuræ, FAD CVE, idest figuræ conclusæ inter latera, FE, DC, & oppositarum sectionum portiones inter eadem manentes, quæ sunt, FAD, EVC, esse, vt quadratû, DC, vel, FE, ad quadratum, AV, cum 1. quadrati, HS, vel, NY. Per puncta ergo, O, V, ducantur, XL, VP, ad ipsam, AV, ordinatim applicatæ, erit igitur, XL, secunda diameter, &, VP, tanget sectionem, EV



C. Quoniam ergo rectangulum, HCS, æquatur quadrato, OV, idest quadrato, LP, rectangulum verò, HCS, æquatur rectangulo, LSC, bis vna cum quadrato, SC, idè, rectangulum, LSC, bis vna cum quadrato, SC, erit æquale quadrato, LP; eodem pacto si intelligamus ipsi, LC, æquidistantem vtcunq; ductam intra parallelogrammum, OP, vtiq; ad sectionem, VC, productam, ostendemus rectangulum bis sub eius portionibus inter, OL, OS, & inter, OS, & sectionem, VC, conclusis, vna cum quadrato eius, quæ inter, OS, & sectionem, VC, clauditur, æquari quadrato eius, quæ manet inter, OL, VP, & sic de reliquis consimiliter sumptis; vnde patebit tandem rectangula sub triangulo, LOS, & figura, OVCS, bis sumpta, vna cum omnibus quadratis figuræ, OVCS, æquari omnibus quadratis, OP, regula, AV, iam supposita, quia ergo omnia quadrata, CO, ad omnia quadrata, OP, sunt vt quadratû, ZO, ad quadratum, OV, idè pariter cum a quadrata, OC, ad rectangula sub triangulo, LOS, & figura, OVCS, bis, vna cum omnibus quadratis figuræ, OVCS, erunt vt quadratum, ZO, ad quadratum, OV; quod serua.

Itiuper omnia quadrata, CO, ad omnia quadrata parallelogrammi, SO, si completetur, essent vt quadratum, CL, ad quadratum,

D d d LS,

11. Secun.
Cor.

9. lib. 2.

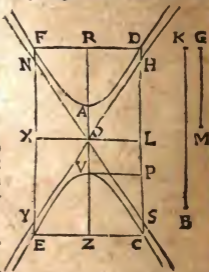
LS, sunt autem omnia quadrata trianguli, OLS, ꝑ. omnium quadratorum parallelogramini, SO, ergo omnia quadrata, CO, ad omnia quadrata trianguli, LOS, erunt vt quadratum, CL, ad ꝑ. quadrati, LS; & quoniam ostensum est omnia quadrata, CO, ad rectangula bis sub triangulo, LOS, & figura, OVCS, vna cum omnibus quadratis figuræ, O

D. Cor.
23. l. 2.

26. l. 2.

9. l. 2.

5. Sec. El.
Elicitur
ex 1. l. 6.
Con. au-
xilio 16.
pri. Con.



OVCS, esse vt quadratum, ZO, vel, CL, ad quadratum, OV, idè omnia quadrata, CO, ad rectangula bis sub triangulo, LOS, & figura, OVCS, vna cum omnibus quadratis tum figuræ, OVCS, tum trianguli, OLS, .i. omnia quadrata, CO, ad omnia quadrata figuræ, OLCV, erunt vt quadratum, CL, ad quadratum, OV, vna cū ꝑ. quadrati, LS, & antecedentium dupla .i. omnia quadrata, XC, ad omnia quadrata figuræ, EVCLX, erunt vt quadratum, CL, ad quadratum, OV, cum ꝑ. quadrati, LS, & adhuc istorum quadrupla .i. omnia quadrata, FC, ad omnia quadrata figuræ, FADCVE, erunt vt quadratum, CL, ad quadratum, OV, vna cum ꝑ. quadrati, LS, vel vt istorum quadrupla, scilicet vt quadratum, CD, ad quadratum, AV, vna cum ꝑ. quadrati, HS, vel, NY, quod ostendere opus erat.

Alter supradictam rationem explicare.

Dico omnia quadrata, FC, ad omnia quadrata figuræ, FADCVE, esse vt quadratum, RZ, compositæ ex transverso latere, AV, & axibus, vel diametris oppositarum hyperbolarum, FAD, EVC, ad quadratum, AV, vna cum rectangulo sub, AZ, & sexquitercia, ZV. Nam ostensum est eadem esse, vt quadratum, CL, vel, ZO, ad quadratum, OV, cum ꝑ. quadrati, LS, & quoniam rectangulum, CSD, cum quadrato, SL, est æquale quadrato, CL, vel, ZO, rectangulum autem, CSD, est æquale quadrato, OV, idè quadratum, LS, erit æquale reliquo quadrato, ZO, dempto quadrato, OV, .i. erit æquale rectangulo sub, OVZ, bis, vna cum quadrato, VZ, .i. rectangulo sub, AVZ, scilicet cum quadrato, VZ, .i. rectangulo sub, AZV, & idè ꝑ. quadrati, LS, erit æquale ꝑ. re-

ctan.

anguli sub, AZ, ZV, .i. erit æquale rectangulo sub, AZ, & 1. ZV, & idè omnia quadrata, FC, ad omnia quadrata figura, FAD CVE, erunt vt quadratum, ZO, ad quadratum, OV, cum rectangulo sub, AZ, & 3. ZV, .i. vt horum quadrupla, nempe, vt quadratum, RZ, ad quadratum, AV, cum rectangulo sub, AZ, & 7. ZV, .i. sub, AZ, & sexquitercia, ZV, quæ ratio sic proponitur explicanda, quæque, vt libet, retineri poterit.

COROLLARIUM:

Hinc patet quadratum dimidiæ eius, quæ lateri transverso oppositum sectionum æquidistanter ducitur, subtenditurque; angulo, qui deinceps est angulo sub asymptotis comprehenso, sectiones contineri æquale esse rectangulo sub composita ex latere transverso, & axi, vel diametro alterutrius constitutarum hyperbolarum per ordinatim applicatas à punctis, quibus dicta subtensa incidit, producta, ipsis oppositis sectionibus, & sub eodem axi, vel diametro, quod patet, veluti ostensum est quadratum, SL, æquari rectangulo, AZV.

THEOREMA XXI. PROPOS. XXII.

Si per vertices oppositarum sectionum rectæ lineæ ordinatim ad eorum axim, vel diametrum applicentur vsque ad asymptotos productæ, quarum extrema ad easdè partes sumpta iungantur rectis lineis, iungentesque vsque ad oppositas sectiones producantur, erunt istæ parallelogrammi opposita latera, quod parallelogrammum si compleatur, regula existente latere transverso: Omnia quadrata constituti parallelogrammi erunt sexquialtera omnium quadratorum figuræ comprehensæ sub lateribus dicti parallelogrammi lateri transverso æquidistantibus, & sub oppositarum sectionum portionibus inter eadem latera conclusis: Omnia verò quadrata dictæ figuræ erunt quadrupla omnium quadratorum triangulorum, qui sub asymptotis & iisdem inclusis portionibus laterum parallelogrammi, transverso lateri æquidistantium continentur.

Sint oppositæ sectiones, FAD, EVC, quarum latus transversum

Ddd. 2. 122

sum sit, AV, centrum, O, asymptoti indefinitè producti, NP, HY, per puncta autem, AV, in duæ ordinatim, NH, YP, productæ vsq; ad asymptotos, in punctis, N, H, Y, P, ipsis incidentes, quæ sectiones tangent, deinde iunctis, NY, HP, producantur ipsæ tangentibus vsq; ad sectiones illis in punctis, F, E, C, D,

37. Secu.
Con.

occurrentes, iunganturque, FD, EC, & per, O, ad ipsam, AV, ordinatim applicetur, XL, incidens, F, E, in, X, &, DC, in, L, quæ erit secunda diameter, & producat, AV, indefinitè incidens ipsis, FD,

38. Secu.
Con.

EC, in punctis, R, Z, erit ergo, FC, parallelogrammum, nam rectangulum, YFN, .i. rectangulum, EY, est æquale quadrato, AO, idest rectangulo, CS, HD, item quadratum; NX, est æquale quadrato,

4. Secu.
B.

HL, & iteò rectangulum, ENF, cum quadrato, NX, .i. quadratum, XF, erit æquale rectangulo, CHD, cum quadrato, LH, .i. quadrato, LD, & ideò, XF, erit æqualis ipsi, LD, & eius dupla, F, E, æqualis duplæ, CD, & eidem parallela, unde, FD, erit, EC, parallela, & ambæ ordinatim ad axim, vel diametrum, RZ, ordinatim applicatæ, & ideò in, R, Z, bifariam lætæ, &, FC, erit parallelogrammum, sit regula latus transversum, AV. Dico nunc

39. huius.

omnia quadrata parallelogrammi, FC, esse sexquialtera omnium quadratorum figuræ, FADCVE; & hæc esse quadrupla omnium quadratorum triangulorum, NOY, HOP; nam omnia quadrata, FC, ad omnia quadrata figuræ, FADCVE, ostensa sunt esse, ut quadratum, DC, ad quadratum, AV, cum 3. quadrati, HP, est autem quadratum, HP, æquale quadrato, AV, & ideò sunt, ut quadratum, DC, ad quadratum, AV, cum 3. quadrati, HP, vel ut quadratum, RZ, ad quadratum, AV, cum 3. quadrati, AV. Producantur nunc asymptoti, NP, HY, versus, EC, cui producta incidant in, I, est ergo rectangulum, SEI, æquale quadrato, YV,

40. Secu.
Con.

.i. quadrato, EZ, & ideò rectangulum, SEI, cum quadrato, FZ, duplum est quadrati, EZ, vel quadrati, YV, est autem rectangulum, SEI, cum quadrato, EZ, æquale quadrato, SZ, & ideò quadratum, SZ, duplum est quadrati, YV, est autem, ut quadratum, SZ, ad quadratum, YV, ita quadratum, ZO, ad quadratum, OV, ergo quadratum, ZO, erit duplum quadrati, OV, vel eorum quadrupla .i. quadratum, ZR, duplum quadrati, AV; quia vero dictum est omnia quadrata, FC, ad omnia quadrata figuræ, FADCVE, esse ut quadratum, RZ, ad quadratum, AV, cum 3. quadrati, AV, .i. ut quadratum, RZ, ad 3. quadrati, AV, & est quadratum, RZ, duplum quadrati, AV, ideo quadratum, RZ, erit 6. quadrati, AV,

ergo

ergo quadratum, RZ, ad quadratum, AV, cum $\frac{1}{2}$ quadrati, AV, erit vt $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{2}$. i. vt 6. ad 4. i. in ratione sexquialtera, ergo omnia quadrata, FC, ad omnia quadrata figurę, FADCVE, erunt in ratione sexquialtera.

Igitur conuertendo omnia quadrata figurę, FADCVE, ad omnia quadrata, FC, erunt in ratione subsexquialtera, i. vt 4. ad 6. sunt autem omnia quadrata, FC, ad omnia quadrata, NP, vt quadratum, ZR, ad quadratum, AV, idest dupla i. vt 6. ad 3 & omnia quadrata, NP, sunt tripla omnium quadratorum in triangulorum, NYO, OHP, i. sunt ad illa, vt 3. ad 1. ergo ex equali, omnia quadrata figurę, FADCVE, ad omnia quad. triangulorum, NYO, OHP, erunt vt 4. ad 1. . . eorum quadrupla, quę erant ostendenda.

COROLLARIUM I.

Quoniam Verò in Propos. antec. ostensum est ac in eius figura, omnia quadrata, FC, ad omnia quadrata figurę, FADCVE, esse vt quadratum, D, ad quadratum, AV, cum $\frac{1}{2}$ quadrati, HS, & quia omnia quadrata, ZL, ad omnia quadrata trianguli, ONL, vel eorum quadrupla . . . omnia quadrata, RC ad omnia quadrata trianguli, SOH, ostensa sunt sicut vt quadratum C, ad quadrati LS. vel vt quadratum, CD, ad quadrati H, & sic eorum dupla .s. vt quadratum LC, ad quadrati, SH ita omnia quadrata, FC, ad omnia quadrata triangulorum, NOY, HOS, erant autem omnia quadrata, FC, ad omnia quadrata figurę FADCVE vt quadratum, DC, ad quadratum, AV, cum $\frac{1}{2}$ quadrati, HS, ergo omnia quadrata, FC, ad reliquum, demptis omnibus quadratis triangulorum NOY, HOS, ab omnibus quadratis figurę FADCVE erunt vt quadratum DC, ad quadratum, AV; & idem in præcædenti Propos. omnia quadrata, FC, ad omnia quadrata figurę FADCVE demptis ab iisdem omnibus quadratis erant vt quadratum, HOP, erant vt quadratum, RZ, ad quadratum, AV, idest dupla.

COROLLARIUM II.

Ex præcædenti deductum.

Patet etiam nos posse inuenire parallelogrammum circumscrip-
tum sectionibus oppositis, veluti, FC, idest ita quod eius duo
opposita latera sint bases oppositarum hyperbolarum, & reliqua duo
latera

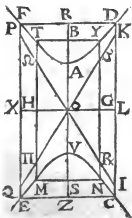
lateri transuerso parallela, quod sumatur pro regula, ita inquam, ut omnia quadrata descripti parallelogrammi ad omnia quadrata figura dictis lateribus, quæ transuerso lateri æquidistant, & ab iisdem sectionum oppositarum in clusis portionibus comprehensa, demptis omnibus quadratis triangulorum sub asymptotis, & ab ijs inclusis portionibus laterum, parallelogrammi transuerso lateri æquidistantium, habeant datam rationem, dummodo ea sit maioris inæqualitatis: Sit in figura Propos. 21. data ratio maioris inæqualitatis, quam habet, KB , ad GM , & supponatur ductam fuisse, FE , æquidistantem lateri transuerso, AV , ita ut quadratum, FE , ad quadratum, AV , sit ut, KB , ad GM , & constructam fuisse figuram, vel utriusque factum est, patet igitur, quia omnia quadrata, FC , ad omnia quadrata figure, $FADCFE$, sunt ut quadratum, FE , ad quadratum, AV , ex Coroll. antec. demptis tamen ab omnibus quadratis dictæ figure, omnibus quadratis triangulorum, NOY , HOS , quod idè ad eadem erunt in ratione data. s. in ea quam habet, KB , ad GM .

THEOREMA XXII. PROPOS. XXII.

Siduo parallelogramma utcumq; sectionibus oppositis circumscripta fuerint modo solito, habentia scilicet duo opposita latera, quæ sint oppositarum hyperbolarum bases, & reliqua duo lateri transuerso æquidistantia, regula vna distarum basium: Omnia quadrata vnus parallelogrammi, demptis omnibus quadratis oppositarum hyperbolarum communes cum eo bases habentium, ad omnia quadrata alterius parallelogrammi, demptis omnibus quadratis oppositarum hyperbolarum communes cum eo bases habentium, erunt ut parallelepipedum sub altitudine axi, vel diametro vnus hyperbolarum, cuius est communis basis cum parallelogrammo primò dicto, basi rectangulo sub dimidia transuersi lateris, & sub composita ex eadem dimidia, & axi, vel diametro dictæ hyperbolæ, vna cum quadrati eiusdem axis, vel diametri, ad parallelepipedum sub altitudine axi, vel diametro hyperbolæ, cuius est communis basis cum parallelogrammo secundò dicto, basi rectangulo sub dimidia transuersi lateris, & sub composita ex eadem dimidia, & axi, vel diametro hyperbolæ.

bolæ postremò dictæ, vna cum quadrati eiusdem axis, vel diametri.

Sint oppositis sectionibus, FAD, EVC , quorum latus tranſuerſum, AV , centrum, O , circumſcripta parallelogramma utcuſque FC, TN , quorum duo oppoſita latera ſint baſes oppoſitarum hyperbolarum, FAD, EVC , nempe hyperbolarum, FAD, EVC , & TY, MN , hyperbolarum, TAY, MVN , nempe ſint ad axim, vel diametrum tranſuerſam, AV , ordinatim applicata, & reliqua latera, ad ſecundum axim, vel diametrum, quæ ſit, XL , pariter ordinatim applicata, regula autem vna dictarum baſium, ut, EC . Dico ergo omnia quadrata, FC , demptis omnibus quadratis oppoſitarum hyperbolarum, FAD, EVC , ad omnia quadrata, TN , demptis omnibus quadratis oppoſitarum hyperbolarum, TAY, MVN , eſſe vt parallelepipedum tub altitudine, ZV , baſi rectangulo, VOZ , cù



¶ quadrati, ZV , ad parallelepipedum tub altitudine, SV , baſi rectangulo, VOZ , cum ¶ quadrati, SV : Omnia ¶ quadrata, FC , demptis omnibus quadratis oppoſitarum hyperbolarum, FAD, EVC , ad omnia quadrata, TN , demptis omnibus quadratis oppoſitarum hyperbolarum, TAY, MVN , habent rationem compoſitam ex ea, quam habeat omnia quadrata, FC , demptis omnibus quadratis oppoſitarum hyperbolarum, FAD, EVC , ad omnia quadrata, FC , & ex ratione horum ad omnia quadrata, TN , & ex ratione iſtorum ad omnia eorundem quadrata, demptis omnibus quadratis oppoſitarum hyperbolarum, TAY, MVN ; verum omnia quadrata, FC , demptis omnibus quadratis oppoſitarum hyperbolarum, FAD, EVC , ad omnia quadrata, FC , ſunt vt rectangulum, AOZ , b-s, cum ¶ quadrati, ZV , ad rectangulum, AVZ : Omnia item quadrata, FC , ad omnia quadrata, TN , habent rationem compoſitam ex ratione, FE , ad, TM , vel, EX , ad, MH , ſive, ZO , ad, OS , & ex ratione quadrati, EC , ad quadratum, MN , ſive rectanguli, AVZ , ad rectangulum, AVO : Tandem omnia quadrata, TN ad eadem demptis omnibus quadratis oppoſitarum hyperbolarum, TAY, MVN , ſunt vt rectangulum, AVO , ad rectangulum, AVS , bis, cum ¶ quadrati, SV , habemus ergo has

20. huius.

Defin. 12.

1. 1.

20. huius.

qua-

quatuor rationes primò dictam rationem componentes .i. ratione
 rectanguli, AOZ, bis, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, VZ, ad rectangulum, AZ
 O, rationem, ZO, ad ZO; ratione, n. rectanguli, AZV, ad rectan-
 gulum, ASV, & tandem rationem rectanguli, ASO, ad rectangu-
 lum, AO; bis cum $\frac{1}{2}$. quadrati, SV, harum autem rationum illa,
 quam habet rectangulum, AZV, ad recta-
 gulum, ASV, componitur ex ratione, Z
 V, ad, VS, & ex ratione, ZA, ad, AS, ha-
 bemus ergo quinque rationes componen-
 tes rationem primò dictam, sit igitur pri-
 mo loco disposita ratio, quam habet re-
 ctangulum bis sub, AOZ, cum $\frac{1}{2}$. quadra-
 ti, ZV, ad rectangulum, AZO; si rursus
 assumamus ex cæteris quatuor rationibus
 eam, quam habet, ZA, ad, AS, vel (sum-
 pta, ZO, communi altitudine) quam ha-
 bet rectangulum, AZO, ad rectangula-
 sub, ZO, AS, quæ habeatur secundo loco;
 & insuper si ex cæteris tribus rationibus
 sumamus, quam habet, ZO, ad, OS, vel
 (sumpta, AS, communi altitudine) quam
 habet rectangulum sub, ZO, AS, ad rectangulum, ASO, quæ sit
 posita tertio loco, & tandem si teneamus quarto loco eam, quam
 habet rectangulum, ASO, ad rectangulum sub, AOS, bis, $\frac{1}{2}$. qua-
 drati, SV, habebimus has quatuor hoc ordine dispositas conseqü-
 ter rationes .i. rationem rectanguli sub, AOZ, bis cum $\frac{1}{2}$. quadra-
 ti, ZV, ad rectangulum, AZO, rationem huius ad rectangulum
 sub, AS, OZ, rationem huius ad rectangulum, ASO, & tandem
 rationem huius ad rectangulum, AOS, bis, vna cum $\frac{1}{2}$. quadrati,
 SV, quæ component rationem primæ ad ultimam .i. eam, quam
 habet rectangulum, AOZ, bis vna cum $\frac{1}{2}$. quadrati, ZV, ad recta-
 gulum, AOS, bis, vna cum $\frac{1}{2}$. quadrati, SV, vel quam habent hor-
 rum dimidia .i. rectangulum, AOZ, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, V, Z, ad recta-
 gulum, AOS, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, SV, illas ergo quatuor rationes in
 solam hanc redeimus; huic si iungamus eam, quam habet, ZV,
 ad, VS, quæ erat quinta ratio, quæ residua erat, componetur ex
 dictis quinque rationibus hæc sola .i. quam habet parallelepipedum
 sub altitudine, ZV, basi rectangulo, AOZ, vel, VOZ, cum $\frac{1}{2}$. qua-
 drati, ZV, ad parallelepipedum sub altitudine, SV, basi rectangu-
 lo, AOS, vel, VOS, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, SV, quæ erit ea, quam habe-
 bunt omnia quadrata, FC, deimptis omnibus quadratis opposita-
 rum



Defin. 12.
 l. 1.

rum hyperbolarum, FAD, EVC, ad omnia quadrata, TN, demp-
tis omnibus quadratis oppositarum hyperbolarum, TAY, MVN,
quod, &c.

THEOREMA XXIII. PROPOS. XXIV.

IN eadem antecedentis figura, regula sumpta, DC, ostē-
demus omnia quad. fig. FADCVE, ad omnia quadra-
ta figuræ, TAYNVN, esse vt parallelepipedum sub, XL, &
quadrato, RZ, cum duplo quadrati, AV, ad parallelepepe-
dum sub, HG, & quadrato, BS, cum duplo quadrati, AV.

Omnia namque quadrata figuræ, FADCVE, ad omnia quadra-
ta figuræ, TAYNVN, habent rationem compositam ex ea, quam
habent omnia quadrata figuræ, FADCVE, ad omnia quadrata,
FC, .i. ex ratione quadrati, AV, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, KI, (quæ sit
portio, DC, capta inter asymptotos, qui sint, PI, KQ, ducti per,
O, secantes, YN, in, & B, FE, in, P, Q, & TM, in, Ω , P,) ad
quadratum, DC, & ex ratione omnium quadratorum, FC, ad om-
nia quadrata, TN, quæ est composita ex ea, quam habet quadra-
tum, DC, ad quadratum, YN, & ex ea, quam habet, EC, ad, MN,
& tandem ex ratione omnium quadratorum, TN, ad omnia qua-
drata figuræ, TAYNVN, . . . ex ratione quadrati, YN, ad quadra-
tum, AV, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, & B, porro ex his rationibus compo-
nentibus ea, quam habet quadratum, AV, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, KI, ad
quadratum, DC, . . . tem quadratum, DC, ad quadratum, YN, &
quadratum, YN, ad quadratum, AV, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, & B, compo-
nunt rationem quadrati, AV, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, KI, ad quadra-
tum, AV, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, & B, vel triplicatis terminis, compo-
nunt rationem trium quadratorum, AV, cum quadrato, KI, ad
tria quadrata, AV, cum quadrato, & B, vel componunt rationem
trium quadratorum, OV, cum quadrato, LI, ad tria quadrata, O
V, cum quadrato, GR; quadratum autem, LI, est æquale rectan-
gulo, OVZ, bis cum quadrato, VZ, & quadratum, GR, æquale
rectangulo, OVS, bis cum quadrato. VS; nam rectangulum, KC
I, ex prop. 11. Lib. 2. Conicorum æquatur quadrato, OV, & idē
rectangulum, KCI, cum quadrato, LI, æquatur quadrato, LC, vel
quadrato, OZ, vnde quadratum, LI, remanet æquale rectangulo
sub, OVZ, bis cum quadrato, VZ; & sic etiam quadratum, GR,
concludetur æquale eisdem rectangulo bis sub, OVS, cum quadrato,

Ecc

Vj,

VS; componunt ergo rationem trium quadratorum, OV, cum rectangulo, OVZ, bis, & quadrato, VZ, .i. duorum quadratorum, OV, cum quadrato, OZ, ad tria quadrata, OV, cum rectangulo, OVS, bis & quadrato, VS, .i. ad duo quadrata, OV, cum quadrato, OS, hæc autem ratio simul cum ea, quæ remansit .i. cum ratione, EC, ad, MN, componit rationem parallelepipedum sub, EC, & basi quadrato, ZO, cum duplo quadrati, OV, ad parallelepipedum sub, MN, & basi quadrato, SO, cum duplo quadrati, OV; vel parallelepipedum sub, XL, basi quadrato, RZ, cum duplo quadrati, AV, ad parallelepipedum sub, HG, basi quadrato, BS, cum duplo quadrati, AV, quod nobis erat ostendendum.

THEOREMA XXIV. PROPOS. XXV:

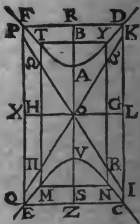
IN eadem figura Prop. 23. ostendemus omnia quadrata figuræ, FADCVE, (regula eadem, AV,) demptis omnibus quadratis triangulorum KOI, POQ, ad omnia quadrata figuræ, TAYNVM, demptis omnibus quadratis triangulorum, & OQ, $\Omega O \Pi$, esse vt, EC, ad, MN, vel, XL, ad, H, qui sunt secundi axes, vel diametri.

Nam omnia quadrata figuræ, FADCVE, demptis omnibus quadratis triangulorum, KOI, POQ, ad omnia quadrata figuræ, TAYNVM, demptis omnibus quadratis triangulorum, & OQ, $\Omega O \Pi$, habent rationem compositam ex ratione omnium quadratorum figuræ, FADCVE, demptis omnibus quadratis triangulorum, KOI, POQ, ad omnia quadrata, FC, .i. ex ratione quadrati, AV, ad quadratum, DC, item ex ratione omnium quadratorum, FC, ad omnia quadrata, TN, quæ est composita ex ratione quadrati, DC, ad quadratum, YN, & ex ratione, CE, ad, NM, & tandem componitur ex ratione omnium quadratorum, TN, ad omnia quadrata figuræ, TAYNVM, demptis omnibus quadratis triangulorum, &

Coroll. 1.
22. huius.

Coroll. 1.
22. huius.

OQ, $\Omega O \Pi$, .i. ex ea, quam habet quadratum, YN, ad quadratum, AV, ex his autem rationibus illa, quam habet quadratum, AV, ad qua-



quadratum, DC, quadratum, DC, ad quadratum, YN, & quadratum, YN, ad quadratum, AV, componunt rationem quadrati, AV, ad quadratum, AV, quæ simul cum ratione ipsius, EC, ad MN, componit rationem parallelepipedii sub, EC, & quadrato, AV, ad parallelepipedum sub, MN, & quadrato, AV, quæ tandè est eadem ei, quam habet, EC, ad, MN, quia illa sunt parallelepipedum in eadem basi, & ideo omnia quadrata figuræ, FADCVE, demptis omnibus quadratis triangulorum, KOI, POQ, ad omnia quadrata figuræ, TAYNVM, demptis omnibus quadratis triangulorum, & OQ, OPI, erum vt, EC, ad, MN, vel, XL, ad, HG, quod demonstrare opus erat.

D. G. n. 11.
lib. 2.

THEOREMA XXV. PROPOS. XXVI.

A Sumpta iterum figura Propos. 23. dimisso quouis parallelogrammorum, FC, TN, vt dimisso, TN, cæteris iisdem manentibus, ostendemus omnia quadrata, FC, demptis omnibus quadratis oppositarum hyperbolarum, FAD, EVC, regula, EC, ad omnia quadrata figuræ, FADCVE, regula, DC, vel, AV, habere rationem compositam ex ratione reſt anguli, AOZ, bis cum quadrati, VZ, ad reſt angulum, AZO, & ex ratione reſt anguli sub, DC, vel, RZ, & sub EC, ad quadratum, AV, cum quadrati, KI, vel cum reſt angulo sub, AZ, & reſt angulo tertio, ZV.

Omnia namq; quadrata, FC, demptis omnibus quadratis oppositarum hyperbolarum, FAD, EVC, regula, EC, ad omnia quadrata figuræ, FADCVE, regula, AV, habent rationem compositam ex ratione omnium quadratorum, FC, demptis omnibus quadratis oppositarum hyperbolarum, FAD, EVC, ad omnia quadrata, FC, communi regula, EC, .i. ex ratione reſt anguli, AOZ, bis cum quadrati, VZ, ad reſt angulum, AZO, & ex ratione omnium quadratorum, FC, regula, EC, ad omnia quadrata, FC, regula, CD, vel, AV, .i. ex ratione, EC, ad, CD, vel reſt anguli sub, EC, CD, ad quadratum, CD, & tandem componitur ex ratione omnium quadratorum, FC, regula, DC, ad omnia quadrata figuræ, FADCVE, regula eadem, DC, .i. ex ratione quadrati, DC, ad quadratum, AV, cum quadrati KI, duæ veſo rationes, scilicet reſt anguli sub, ED, C, ad quadratum, CD, & quadrati, CD, ad quadratum, AV, cum quadrati, KI, componunt ratio-

10. huius.

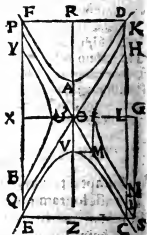
19. L. 2.

21. huius.

Ecc a nem

nem rectanguli, DC, CE, vel sub, RZ, EC, ad quadratum, AV, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, kl, ergo omnia quadrata, FC, demptis omnibus quadratis oppositarum hyperbolarum, FAD, EVC, regula, EC, ad omnia quadrata figuræ, FADCVE, regula, DC, vel, AV, habebunt rationem compositam ex ratione rectanguli, AOZ, bis cum $\frac{1}{2}$. quadrati, kl, ad rectangulum, AZO, & ex ratione rectanguli sub, RZ, EC, ad quadratum, AV, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, kl, si, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, kl, quæ sunt $\frac{1}{2}$. quadrati, LI, .i. rectanguli, AZV, vnde rectangulum sub, AZ, & sextiquertia, ZV, erit æquale tertie parti quadrati, kl, erit igitur dicta ratio composita ex ratione primo dicta, & ex ratione rectanguli sub, RZ, EC, ad quadratum, AV, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, kl, siue cum rectangulo sub, AZ, & sextiquertia, ZV, quod ostendere propositum erat.

Corol. 2.
huius.



THEOREMA XXVI. PROPOS. XXVII.

SI in eadem anteced. Proposit. figura intelligantur descriptæ sectiones, quæ ab Apollonio coniugatæ vocantur, quæ sint, Y&B, HTN, coniugatæ prædictis, FAD, EVC, habentes scilicet quadratum transuersi lateris, & T, æquale rectangulo sub alio transuerso latere, AV, & linea iuxta quam possunt, siue latere recto oppositarum sectionû, FAD, EVC, & regula sit DC, latus parallelogrammi, FC, expositis primò sectionibus oppositis, FAD, EVC, circumscriptum, æquidistans earum lateri transuerso, AV: Omnia quadrata, FC, ad omnia quadrata figuræ, FADCVE, demptis omnibus quadratis oppositarum hyperbolarum, Y&B, HTN, quæ portionibus laterum, FE, DC, inter oppositas sectiones, Y&B, HTN, existentium constituuntur, erunt vt parallelepipedum sub dimidia basis primò expositarum alterutrius, hyperbolarum, vt sub, ZC, & sub qua-

drato, ZS, (quæ habetur, productis, ZC, OI, donec sibi occurrant, vt in, S,) ad parallelepipedum bis sub, LT, & quadrato, TO, cum cubo, TO, & amplius. eiusdem cubi-

Producatur, OL, indefinitè, cui occurrat, SG, ducta per, S, ipsi, ZO, æquidistans, & occurrit in puncto, G, & per, T, ipsa, MT, æquidistans ducatur ipsi, AV, & per, V, VM, æquidistans ipsi, V T, quæ tangent sectiones in punctis, VT, & conuenient inter se in asymptoto, OS, vt in, M, vt ex pri. Secundi Conicorum elici potest: Omnia ergo quadrata, FC, ad omnia quadrata figuræ; FADCVE, vel omnia quadrata, RC, ad omnia quadrata figuræ; 2. huius. DAVC, sunt vt quadratum, DC, ad quadratum, AV, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, KI, siue vt quadratum, CL, ad quadratum, OV, vel, TM, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, LI, quia, verò quadratum, CL, vel, SG, ad quadratum, MT, est vt quadratum, GO, ad quadratum, OT, & quadratum, GS, ad quadratum, LI, est vt quadratum, GO, ad quadratum, OL, ideò quadratum, SG, ad quadratum, TM, vel, OV, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, LI, erit vt quadratum, GO, ad quadratum, OT, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, OL, siue vt triplum quadrati, GO, ad quadratum, LO, cum tribus quadratis, OT, vel sumpta, LO, communi altitudine, vt parallelepipedum sub, LO, & triplo quadrati, OG, ad parallelepipedum sub, LO, & quadrato, OL, cum triplo quadrati, OT, sic igitur erunt omnia quadrata, RC, ad omnia quadrata figuræ, DAVC, quod serua.

Insuper omnia quadrata, RC, ad omnia quadrata trianguli, KOI, sunt vt quadratum, DC, ad $\frac{1}{2}$. quadrati, KI, vel vt quadratum, CL, vel quadratum, GS, ad $\frac{1}{2}$. quadrati, LI, vel vt quadratum, GO, ad $\frac{1}{2}$. quadrati, OL, vel vt triplum quadrati, GO, ad quadratum, OL, vel, sumpta, OL, communi altitudine, vt parallelepipedum sub, LO, & triplo quadrati, CG, ad parallelepipedum sub, LO, & quadrato, LO, .i. ad cubum, LO. Vltius omnia quadrata trianguli, KOI, ad omnia quadrata hyperbolæ, HTN, sunt vt cubus, LO, ad parallelepipedum ter sub, OT, & quadrato, TL, cū cubo, TL, ergo, ex æquali, omnia quadrata, RC, ad omnia quadrata hyperbolæ, HTN, erunt vt parallelepipedum sub, LO, & triplo quadrati, OG, ad parallelepipedum ter sub, OT, & quadrato, TL, cum cubo, TL, erant autem omnia quadrata, RC, ad omnia quadrata figuræ, DAVC, vt idem parallelepipedum sub, LO, & triplo quadrati, OG, ad parallelepipedum sub, LO, & quadrato, OL, cum triplo quadrati, OT, ergo omnia quadrata, RC, ad omnia quadrata figuræ, DAVC, demptis omnibus quadratis hyper- 3. huius.

hyper-

hyperbolæ, HTN, erunt vt parallelepipedum sub, LO, & triplo quadrati, OG, ad reliquum, quod habetur, dempto parallelepipedo ter sub, OT, & quadrato, TL,

35. l. 1. cum cubo, TL, à parallelepipedo sub, LO, & quadrato, LO, .i. a cubo, LO, & parallelepipedo sub, LO, & triplo quadrati, OT, verum, quia cubus, LO, æquatur parallelepipedis ter sub, OT, & quadrato, TL; ter sub, TL, & quadrato, TO, cum cubis, OT, TL, ideò si a cubo, OL, dematur parallelepipedum ter sub, OT, & quadrato, TL, cum cubo, TL, remanebit parallelepipedum ter sub, LT, & quadrato, TO, cum cubo, TO, quod iungendum est parallelepipedo sub, LO, & triplo quadrati, TO, habebimus ergo pro quæsito residuo parallelepipedum

36. l. 1.

sub, LO, & quadrato, OT, ter .i. sub, LT, & quadrato, TO, ter, cum tribus cubis, TO, & adhuc parallelepipedum sub, LT, & quadrato, TO, ter cum cubo, TO, .i. habebimus parallelepipedum sub, LT, & quadrato, TO, sexies, cum quatuor cubis, TO, pro quæsito residuo, igitur omnia quadrata, RC, ad omnia quadrata figuræ, DAVC, demptis omnibus quadratis hyperbolæ, HTN, vel omnia quadrata, FC, ad omnia quadrata figuræ, FADCVE, demptis omnibus quadratis oppositarum hyperbolarum, Y&B, HTN, erunt vt parallelepipedum sub, LO, & triplo quadrati, OG, ad parallelepipedum sexies sub, LT, & quadrato, TO, cum quatuor cubis, TO, .i. vt parallelepipedum sub, LO, vel, ZC, & quadrato, OG, vel, ZS, ad parallelepipedum bis sub, LT, & quadrato, TO, cum cubo, TO, & amplius eiuſdem cubi, TO, nam hæc sunt eorundem subtripla, vt consideranti faciliè patebit, quod erat ostendendum.



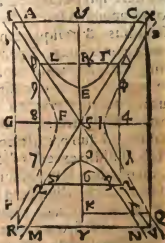
THEOREMA XXVII. PROPOS. XXVIII.

SI, expositis sectionibus coniugatis, parallelogrammū describatur, habens latera earundem axibus, vel diametris coniugatis parallela, in earum asymptotis conuen-

nientia, eafdemq; oppositas fectiones diuidentia' alterutro axium, vel diametrorum, fumpto pro regula: Omnia quadrata defcripti parallelogrammi ad omnia quadrata figurę duobus oppofitis lateribus parallelogrammi regulę æquidistantibus, & reliquorum laterum portionibus inter fectiones coniugatas, & prædicta latera conclusis, & ipsis coniugatis fectionibus, comprehenfæ, demptis ab iisdem omnibus quadratis oppofitarum hyperbolarum, quarum latus tranfuerfum non fuit fumptum pro regula, erunt vt cubus dimidij lateris parallelogrammi regulę non æquidistantis, ad duo parallelepipedum, quorum vnum continetur sub dimidio excessus dicti lateris super basim hyperbolę, quam idem latus abfcindit, & sub quadrato dimidij eiusdem lateris, aliud verò sub dimidio basis dictę hyperbolę, & sub $\frac{1}{4}$. quadrati eiusdem, cum quadrato dimidij lateris tranfuerfi, quod non est regula, ab his tamen dempto parallelepipedo sub dimidio lateris tranfuerfi, quod non est regula, & sub quadrato axis, vel diametri alterutrius hyperbolarum, quarum est latus tranfuerfum, vna cū $\frac{1}{4}$. cubi eiusdem axis, vel diametri.

Sint igitur expofitę fectiones coniugatę, AEC, MON, PIQ, BFH, quarum communes afymptoti indefinitę cum fectionibus funt producti, qui funt, TSV, RSX, funt autem earum axes, vel diametri coniugatę, EO, FI, quarum alterutra fit fumpta pro regula, vt, FI, fit vterius defcriptum parallelogrammum, TV, latera habens æquidistantia ipsis, EO, FI, & in afymptotis, TV, XR, cõuenientia in punctis, T, R, V, X, ipsafq; fectiones diuidentia, ita vt, quę inter fectiones manent, funtq; hyperbolarum bases funt, PQ, NM, HB, AC, quorum æquidistantia erunt æqualia. Dico ergo omnia quadrata parallelogrammi, TV, ad omnia quadrata figurę inte, TX, RV, TB, HR, VQ, PX, & fectiones, BFH, PIQ, cõclusę, demptis ab iisdẽ omnibus quadratis oppofitarum hyperbolarum, AEC, MON, esse vt cubus dimidij, XV, ad parallelepipedum sub, QV, & quadrato dimidij lateris, XV, vna cum parallelepipedo sub dimidio, PQ, & sub composito ex $\frac{1}{4}$. quadrati eiusdem dimidij, PQ, & quadrato, SO, ab his tamen dempto parallelepipedo sub, SO, & quadrato reliquę ad medietatem, XV, cum

$\frac{1}{2}$ cubi eiusdem reliquæ. Producantur, FI, EO, hinc inde vsq; ad
 latera, TX, XV, VR, RΓ, quibus occurrant in punctis, &, Z, Y,
 G, in quibus illa bifariam diui-
 duntur, & per, Q, ducatur, QK,
 æquidistans ipsi, RV: Omnia
 igitur quadrata parallelogram-
 mi, SV, ad omnia quadrata ngu-
 re, SIQK; habent rationem com-
 positam ex ea, quam habent om-
 nia quadrata, SV, ad omnia qua-
 drata, SQ, .i. ex ratione, YS, ad,
 Sk, & ex ratione omnium qua-
 dratorum, SQ, ad omnia qua-
 drata figuræ, SIQk, .i. ex ratione
 quadrati, KQ, ad quadratum, SI,
 cum $\frac{1}{2}$ quadrati, kD, .i. ex ra-
 tione quadrati, YS, ad quadratū
 SO, cum $\frac{1}{2}$ quadrati, SK, due
 autem ratios, YS, ad, Sk, &



Defin. 12.
11.

10. l. 2.
a. huius.

19. l. 2.

24. l. 2.

9. huius.

quadrati, YS, ad quadratum, SO, cum $\frac{1}{2}$ quadrati, Sk, componūt
 rationem cubi, YS, ad parallelepipedum sub, kS, & composito ex
 quadrato, SO, & $\frac{1}{2}$ quadrati, Sk, ergo omnia quadrata, SV, ad
 omnia quadrata figuræ SIQk, etunt vt cubus, YS, ad parallelepi-
 pedum sub, kS, & composito ex quadrato, SO, & $\frac{1}{2}$ quadrati, Sk:
 Omnia item quadrata, SV, ad omnia quadrata, kV, sunt vt, SY,
 ad, Yk, .i. sumpta communi basi quadrato, SY, vt cubus, SY, ad
 parallelepipedum sub, Yk, & quadrato, YS, ergo omnia quadrata
 SV, ad omnia quadrata figuræ, SIQk, & parallelogrammi, kV, .i.
 ad omnia quadrata figuræ, SIQVY, erunt vt cubus, YS, ad paral-
 lelepipedum sub, kY, & quadrato, YS, vna cum parallelepipedo
 sub, kS, & composito ex quadrato, SO, & $\frac{1}{2}$ quadrati, Sk: Quo-
 niam verò omnia quadrata, SV, sunt tripla omnium quadratorū
 trianguli, SYV, hæc verò ad omnia quadrata semihyperbolæ, OY
 N, sunt vt cubus, SY, ad parallelepipedum ter sub, SO, & quadra-
 to, OY, cum cubo, OY, idē omnia quadrata, SV, ad omnia qua-
 drata semihyperbolæ, YON, erunt vt tres cubi, SY, ad parallele-
 pipedum ter sub, SO, & quadrato, OY, cum cubo, OY, .i. vt cu-
 bus, SY, ad parallelepipedum sub, SO, & quadrato, OY, cum $\frac{1}{2}$
 cubi, OY; erant autem omnia quadrata, SV, ad omnia quadrata
 figuræ, SIQVY, vt cubus, SY, ad parallelepipedum sub, kY, &
 quadrato, YS, vna cum parallelepipedo sub, kS, & composito ex
 qua-

quadrato, SO, & $\frac{1}{2}$. quadrati, Sk, ergo omnia quadrata, SV, ad omnia quadrata figuræ, SIQVY, demptis omnibus quadratis semihyperbolæ, YON, vel horu quadrupla. $\frac{1}{2}$. omnia quadrata, GV, ad omnia quadrata figuræ, PIQVRH, demptis omnibus quadratis hyperbolæ, MON, vel horu: n dupla. $\frac{1}{2}$. omnia quadrata, TV, ad omnia quadraturæ, XPIQVRHFBT, demptis omnibus quadratis oppositarum hyperbolaru, AEC, MON, erunt ut cubus, YS, vel, ZV, ad parallelepipedum sub, kY, & quadrato, YS, vel sub, QV, & quadrato, VZ, vna cum parallelepipedo sub, kS, & composito ex quadrato, SO, & $\frac{1}{2}$. quadrati, Sk, vel vna cum parallelepipedo sub, ZQ, & composito ex quadrato, SO, & $\frac{1}{2}$. quadrati, ZQ, ab his tamen dempto parallelepipedo sub, SO, & quadrato, OY, quæ est reliqua ad ipsam, SY, vel, ZV, vna cum $\frac{1}{2}$. cubi eiusdem reliquæ, NY, quæ est diameter alterutrius hyperbolarum dictarum, quod, &c.

COROLLARIUM.

Hinc habetur omnia quadrata, TV, ad omnia quadrata fig. iam dicta, quæ comprehenditur terminis, qui sunt, TX, RV, TB, HR, VQ, PX, & sectionibus oppositis, BFH, PIQ esse ut cubus YS, ad parallelepipedum, sub, KY, & quadrato, YS, vna cum parallelepipedo sub, KS, & composito ex quadrato, SO, & $\frac{1}{2}$. quadrati, SK, ut superius ostensum est.

THEOREMA XXVIII. PROPOS. XXIX.

In eadem anteced. figura si aliud parallelogrammum describatur utcumque, conditionibus tamen, quo, TV, descriptum est, cuius latera sectiones coniugatas diuidant, quod sit parallelogrammum, $\beta\Omega$, cuius latera sectiones coniugatas diuidant in punctis, L, Γ , Φ , A, 3, 2, 7, 9, & axes, vel diametros coniugatas, &, Y, GZ, in punctis, B, 8, 6, 4, regula alterutro axium, vel diametrorum coniugarum, VT, FI: Ostendemus omnia quadrata figuræ, quæ remanet demptis oppositis hyperbolis, BFH, PIQ à parallelogrammo, TV, ablatis ab iisdem omnibus quadratis oppositarum hyperbolarum, AEC, MON, (quæ figura breuitatis causa dicatur, figura parallelogrammi, TV,) ad omnia quadrata figuræ, quæ remanet, demptis oppositis hyperbolis,

Fff

PIA

Φ1A, 9F7, à parallelogrammo, $\beta\Omega$, ablatis ab iisdem omnibus quadratis oppositarum hyperbolarum, $LE\Gamma$, $\Sigma O3$, quæ dicatur figura parallelogrammi, $\beta\Omega$, esse ut parallelepipedum sub, QV , & quadrato. VZ , vna cum parallelepipedo sub, QZ , & composito ex quadrato, SO , & $\frac{1}{2}$. quadrati, QZ , ab his dempto parallelepipedo sub, SO , & quadrato, OY , & $\frac{1}{2}$. cubi, OY , ad parallelepipedum sub, $\Lambda\Omega$, & quadrato, $\Omega4$, vna cum parallelepipedo sub, $\Lambda4$, & composito ex quadrato, SO , & $\frac{1}{2}$. quadrati, $\Lambda4$, dempto parallelepipedo sub, SO , & quadrato, $O6$, cum $\frac{1}{2}$. cubi, $O6$.

Nam omnia quadrata figuræ parallelogrammi, TV , demptis iam dictis, ad omnia quadrata figuræ parallelogrammi, $\beta\Omega$, demptis iam dictis, habent rationem compositam ex ratione omnium quadratorum primò dictæ figuræ, demptis, &c. ad omnia quadrata, TV , si. ex ea, quam habet parallelepipedum sub, QV , &

Ex antec.

quadrato, VZ , vna cum parallelepipedo sub, QZ , & composita ex quadrato, OS , & $\frac{1}{2}$. quadrati, QZ , dempto ab his parallelepipedo sub, SO , & quadrato, OY , & $\frac{1}{2}$. cubi, OY , ad cubum, ZV , itē ex ratione omnium quadratorum, TV , ad omnia quadrata, $\beta\Omega$,

§. l. 1.

idest ex ratione cubi, VZ , ad cubum, $\Omega4$, quia parallelogramma, TV , $\beta\Omega$, sunt similia, cum sint circa eandem diametrum, & tandē ex ratione omnium quadratorum, $\beta\Omega$, ad omnia quadrata figuræ

Ex antec.

parallelogrammi, $\beta\Omega$, demptis iam dictis, si. ex ratione cubi, $\Omega4$, ad parallelepipedum sub, $\Lambda\Omega$, & quadrato, $\Omega4$, vna cum parallelepipedo sub, $\Lambda4$, & composito ex quadrato, SO , & $\frac{1}{2}$. quadrati, $\Lambda4$, ab his dempto parallelepipedo sub, SO , & quadrato, $O6$, vna

§. l. 2.

cum $\frac{1}{2}$. cubi, $O6$, rationes autem parallelepipedorum primò dictorum, dempto parallelepipedo sub, SO , & quadrato, OY , cum $\frac{1}{2}$. cubi, OY , ad cubum, ZV , cubi, ZV , ad cubum, $\Omega4$, & cubi, $\Omega4$, ad parallelepipeda postremò dicta, dempto parallelepipedo sub, SO , & quadrato, $O6$, cum $\frac{1}{2}$. cubi, $O6$, componunt rationem pa-

Defin. 12.

l. 1.

rallelepipedorum primò dictorum, dempto iam dicto ad parallelepipeda postremò dicta, dempto iam dicto, ergo omnia quadrata figuræ parallelogrammi, TV , demptis omnibus quadratis oppositarum hyperbolarum, AEC , MON , ad omnia quadrata figuræ parallelogrammi, $\beta\Omega$, demptis omnibus quadratis oppositarum hyperbolarum, $LE\Gamma$, $\Sigma O3$, erunt ut parallelepipedum sub, QV , & quadrato, VZ , vna cum parallelepipedo sub, QZ , & composito ex quadrato, SO , & $\frac{1}{2}$. quadrati, QZ , ab his dempto parallelepipedo-

pipedo sub, SO, & quadrato, OY, cum $\frac{1}{2}$. cubi, OY, ad parallelepipedum sub, $\Delta\alpha$, & quadrato, $\alpha\frac{1}{2}$, vna cum parallelepipedo sub, $\Lambda\frac{1}{2}$, & composito ex quadrato, SO, & $\frac{1}{2}$. quadrati, $\Lambda\frac{1}{2}$, ab his dempto parallelepipedo sub, SO, & quadrato, O δ , cum $\frac{1}{2}$. cubi, O δ , quod ostendere opus erat.

COROLLARIUM:

Hinc patet, quod eadem methodo ostendemus omnia quadrata figurae parallelogrammi, TV, nihil ab eis dempto, ad omnia quadrata figurae parallelogrammi $\beta\alpha$, nihil pariter ab eis dempto, esse ut parallelepipeda primò dicta ad parallelepipeda secundò dicta.

THEOREMA XXIX. PROPOS. XXX.

In omnibus huius Lib. 5. Propositionibus, in quibus duarum quarumcunq; figurarum notificata fuit ratio omnium quadratorum, iuxta regulas in eisdem assumptas, nota etiam euadit ratio similiarium solidorum, quæ ex illis gignuntur figuris, iuxta easdem regulas.

Quoniam enim ostensum est Lib. 2. Prop. 23. vt omnia quadrata duarum figurarum inter se sumpta cum datis regulis, ita esse solida similiaria genita ex ijdem figuris iuxta easdem regulas, ideo cum in huius Libri Propositionibus inuēta est ratio omnium quadratorum duarum figurarum cum talibus regulis, colligemus etiā nunc eandem esse rationem duorum similiarium solidorum, quæ ex illis figuris iuxta easdem regulas genita dicuntur, quæ amplius in sequentibus dilucidabimus singulas Propositiones, quæ opportuna fuerint, denuò assumentes.

Vnde cum in prima Propof. exempli gratia ostensum est (conspēcta denuò eisdem figura) omnia quadrata hyperbolæ, DBF, regula, DF, ad omnia quadrata, AF, esse vt compositam ex, NB, & $\frac{1}{2}$. BE, ad, OE, eandem comperienus habere rationem solidum similitare genitum ex hyperbola, DBF, ad solidum similitare genitū ex, AF, iuxta communem regulam, DF; & eodem pacto colligemus, veluti omnia quadrata hyperbolæ, DBF, ad omnia quadrata trianguli, DBF, sunt vt composita ex sexquialtera, OB; & ex, BE, ad, OE, ita esse solidum similitare genitum ex hyperbola, DBF,

Fff 3 ad

ad sibi similem genitum ex triangulo, DBF, iuxta communem regulam, DE.

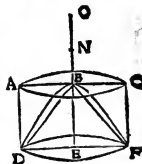
SCHOLIUM.

Quoniam verò ex Propos. 45. Lib. Primi habetur, quod si quæcunque conois hyperbolica, in cuius basi sit cylindrus, & conus & circa eundem axem, vel diametrum secetur planis basi æquidistantibus, quibus pariter secentur cylindrus, & conus, sicut conceptæ in solidis figura similes basi, idè omnia plana eorundem regula basi erunt omnes figura similes dictorum solidorum, in quibus si ducatur planum per axem, producet in ipsis figuras genitricis earundem, nempe parallelogrammum in cylindro, hyperbolam in conoide, & triangulum in cono, dicta autem solida erunt similia genita ex his figuris genitricibus iuxta communem regulam ipsam basim, & idè eorundem ratio nota erit, quia scimus quam rationem habeant inter se omnia quadrata dictarum genitricium figurarum, regula basi. Hæc autem similiter pro sequentibus memoria teneantur, in quibus fiet nostrum solitum exemplum per reuolutionem figurarum circa suos axes, ut habeamus omnes figuras similes genitorum solidorum, quæ sint circuli diametros in figuris genitricibus, quibus sint erecti, sitas habentes, licet eadem verificentur. Sumptis non axibus, sed tantum diametris, ut alibi pluries repetitum est, ex dictis autem infra scripta habentur Corollaria.

43. l. 8.
Elicitar ex
45. d. 1. pro
Conoide
Hyperb.
ex Cor. 3.
34. l. 2. pro
Cylindro.
& Cono.

COROLLARIUM I.

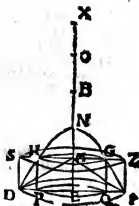
VT igitur fiat nostrum exemplum in Prop. 1. reuoluatur parallelogrammum, AF, circum manentem axim, BE, ut fiat ex parallelogrammo, AF, cylindrus, AF, ex hyperbola, DBF, conois, DBF, & ex triangulo, DBF, conus, DBF, colligitur ergo cylindrus, AF, ad conoidem, DBF, esse vt OE, ad compositam ex, NB, & BE, cono dem autem, DBF, ad conum, DBF, esse vt compositam ex terqualtera, OB, & ex, BE, ad OE; & ita esse solida quæcunque similia genita ex eisdem figuris .i. ex parallelogrammo, AF, hyperbola, DBF, & triangulo, DBF, iuxta communem regulam, DE, vt supra dictum est, quæ declarare oportebat.



CO:

COROLLARIUM II.

IN Prop. 2. assumpta eius figura, dimissis parallelogrammis, A Z, CG, & rectis, CH, RG, LK, ut fiat nostrum exemplum reuoluatur figura circa manentem axim, NE, ut fiat ex parallelogrammo, SF, cy, Ind vs, SF, ex triangulo, DMF, conus DMF, & ex hyperbolis, DNF, HNG, conoides hyperbolicæ, DNF, HNG, patet ergo ex hac Propof. conoidem, DNF, ad conoidem, HNG, abicissam plano, HG, æquidistante ipsi plano, DF, esse ut parallelepipedum sub, XE, & quadrato, EN, ad parallelepipedum sub, XM, & quadrato, MN, & sic esse quodlibet solidum simile genitum ex hyperbola, DNF, ad sibi simile genitum ex hyperbola, HNG, iuxta communem regulam, DF.



COROLLARIUM III.

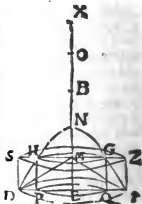
IN Prop. 3. patet in superioris figura, in qua eius exemplum constructum est, cylindrum, SF, ad frustum conoidis, HDFG, esse ut rectangulum, OEN, ad rectangulum sub, OE, & NM, vna cum rectangulo sub composita ex $\frac{1}{2}$. NO, & $\frac{1}{2}$. ME, & sub, MB. Et conum, DMF, ad idem frustum esse, ut rectangulum, OEN, ad rectangulum sub, OE, & tripla, NM, vna cum rectangulo sub composita ex, NX, & ME, & sub, ME; & sic esse solida similia quæcunq; genita ex eisdem figuris, parallelogrammo nẽpẽ, SF, frusto hyperbolæ, HDFG, & triangulo, DMF, iuxta communem regulam, DF.



COROL-

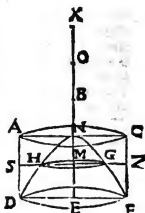
COROLLARIUM IV.

IN Prop. 4. iterum assumpta figura Coroll. 2. patebit cylindrū;
 SF, ad frustum hyperbolicum, HD
 FG, ab eo dempto cylindro, HQ, esse
 vt rectangulum, OEN, ad rectangulum
 sub composita ex $\frac{1}{2}$. EM, integra, MN,
 & $\frac{1}{2}$. NO. Conum verò, DMF, a $\frac{1}{2}$ idē
 frustum, dempto cylindro, HQ, esse vt
 rectangulum, OEN, ad rectangulum sub
 composita ex, EX, & dupla, NM: & sic
 esse quæcunq; solida similia genita ex
 eisdem figuris .i. parallelogramo, SF,
 frusto hyperbolæ, HDPG, dempto so-
 lido simili genito ex, H Q, & triangulo,
 DMF, iuxta communem regulam,
 DF.



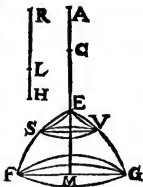
COROLLARIUM V.

IN Prop. 5. assumpta iterum figura Prop. 2. dimissis rectis, CP,
 RQ Lk, & triangulo, DM, & vt fiat solum exemplum, ea
 reuoluta circa axem, NE, vt ex, A
 F, fiat cylindrus, AP, ex hyperbola,
 DNF, conois, DNF, quæ solida
 sint iuncta plano, SZ, basi, DF, & qui-
 distante, patet cylindrum, AP, de-
 pta conoide, DNF, ad cylindrum,
 SF, dempto frusto conoidis, DHG
 P, esse vt parallelepipedum sub cō-
 posita ex, XE, EN, & sub quadrato,
 NE, ad parallelepipedum sub cō-
 posita ex, XE, EN, NM, & sub qua-
 drato, ME; & sic esse quodlibet
 solidum simile genitum ex, AF,
 dempto solido simili genito ex
 hyperbola, DNF, ad sibi simile
 genitum ex, SF, dempto solido simili genito ex frusto hyperbo-
 læ, DHG, iuxta communem regulam, DF.



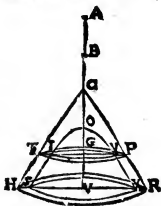
COROLLARIUM VI.

IN Prop. 6. exposita eius figura, & ut fiat nostrum exemplum eadē circa, EM , reuoluta, patet planum transiens per, SV , æquidistans basi, FG , a conoidi, FEG , refecare conoidem, SEV , quæ ad conum, SEV , habet rationem datam, quam nempe habet, HR , ad, RL , idq; dīscimus efficere quocunque solido similiari existente, FEG , cuius figura genitrix sit, FEG , à quo .f. sciemus abscindere per planū basi æquidistans solidum sibi similiare, quod nempe erit genitū ex hyperbola, SEV , quod ad solidum sibi similiare genitum ex triangulo, SEV , habeat rationem datam, dummodo data ratio sit quidem maioris in æqualitatis, sed minor sexquialtera.



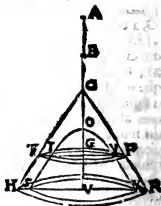
COROLLARIUM VII.

IN Prop. 7. exposita eius figura, dimissis tamen rectis, ED , SO , XO , & parallelogrammis, GX , GR , eadem reuoluatur circa manentem axim, CV , ut ex triangulo, HCR , fiat conus, HCR , & ex hyperbola, SOX , conois, SOX , patet ergo conum, HCR , ad conoidem, SOX , esse in ratione composita ex ea, quæ habet quadratum, SX , ad quadratum, HR , & rectangulum, AVO , ad rectangulum, BVC .



COROLLARIUM VIII.

IN Prop. 8. sumpto exemplo ex anteced. figura, in qua trapezium, $THRP$, in revolutione genuit frustum conici, $THRP$, & frustum hyperbolæ, $IYXS$, genuit frustum conoidis, $IYXS$; patet frustum conici, $THRP$, ad frustum conoidis, $IYXS$, habere rationem compositam ex ea, quæ habet rectangulum sub, GP, VR , cum $\frac{1}{2}$. quadrati earum differentiarum ad quadratum, VX , & ex ea, quam habet rectangulum, BVO , ad rectangulum sub, BV, OG , una cum rectangulo sub composita ex $\frac{1}{2}$. BO , & $\frac{1}{2}$. GV , & sub, GV ; & sic esse quodlibet solidum simile genitum ex trapezio, $THRP$, ad sibi simile genitum ex frusto hyperbolæ, $ISXY$, iuxta communem regulam, HR .



COROLLARIUM IX.

EX Propos. 9. inspecta figura Corollarij 7. manifestò colligitur Conum, HCR , ad conoidem, SOX , esse ut cubus, CV , ad parallelepipedum ter sub, CO , & quadrato, OV , cum cubo, OV , & sicutiam esse quæcunq; solida similia genita ex triangulo, HCR , ad sibi similia genita ex hyperbola, SOX , iuxta communem regulam, HR .

COROLLARIUM X.

IN Prop. 10. colligimus solida similia genita ex hyperbolis, AOC, OVX , habere inter se rationem compositam ex rationibus ibi appositis, quæ breuitatis gratia inibi recolantur.

COROLLARIUM XI.

IN Propos. 11. exposita eius figura, habemus conoides hyperbolicas ab eadem conoide directas, habere inter se rationem com-

compositam ex duabus rationibus ibidem appositis. Ut autem fiat nostrum exemplum, intelligatur in ipsa (in qua dimittantur asymptoti, & recta; ad, DC, OV, VX, PO, PΔ,) BD, esse axem, circa quam reuoluatur figura, vt ex hyperbolæ, ADC, lat conois hyperbolica, ADC; vterius per,



OX, traducatur planum, OX, erectum plano genitricis hyperbolæ, ADC, cuius pars in conoide concepta erit ellipsis, OX, cuius maior diameter, OX, minor autem in figura propositionis linea, PO, habemus igitur ex Prop. 11. conoidem, ADC, ad conoidem, OVX, habere rationem compositam ex ratione rectanguli sub, MB, HI, ad rectangulum sub, RI, FB, & ex ratione parallelepipedi sub altitudine hyperbolæ, ADC, basi quadrato, AC, ad parallelepipedum sub altitudine hyperbolæ, OVX, basi autem rectangulo sub, XO, OP, veluti sunt omnia quadrata hyperbolæ, ADC, regula, AC, ad omnia rectangula hyperbolæ, OVX, (regula, OX,) similia rectangulo sub, XO, OP, siue omnes circuli eiusdem ad omnes ellipses hyperbolæ, OVX, similes ellipsi, cuius coniugati axes, vel diametri sunt, XO, OP, XO, maior, OP, minor, nam omnes dicti circuli sunt omnia plana conoidis, ADC, regula, AC, & dictæ omnes ellipses sunt omnia plana conoidis, O VX, eandem autem rationem supradictæ comperiemus habere quæcunq; solida non quidem similia inter se, sed quorum omnia plana sint omnes figuræ similes genitricium figurarum, ADC, OVX, a quibus genita dicuntur, quæ habeant inter se eandem rationem ei, quam habet quadratum, AC, ad rectangulum, XOP.

43. l. 1.
Coro. 44.
l. 1.

Corol. 1.
33. l. 2.

COROLLARIUM XII.

IN Propos. 12. coniecta illius figura, & completis conoidibus, BAD, HMQ, patet eorum rationem esse compositam ex rationibus ibi explicatis, vbi videri poterunt. Quas quidem rationes comperiemus etiam habere quæcunq; solida, licet etiam non similia ad inuicem, genita tamen ex eisdem figuris, quarum omnes figuræ similes (inter se, quæ sunt vniuersi, vtriusq; tamen figuræ genitricis dissimiles) habeant eandem rationem, quam habent

Ggg præ-

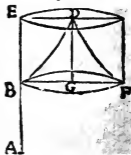
prædicta omnia quadrata, vel rectangula, vt supra ad inuicem comparata.

COROLLARIUM XIII.

IN Prop. 13. habetur similes conoides hyperbolicas esse in tripla ratione axium, vel diametrorum earundem, quippe quæ ex similibus hyperbolis nascuntur: Igitur in anteced. Corollarij figura, si supponantur similes hyperbolæ, BAD, HMQ, vt fiant ex illis similes conoides hyperbolicæ, FEG, HTS, istæ erunt inter se in tripla ratione axium, AC, MP, & sic erit quodlibet solidum simile genitum ex hyperbola, FEG, ad sibi simile genitum ex hyperbola, HTS, iuxta regulas, FG, HS.

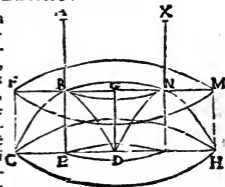
COROLLARIUM XIV.

IN Prop. 14. exposita eius figura, vt fiat exem plum, reuoluatur circa axim, DG, vt ex, EG, fiat cylindrus, EF, & ex trilineo, DGB, solidum, DBGF, quod vocetur: Apex hyperbolicus; patet ergo cylindrum, EF, ad apicem, BDF, esse vt, BD, ad sui reliquum, dempta ab eodem semihyperbola, BED, vna cum excessu, quo ipsa superat $\frac{1}{2}$. parallelogrammi, BD, & $\frac{1}{2}$. BM; & sic esse patet, quodlibet solidum simile genitum ex, BD, ad sibi simile genitum ex semihyperbola, BE, D, iuxta communem regulam, ED.



COROLLARIUM XV.

IN Propos. 15. exposita eius figura, vt fiat exemplum, eadem voluatur circa axim, GD, vt ex, FD, fiat cylindrus, FH, & ex hyperbola, CBD, solida, CBD.NH, quod vocetur: Semianulus strictus hyperbolicus: intelligantur autem semper hæc solida secari per axem, vt ijs producantur figuræ, quæ in reuolu-



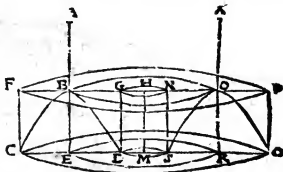
tione

tione eadem generant, nempe ex tenso plano, FD , per axem, G
 D , produci figuram, FH , compositam ex duobus parallelogram-
 mis, FD , DM , & figuram, $CBDNH$, compositam ex duabus hy-
 perbolis, CBD , DNH ; patet ergo cylindrum, FH , ad solidum, C
 $BDNH$, esse vt, FD , ad hyperbolam, CBD , & sic esse quodlibet
 solidum simile genitum ex, FD , ad sibi simile genitum ex hy-
 perbola, CBD , iuxta communem regulam, CD .

COROLL. XVI. SECTIO PRIOR.

IN Prop. 16. vt fiat exemplum, reuoluatur eius figura circa
 axim, HM ; vt ex, FM , fiat cylindrus, FQ , & ex hyperbola, C

BD , solidum,
 CBD , SOQ ,
 quod vocetur : Semia-
 nululus latus
 hyperbolicus
 patet ergo cy-
 lindrum, FQ ,
 ad semianulū
 latum hyper-
 bolicum, CB
 $DSOQ$, esse
 vt, FM , ad
 hyperbolam, CBD , & sic esse quodlibet solidum simile genitum
 ex, FD , ad sibi simile genitum ex hyperbola, CBD , iuxta com-
 munem regulam, CD .



SECTIO POSTERIOR.

Vnde habetur ex Corollario cylindrum, FH , in figura Co-
 rollarij antecedentis ad semianulū strictum hyperbolicū,
 $CBDNH$, esse vt cylindrum, FQ , in figura huius Corollarij ad
 semianulū latum hyperbolicum, CBD , SOQ , & sic solida simili-
 laria, &c.

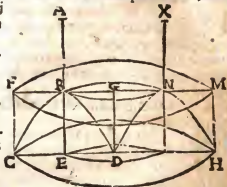
COROLLARIUM XVII.

IN Prop. 17. si, ducta parallela axi, vel diametro hyperbolæ, B
 E , sit, GD , patet in figura Corollarij 15. quam rationem ha-
 beat

Ggg

beat

beat cylindrus, FH, ad solidum, CBNH, quod vocetur: Semibasis columnaris stricta hyperbolica: Si verò dicta parallela sit, HM, patet in figura Corollarij anteced. quam rationem habeat cylindrus, FQ, ad solidum, CBOQ, quod vocetur: Semibasis columnaris lata hyperbolica: si tandem sit, RS, voluto, FS, circa axim, RS, ut ex, FS, fiat cylindrus, FH, & ex figura, CBR S, solidum, CB DH, quod vocetur: Semibasis columnaris media hyperbolica: patet cylindrum, FH, ad semibasim, CBDH, esse vt quadratum, CS, ad quadratum, SE, quadratum, EI, & rectangulum bis sub, VE, ES, vt & solida similia ex eisdem genita iuxta communè regulam, CS.



COROLLARIUM XVIII.

IN Prop. 18. habetur, visis proximis antecedentibus figuris, semianulum latum hyperbolicum, CBDSOQ, ad semianulum strictum hyperbolicum, CBDNH, esse vt, CM, MD, ad, DC; & sic solida similia, &c.

COROLL. XIX. SECTIO PRIOR.

IN Prop. 19. habetur, visa figura Corollarij 15. conoidem hyperbolicam genitam ex semihyperbola, CBE, ad semianulum strictum hyperbolicum, CBDNH, esse vt quadratum, IE, ad rectangulum sub, CD, & dupla, VE.

SECTIO POSTERIOR.

VNde in Corollario colligitur eandem conoidem ad semianulum latum hyperbolicum esse vt quadratum, EI, ad rectangulum sub composita ex, CM, MD, & sub dupla, VE, & sic solida similia ex eisdem figuris genita iuxta communem regulam, CD.

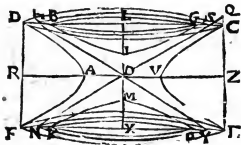
COROLLARIUM XX.

IN Prop. 20. exposita eius figura, & vt fiat solitum exemplum; ea circa axim, FE, reuoluta, vt ex, BE, fiat cylindrus, BC, & ex oppositis hyperbolis, BND, AMC, fiant conoides, BND, AMC, quæ pariter dicantur; Conoides oppositæ, patet cylindrum, BC, ad reliquum, demptis ab eodem oppositis conoidibus, AMC, BND, esse vt rectangulû, NEO, ad rectangulum, NOE, bis, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, ME, & sic esse quodlibet solidum simile genitum ex, B E, ad reliquum, demptis ab eodem solidis similaribus genitis ex sem hyperbolis, BNF, AME, vel sic solidum quodlibet simile genitum ex, BC, ad reliquum ab eodem, demptis solidis similaribus genitis ex hyperbolis oppositis, BND, AMC, iuxta communem regulam, AC.



COROLLARIUM XXI.

IN Prop. 21. exposita eius figura, & ea circa axim, LX, reuoluta, vt ex, DL, fiat cylindrus, DE, & ex figura, DAFEVC, solidum, DAFEVC, quod vocetur: Tympanum hyperbolicû; & ex triangulis, HL O, OXN, oppositi coni, HOS, NOY, patet cylindrum, DE, ad tympanum, DAFEVC, esse vt quadratum, FE, ad quadratum, AV, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, HS, . Vel (vt aliter ibi explicatur) vt quadratum, RZ, ad quadratum, AV, vna cum rectangulo sub, AZ, & tertio, ZV; & sic esse quodlibet solidum simile genitum ex, DE, ad sibi simi-



similare genitum ex figura, DAFEVC, iuxta communem regulam, FE.

COROLL. XXII. SECTIO PRIMA.

IN Prop. 22. si in superioris figura supponamus, FR, esse æqualem ei, quæ tangens sectionem, DAF, in A, concluditur inter, A, & asymptoton, ON, habetur cylindrum, DE, esse sexquialterum tympani hyperbolici, DAFEVC, & hoc tympanum esse quadruplum conorum, NOY, HOS, & sic esse solida similiaria ex eisdem figuris genita iuxta communem regulam, DC.

SECTIO II.

IN Coroll. 1. habetur cylindrum, DE, ad tympanum hyperbolicum, DAFEVC, demptis conis oppositis, HOS, NOY, esse ut quadratum, DC, ad quadratum, AV, & in casu præsentis Prop. esse eorum dupla, & sic solida similiaria, &c.

SECTIO III.

IN Coroll. 2. discimus inuenire cylindrum descriptum à parallelogrammo sectionibus oppositis circumscripto, ut ibi dicitur, quod ad reliquum tympani hyperbolici, demptis oppositis conis, habeat rationem data n, dummodo ea sit maioris inæqualit. idem intellige de solidis similibus, &c.

COROLLARIUM XXIII.

IN Prop. 23. assumpta eius figura, & ut fiat exemplum, ea circa axium, RZ, reuoluta, ut ex, FC, fiat cylindrus, FC, & ex, TN, cylindrus, TN, & ex oppositis, hyperbolis, FAD, EVC, oppositæ conoides, FAD, EVC, & ex, TAY, MVN, oppositæ, conoides, TAY, MVN, patet ergo cylindrum, FC, demptis oppositis conoidibus, FAD, EVC, ad cylindrum, TN, demptis oppositis conoidibus, TAY, MVN, esse ut parallelepipedum sub, ZV, & basi rectangulo, VOZ, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, ZV, ad parallelepipedum sub, ZV, basi rectangulo, VOS, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, ZV, &

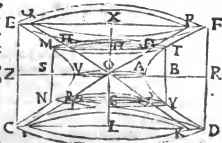


sic

fic esse quodlibet solidum simile genitum ex, FC , demptis solidis similaribus genitis ex oppositis hyperbolicis, FAE, EVC , ad solidum sibi simile genitum ex, FN , demptis solidis similaribus genitis ex oppositis hyperbolicis, TAY, MVN , iuxta communem regulam, EC .

COROLLARIUM XXIV.

IN Propos. 24. exposita eius figura, & ut fiat exemplum, ea circa axem, XL , reuoluta, ut ex figura, $EVCDAF$, fiat tympanum hyperbolicum, $EVCDAF$, & ex figura, $MVNYAT$, fiat tympanum hyperbolicum, $MVNYAT$, patet tympanum, $EVCDAF$, ad tympanum, $MVNYAT$, esse ut parallelepipedum sub, XL , & quadrato, RZ , cum duplo quadrato, AV , ad parallelepipedum sub, HG , & quadrato, B , cum duplo quadrato, AV ; & sic esse quodlibet solidum simile genitum ex figura, $EVCDAF$, ad sibi simile genitum ex figura, $MVNYAT$, iuxta communem regulam, CD .



COROLLARIUM XXV.

IN Prop. 25. visa figura anteced. Coroll in qua ex triangulis, QOP, IOK , geniti sint coniprofiti, QOP, IOK , & ex triangulis, $\Pi \alpha, RO\epsilon$, coniprofiti. $\Pi \alpha, RO\epsilon$, patet tympanum, $EVCDAF$, demptis conis, QOP, IOK , ad tympanum, $MVNYAT$, demptis conis, $\Pi \alpha, RO\epsilon$, esse ut, XL , ad, HG ; & sic esse solidum simile genitum ex figura, $EVCDAF$, demptis solidis similaribus genitis ex triangulis, QOP, IOK , ad solidum simile genitum ex figura, $TAYNVM$, demptis solidis similaribus genitis ex triangulis, & $OR, \alpha \Pi$, iuxta communem regulam, AV .

COROLLARIUM XXVI.

IN Prop. 26. visis figuris Corollarij 23. 24. & supposito, FC , esse idem parallelogrammum, in vnicuique figuris patet: cylindrum

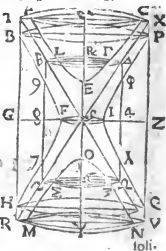
drum, FC, in figura Coroll. 23. demptis oppositis conoidibus, F AD, EVC, ad tympanum hyperbolicum genitum ex figura, EVC DAF, in figura Coroll. 24. scilicet ad tympanum hyperbolicum, EVCDAF, habere rationem compositam ex ratione rectanguli, AOZ, bis cum $\frac{1}{2}$. quadrati, VZ, ad rectangulum, AZO, & ex ratione rectanguli sub, DC, vel, RZ, & sub, EC, ad quadratum, AV, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, KI, vel cum rectangulo sub, AZ, & terquiertia, ZV, & sic esse quodlibet solidum simile genitum ex, FC, de nptis solidis similaribus genitis ex oppositis hyperbolis, FAD, EVC, iuxta communem regulam, EC, ad solidum simile sibi genitum ex figura, EVCDAF, iuxta regulam, CD.

COROLLARIUM XXVII.

IN Prop. 27. conspecta figura Coroll. 21. intelligantur descriptæ sectiones, BIG, kMP, quæ dicuntur coniugatæ sectionibus, DAF, CVE, ex quibus in reuolutione genitæ fuerint oppositæ conoides, B G, kMP, patet igitur cylindrum, DE, ad tympanum hyperbolicum, DAF, EVC, demptis oppositis conoidibus, BIG, KMP, esse vt parallelepipedum sub, ZC, & sub quadrato, ZQ (quæ habetur extenta, ZC, ad asymptoton producta .i. ad, OS, cui occurrit in, O,) a l paralleleipedum bis sub, XM, & quadrato, MO, cum cubo, M, & amplius $\frac{1}{2}$. euidem cubi; & sic esse quodlibet solidum simile genitum ex, FC, ad sibi simile genitum ex figura, DAFEVC, demptis solidis similaribus genitis ex oppositis hyperbolis, BIG, KMP, iuxta cõmunẽ regulam, FE, vel, AV.

COROLL. XXVIII. SECTIO PRIOR.

IN Prop. 28. illius assumpta figura, eadem reuoluatur circa axẽ, & Y, vel, GZ, sit autem reuolutio circa, & Y; patet ergo cylindrum genitum ex, TV, nempe, TV, ad reliquum, ab eodem demptis solidis genitis ex quatuor hyperbolis coniugatis, BFH, PIQ, AEC, MON, esse vt cubus, ZV, vel, SY, ad parallelepipedum sub, QV, & quad. ZV, vna cum parallelepipedo sub, ZQ, & sub composito ex $\frac{1}{2}$. quadrati, ZQ, & quadrato, SO, ab his tamen dempto parallelepipedo sub, SO, & quadrato, OY, cum $\frac{1}{2}$. cubi, OY, & sic esse



toli.

solidum simile quodcunque genitum ex parallelogrammo, TV, ad sibi simile genitum ex figura, TBFHRVQIPX, demptis solidis similibus genitis ex oppositis hyperbolis, AEC, MON, iuxta communem regulam, RV; eadem verò esse ostendemus sumpta pro regula ipsa, VX; & reuolutione facta circa axem, GZ.

SECTIO POSTERIOR:

IN Coroll. colligitur cylindrum, TV, ad cylindrum, TP, & HV, cum tympano, BFHQIP, esse vt cubus, YS, ad parallelepipedum sub, KY, & quadrato, YS, vna cum parallelepido sub, KS, & composito ex quadrato, SO, & $\frac{1}{2}$. quadrati, SK; & sic solida similia ex eisdem figuris genita iuxta ibi assumptam regulam, RV.

COROLL. XXIX. SECTIO PRIOR.

IN Propos. 29. visa eius figura, eaque reuoluta circa axem, & Y, vt in anteced. conspicitur, patet solidum in reuolutione descriptum à figura residua, demptis à parallelogrammo, TV, quatuor hyperbolis, BFH, PIQ, AEC, MON, ad solidum descriptum in reuolutione ex figura residua, demptis à parallelogrammo, $\beta\Omega$, quatuor hyperbolis, $\rho F7$, $\phi\Delta$, LEI, $\varepsilon O3$, esse vt parallelepipedum sub QV, & quadrato, VZ, vna cum parallelepipedo sub, QZ, & composito ex quadrato, SO, & $\frac{1}{2}$. quadrati, QZ, ab his dempto parallelepipedo sub, SO, & quadrato, OY, & $\frac{1}{2}$. cubi, OY, ad parallelepipedum sub, $\Lambda\Omega$, & quadrato, $\Omega4$, vna cum parallelepipedo sub, $\Lambda4$, & composito ex quadrato, SO, & $\frac{1}{2}$. quadrati, $\Lambda4$, dempto parallelepido sub, SO, & quadrato, O6, cum $\frac{1}{2}$. cubi, O6: Sic etiam patet esse quodlibet solidum simile genitum ex figura, TBFHRVQIPX, demptis solidis similibus genitis ex oppositis hyperbolis, AEC, MON, ad sibi simile genitum ex figura, B9F72 $\Omega\Lambda$; $\phi\Delta$ demptis solidis similibus genitis ex oppositis hyperbolis, LEI, $\varepsilon O3$, iuxta communem regulam, RV.

SECTIO POSTERIOR.

IN Coroll. colligitur eadem solida, genita nempe ex figuris; TBFHRVQIPX, B9F72 $\Omega\Lambda$ $\phi\Delta$, iuxta communem regulam, RV, nihil ab eis dempto, esse vt dicta parallelepidea, nihil pariter ab eisdem dempto.

GEOMETRIAE CAVALERII

LIBER SEXTVS.

In quo de Spatijs Helicis, & Solidis inde genitis, ac alijs quibusdam ex superioribus deductis, speculatio instituitur.

DEFINITIONES,

I.



I, dato quocumque circulo, super eiusdem centro, ad distantiam omnium punctorum recti transitus ipsius semidiametri, circumferentia describi intelligantur; prædictæ circumferentiæ simul sumptæ dicantur. Omnes circumferentiæ dati circuli. Defin. 3.
l. 2.

II.

ET si à præfato circulo quæcumque figura abscissa intelligatur; portiones omnium circumferentiarum dicti circuli, conceptæ in abscissa figura, dicentur. Omnes circumferentiæ eiusdem abscissæ figuræ.

THEOREMA I. PROPOS. I.

Circulorum æqualium, necnon sectorum æqualium, & ab eodem, vel æqualibus circulis abscissorum, omnes circumferentiæ sunt æquales.

Hæc Propositio faciliè per superpositionem ostendetur. Si enim circuli æquales ad inuicem superponantur, ita vt centrum centro congruat, etiam ipsi circuli congruent, cum supponantur æquales, vnde & eorum radij sint æquales, congruentibus autem circulis, etiam omnes vnus circumferentiæ congruent omnibus alterius circumferentijs, & idè inter se æquales erunt. Eadem pariter superpositionis adhibita via, ostendemus sectorum æqualium, ab eodem, vel æqualibus circulis abscissorum omnes circumferentijs inter se æquales esse, quod erat demonstrandum.

THEOREMA II. PROPOS. II.

Omnis circulus æqualis est triangulo rectangulo, cuius radius est pars vni eorum, quæ sunt circa rectum angulum, circumferentia verò basi.

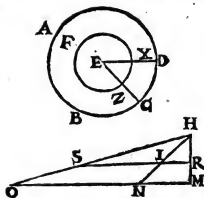
Hæc ostenditur ab Archimede lib. de Dimensione Circuli, Propos. I. propterea ibi recolatur.

THEOREMA III. PROPOS. III.

Omnis sector circuli æqualis est triangulo rectangulo, cuius circuli radius est pars vni eorum, quæ sunt circa rectum, circumferentia verò basi illius sectoris.

Si circulus, ABCD, cuius radius, ED, & sector, EDC, expofito vero triangulo, HOM, cuius angulus, HMO, fit rectus, & letus, HM, æquale ipsi, ED, & MO, circumferentiæ, ABCD, fit, MN, æqualis circumferentiæ, CD; & iungatur, HN. Dico ergo sectorem, ECD, æquari triangulo, HNM, . Nam circulus, ABCD, ad sectorem, CBD, est vt circumferentia, ABCD, ad circumfe-

33. Sexti
Elem.
Ex antec.



habet rationem, ergo sector, ECD , est æqualis triangulo, HNM , quod ostendere opus erat.

COROLLARIUM I.

Hinc patet, si sumpto utcumque puncto in ED , ut X , centro E , ad distantiam X , circumferentia, FZX , descripta fuerit in super abscissa, HR , æquali ipsi, EX , per R , ducta fuerit, SR , parallela ipsi, OM , secans, HN , in I , trapezium, $OSRM$, æquari residuo circuli, $ABCD$, ab eo dempto circulo, FZX , quod residuum dicatur fascia circulorum, BD , FX , nam circulus, BD , ad circulum, FX , est ut quadratum, DE , ad quadratum, EX , id est ut quadratum, MH , ad quadratum, HR , id est ut triangulus, HOM , ad triangulum, HSR , unde

Coroll. 1.
11. l. 3. quia circulus, BD , æquatur triangulo, HOM , etiam circulus, FZX , æquatur triangulo, HSR , unde fascia, BF , æquatur trapezio, $OSRM$;

Coroll. 1.
19. l. 2. eodem modo colligemus residuum sectoris DEC , ab eo dempto sectore, XEZ , quod dicatur eorundem sectorum fascia, scilicet ipsum, $ZXDC$, æquari trapezio, $IRMN$.

COROLLARIUM II.

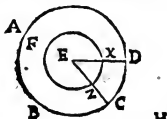
Patet insuper, quia circulus, CDB , æquatur triangulo, HOM , & circulus, FZX , triang. HSR , item circumferentia, $ABCD$, ipsi OM , & FZX , ipsi, SR , (nam, DE , æquatur ipsi, MH , & EX , ipsi, RH .) quod veluti, OM , ad, SR , est ut, MH , ad, HR , ita circumferentia, $ABCD$, ad, FZX , erit ut, DE , ad, EX . Sic etiam ostendemus similium sectorum, CED , ZEX , circumferentias, CD , ZX , esse ut semidiametri, DE , EX , & ipsos similes sectores esse ut quadrata semidiametrorum, DE , EX , quonia sunt

sunt circulorum, à quibus abscinduntur partes proportionales, ipsi autem circuli sunt, ut diametrorum quadrata.

THEOREMA IV. PROPOS. IV.

Dati circuli, necnon similes sectores inter se sunt, ut omnes eorundem circumferentiæ.

Sint in eadem antecedentis figura circuli quinque, $BADC$, FXZ , descripti super eodem centro, E , & ab ipsidem intelligantur abscissi similes sectores, DE , XEZ . Dico circulos, $DABC$, FZX , necnon sectores, DEC , XEZ , inter se esse, ut omnes ipsorum circumferentiæ. Sit denuò expositum triángulum, HOM , cuius sit angulus rectus, H MO , latus, HM , æquale radio, ED , & MO , circumferentiæ, $DCBA$, abscissa autem, HR , æquali ipsi, EX , & per, R , ducta paral-



lela ipsi, OM , quæ sit, SR , intercepta lateribus, HO , HM , patet, ut dicebatur in Corol. 2. ant. Propos. quod circumferentiæ, FZX , æquatur ipsi, SR , eodem modo abscindentes ab ipsis, HM , ED , versus, H , E , puncta æquales quascunque rectas lineas, & per earum terminos ducentes parallelam quidem ipsi, OM , in triangulo, & circumferentiæ super centro, E , in circulo, $ABCD$, manifestum erit prædictam circumferentiæ æquari prædictæ parallelæ, lateribus, HO , HM , interceptæ, & unicuique circumferentiæ in circulo, $ABCD$, sic descriptæ respondere suam parallelam in triangulo, HOM , cum sint rectæ, HM , ED , æquales, igitur concludemus omnes circumferentiæ circuli, $DABC$, æquari omnibus lineis trianguli, HOM , regula, OM , sicut etiam omnes circumferentiæ circuli, FZX , æquari omnibus lineis trianguli, HSR , regula eadem, OM , quapropter, ut omnes lineæ trianguli, HSR , ad omnes lineas trianguli, HSR , idest ut triángulum, HOM , ad, HSR , idest ut circulus, $DABC$, ad circulum, FZX , ita omnes circumferentiæ circuli, $ABCD$, erunt ad omnes circumferentiæ circuli eiusdem, FZX ; quod & simili methodo de sectoribus ex. g. DEC , XEZ .

ad sectorem, sed ad aliam quamcunq; figuram ex sectoribus compositam compararetur, ostenderemus, eandem figuram esse inter se, ut omnes earundem circumferentiæ, quod demonstrare opus erat.

COROLLARIUM.

Patet autem, veluti ostensum est sectores, AOB , esse ut omnes eorum circumferentiæ eodem modo demonstrari posse, circumlum, VOB , & sectorem, AOB , & in uniuersam circulos, & suos sectores inter se esse, ut omnes eorum circumferentiæ.

THEOREMA VI. PROPOS. VI.

SI in circulo ab eiusdem centro ad circumferentiam curuam quædam linea illius conditionis producat, ut quæcunq; rectæ lineæ à centro ad ipsam pertingentes (præter illius extrema iungentem) intra illud spatium cadant, quod comprehenditur ducta curua, & illius extrema iungente: Erit dictum spatium ad propositum circulum, vel quemcunq; sectorem, ut omnes eiusdem circumferentiæ ad omnes illius circumferentias.

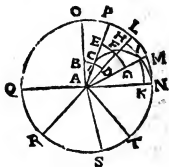
Sit quicumque circulus, $NOQT$, & centrum, A , curua, AFN , ducta à centro, A , ad periphæriam, cui incidat in, N , & sit eius conditionis, qualis suppositum est, sitq; iuncta, AN . Dico igitur spatium, seu figuram, AFN , ad circulum, $NOQT$, vel ad quemcunq; sectorem, esse ut omnes eiusdem circumferentiæ ad omnes illius circumferentias. Fiat ut circulus, $NOQT$, ad figuram, NFA , ita circumferentia, $NOQT$, ad circumferentiam, QR , ita enim erit, & circulus, $NOQT$, ad sectorem, QAR , iunctis, QA , AR , unde sector, QAR , erit æqualis figuræ, AFN , vel ergo omnes circumferentiæ, QAR , æquantur etiam omnibus circumferentijs figuræ, AFN , & sic quia sector, QAR , ad circulum, NO



QT, est vt omnes eisdem circumferentiæ ad omnes illius circumferentiæ figura, AFN, ad circulum, NOQT, & consequenter etiam ad quæcunq; illius sectorem per anteced. Prop. & Cor. erit vt omnes circumfer. ad omnes circumferentias: Vel, nisi omnes circumferentiæ, QAR, æquantur omnibus circumferentijs figuræ, AFN, erunt eisdem maiores, vel minores, sint primò maiores, quantitate omnium circumferentiarum sectoris, AST, intellecta autem à

centro, A, ducta ipsa, AO, tangente curuam, AFN, in puncto, A, quæ circumferentiæ incidat in, O, secetur circumferentia, ON, bifariam in, L, & rursus partes, OL, LN, bifariam in punctis, P, M, & hoc semper fiat donec ad circumferentias deuentum sit, quarum vna quæque sit minor, ST, scilicet ipsæ, OP, PL, LM, MN, & à centro, A, ad puncta, P, L, M, extendantur rectæ,

AP, AL, AM, quæ secabunt curuam, AFN, earum enim portiones inter centrum, & curuam interceptæ, ex hypotesi cadunt intra spatium, ANFA, secant in, C, E, I, & centro, A, interuallis, AC, AF, AI, arcus describantur, BCD, EFG, HIK, incidetes proximis rectis lineis, à centro eductis, in punctis, B, D; E, G; H, k. Quoniam ergo omnes circumferentiæ sectoris, QAR, superant omnes circumferentias figuræ, AFN, quantitate omnium circumferentiarum sectoris, AST, omnes autem circumferentiæ figuræ compositæ ex sectoribus, NAM, IAH, FAE, CAB, idest figuræ spatio, AFN, circumscriptæ, superant omnes circumferentias figuræ compositæ ex sectoribus, KAI, GAF, DAC, idest figuræ eidem spatio inscriptæ, quantitate omnium circumferentiarum sectoris, BAC, & quadrilinearum, ECDF, HFGI, Mlkn, quæ simul adæquantur omnibus circumferentijs sectoris, MAN, vt facile ostendi potest, propterea omnes circumferentiæ figuræ circumscriptæ superant omnes circumferentias inscriptæ quantitate omnium circumferentiarum sectoris, MAN, quæ cum sint minores omnibus circumferentijs sectoris, TAS, idè omnes circumferentiæ figuræ, circumscriptæ superabunt omnes circumferentias inscriptæ minori quantitate, & eadem multò minori quantitate superabunt omnes circumferentias spatij, AFN, quam omnes circumferentiæ sectoris, AQR, superent omnes circumferentias spatij, AFN,



v. Decimi
Elem.

PN, ergo omnes circumferentiæ figuræ circumscriptæ minores erunt omnibus circumferentijs sectoris, QAR, cum verò figura ex sectoribus composita ad sectorem, sit vt omnes circumferentiæ ad omnes circumferentias, ideò etiam figura circumscripta minor erit sectore, QAR, & multò maior erit figura, AFN, sectore, QAR, sed & æqualis illi ostensa fuit, quod est absurdum, igitur absurdum etiã est dicere omnes circumferentias sectoris, QAR, maiores esse omnibus circumferentijs spatij, AFN. Dico nunc neque esse minores, si hoc verum est, sint minores omnibus circumferentijs sectoris, SAT, & repetita eadem constructione, sit spatium, AFN, circumscripta figura ex sectoribus composita, & alia inscripta, ita vt circumscriptæ figuræ omnes circumferentiæ superent omnes circumferentias inscriptæ minori quantitate, quam sint omnes circumferentiæ sectoris, SAT, ergo omnes circumferentiæ figuræ, AFN, superabunt omnes circumferentias figuræ inscriptæ multò minori quantitate, quam eadem superent omnes circumferentias, QAR, ergo omnes circumferentiæ inscriptæ figuræ maiores erunt omnibus circumferentijs sectoris, QAR, ergo figura inscripta maior etiam erit sectore, QAR, & eodem multò maior erit figura, AFN, contra hypotesim, est enim illi æqualis, quod est absurdum, igitur absurdum etiam est omnes circumferentias sectoris, QAR, minores esse omnibus circumferentijs figuræ, AFN, sed neq; sunt illis maiores, vt ostensum est, ergo sunt eidem æquales, sed omnes circumferentiæ sectoris, AQR, ad circulum, OQSN, vel quemcunq; sectorem comparatæ sunt, vt spatium ad spatium, ergo spatium quoque, AFN, ad circulum, OQSN, vel ad quemcunq; sectorem, erit, vt omnes illius circumfer. ad omnes illius circumferentias, quod, &c.

Ex antec.

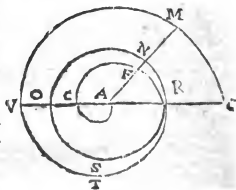
Ex antec.

THEOREMA VII. PROPOS. VII.

SI in spiralem ex prima reuolutione ortam incidant due lineæ à puncto, quod est initium spiralis, & producatur vsq; ad circumferentiam primi circuli, eandem ratione inter se habebunt istæ in spiralem incidentes, quam arcus circuli, medij inter terminum spiralis, & limites linearum productarum in circumferentia factos, sumptis in consequentia arcubus à fine spiralis.

THEOREMA VIII. PROPOS. VIII.

SI in spirales in alijs reuolutionibus genitas, quam in prima incidant duę lineę ab initio spiralis, habebunt illę inter se eandem rationē, quam arcus circuli primi, intercepti, veluti dicitur in antecedente, cum integra circumferentia toties assumpta, quotus est vnitate minor reuolutionum numerus.



Hę duę Propositiones ostenduntur ab Archimedelib. de pir. Prop. 14. & 15.

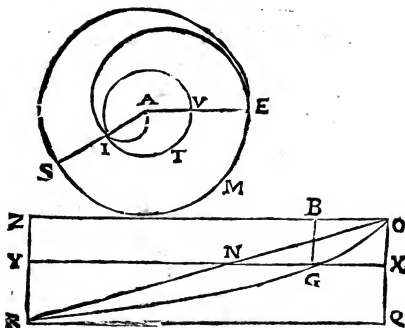
S C O L I V M.

IN prima reuolutione orta sit spiralis, ACER, & RTVMG, in secunda, & AC, AE, pertingant ad primam, AV, AM, ad secundam, erit, AC, ad, AE, vt circumferentia, RSO, ad, RSN, AV, verò ad, AM, erit vt circumferentia tota, RNOS, cum, RSO, ad, RNOS, totam, cum, RSON, & sic in ceteris.

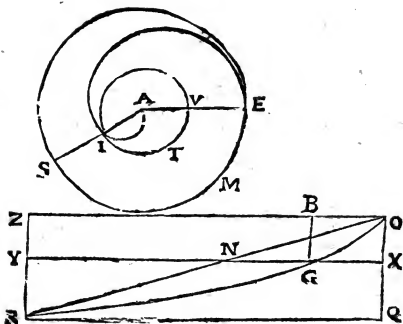
THEOREMA IX. PROPOS. IX.

Spatium comprehensum à spirali ex prima reuolutione orta, & prima lineã, quę initium est reuolutionis, est tertia pars primi circuli.

Sit spiralis in prima reuolutione genita ipsa, AIE, AE, verò reuolutionis initium, & centro, A, interuallo, AE, sit primus circulus descriptus, ESM. Dico spatium, AIE, tertiam partem esse circuli, EMS. Sumpto itaq; vtcunq; puncto, vt, V, in, AE, centro, A, interuallo, AV, circulus describatur, VIT, & iuncta, AI, produca-



ducatur ad, S, deinde exponatur triangulum rectangulum, OQR, cuius latus, OQ, circa rectum, OQR, sit æquale ipsi, AE, & QR, circumferentiæ, SME, & compleatur rectangulum, QZ, abscindatur autem, OX, æqualis, AV, & per, X, ducatur, XY, parallela, RE, secans, ZR, in, Y, &, OR, in, N, & vertice, O, per punctum, 20. l. 4.
R, describatur femiparabola, RGO, circa axem, OZ, quam secet, YX, in, G, & per, G, agatur, GB, parallela, OQ, incidens ipsi, ZO, in, B. Quoniam ergo quadratum, ZR, ad quadratum, BG, est 38. & Sc.
vt, ZO, ad, OB, ideò, RQ, ad, GX, erit vt quadratum, QO, ad 40. l. 1.
quadratum, OX, idest vt quadratum, EA, ad quadratum, AV, sed sic etiam est circumferentia, ESM, ad circumferentiam, ITV, etenim ad eam habet rationem compositam ex ratione circumferentiæ, ESM, ad circumferentiam, IVT, idest ex ea, quam habet, EA, C. Cor. 2.
ad, AV, & ex ratione circumferentiæ, IVT, ad circumferentiam, 3. huius.
ITV, idest circumferentiæ, MSE, ad circumferentiam, SME, idest ex ratione, EA, ad, AI, vel ad, AV, duæ verò rationes, EA, ad, A 7. huius.
V, component rationem quadrati, EA, ad quadratum, AV, ergo E 13. Sex.
cir. Elem.



circumferentia, MSE, ad circumferentiam, ITV, est vt quadratū EA, ad quadratum, AV, id est vt, RQ, ad, XG, est autem, RQ, æqualis circumferentiæ, MSE, ergo & GX, circumferentiæ, ITV, æqualis erit, & sic ostendemus quamlibet circumferentiam ipsi A, concentricam, & interceptam inter spiralem, AIE, & rectam AE, tamen extra spatium helicum, AIE, adæquari ductæ in trilineo, OGRQ, ipsi, RQ, ductæ parallelæ, quæ nempe abscindunt versus puncta, O, A, ipsarum, OQ, AB, partes æquales, & quia, OQ, AE, supponuntur æquales, ideo omnes lineæ trilinei, OGRQ, regula, RQ, omnibus circumferentijs trilinei recta, AE, spirali, AIE, & circumferentia, MSE, comprehensæ æquales erunt. Similiter, quia est, RQ, ad, NX, vt, QO, ad, OX, vel, EA, ad, AV, vel circumferentia, MSE, ad, TIV, æquatur autem, RQ, ipsi, MSE, ergo, NX, æquatur circumferentiæ, TIV, & sic ostendemus omnes lineas trianguli, ORQ, adæquari omnibus circumferentijs circuli, MSE, ergo vt trianguli, ORQ, omnes lineæ ad omnes lineas trilinei, OGRQ, vel vt triangulum, ORQ, ad trilineum, OGRQ, ita omnes circum-

circumferentiæ circuli, MSE, erunt ad omnes circumferentias figuræ spirali, AIE, recta, AE, & circumferentia, MSE, conclusæ, & per conuersionem rationis triangulum, ORQ, vel, OZR, ad figuram, OGR, erit vt omnes circumferentiæ circuli, MSE, ad omnes circumferentias spatij helici, AIE, idest vt circulus ad spatium, AIE, (quia curua, AIE, est talis conditionis, qualem postulat Prop. 6. vt elicitur ex Prop. 7. huius) cum verò semiparabola, OGRZ, sit sexqui tertia trianguli, OZR, vnde diuidendo figura, OGR, sit tertia pars trianguli, OZR, ideò, & spatium helicum, AIE, tertia pars erit circuli, MSE, quod demonstrare oportebat. i. l. 4.

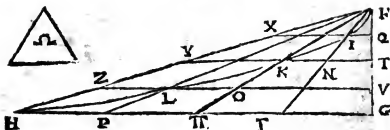
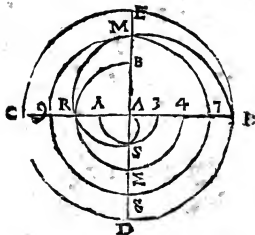
SCHOLIUM.

Hucusq; per methodum indiuisibilem etiam in hoc Libro libuit procedere, vt innotesceret nos posse, quæ Archimedes ostendit Lib. de Spiralibus, circa spatiorum mensuram, etiam tali artificio demonstrare, etenim si quis hoc attentauerit circa sequentes Propositiones, id ipsum obtineri posse facillè animaduertet, veruntamen hoc arbitrio, ac iudicio Lectoris relinquendo, placuit etiam stylo veteri, aliter tamen ab Archimede, easdem propositiones demonstrare.

Præfatæ Propos. alia demonstratio.

Sit alia spiralis ex prima reuolutione orta, ASRMB, AB, verò initium reuolutionis, & centro, A, interuallo, AB, sit primus circulus descriptus, ECDB, deinde exponatur triangulus, FHG, rectum habens angulum ad, G, cuius latus, FG, sit æquale ipsi, AB, & HG, circumferentiæ, ECDB, erit ergo triangulus, FHG, æqualis circulo, ECDB, intelligatur deinde in eiusdem trianguli plano transfire parabolam, HLF, cuius vertex sit, F, & HG, parallela eiusdem axi, ad quem ipsa, GF, sit ordinatim applicata, quæ tanget sectionem in puncto, F. Dico igitur, FLHG, trilineum æquari spatio residuo, dempto à circulo, ECDB, spatio helico sub spirali, ASRMB, &, AB, si enim non est illi æquale, erit eodem, vel maius, vel minus, sit primò maius quantitate spatij, quod vocetur, α , rursus diuidatur, HG, bifariam in, Π , & iungantur, F Π , & sic ipsæ, $\Lambda\Pi$, ΠG , diuidantur bifariam in, P, Γ , & iungantur, PF, ΓF , sicque semper fiat donec deuentum sit, vt ad triangulum, FIG, quod sit minus spatio, α , deueniemus autem, nam à magnitudine proposita, & his, quæ relinquuntur, semper aufertur dimidium, secant autem iungentes, F, cum diuisionum punctis curuam x. huius.
20. l. 4.
17. Primi
Conic.
Defi. 9.
huius.
Decimè
Elcm.

uam



uam parabolæ in punctis, I, K, L, per quæ ipsi, HG, parallelæ ducantur, XQ, YKT, ZLV, secantes, FG, in punctis, Q, T, V, dico, FG, per hæc secari in partes æquales, nam, HG, ad, GF, habet rationem compositam ex ea, quam habet, HG, ad, IQ, & IQ, ad, FG, sed, AG, ad, IQ, est vt quadratum, GF, ad quadratum, FQ, & IQ, ad, FG, vt, QF, ad, FG, idest vt quadratum, QF, ad rectangulum, QFG, ergo, HG, ad, GF, habebit rationem compositam ex ea, quam habet quadratum, GF, ad quadratum, FQ, & quadratum, FQ, ad rectangulum, QFG, quæ erit eadem ei, quam habet quadratum, GF, ad rectangulum, GFQ, idest ei, quam habet, GF, ad, FQ, igitur, HG, ad, GF, erit vt, GF, ad, FQ, eodem modo ostendemus, HG, ad, GN, esse vt, GF, ad, FT; & HG, ad, GP, vt, GF, ad, FV, vnde, FG, diuisa erit in partes æquales; habemus ergo spatio, FLHG, circumscriptam figuram ex triangulo, FIQ, & ex trapezijs, KQ, LT, HV; compositam, & aliam inscriptam ex trapezijs, PV, OT, NQ, compositam, & excessus circum-

Defin. 1. 1.

l. 1.

Coroll. 1.

l. 4.

4. Sexti

Elem.

5. l. 2.

Defin. 1. 2.

l. 1.

5. l. 2.

cumscriptæ super inscriptam sunt trapezia, HL, LK, KI, cum triangulo, IFQ, quæ, quia æquantur trapezijs, IV, VN, NQ, & triangulo, IFQ, (nam dicta trapezia sunt residua triangulorum in æqualibus basibus; & altitudinibus consistunt) idest triangulo, FIG, subinde sunt minoræ spatio, α , & ideo circumscripta superat inscripta minori spatio, quam sit α , ergo trilineum, FLHG, excedit inscriptam multò minori spatio, excedit autem spatium residuum circuli, ECDB, iam dictum spatio, α , ergo figura inscripta erit maior dicto spatio residuo; quod serua.

Diuidatur nunc, AB, sim iter, ac diuiditur, FG, in punctis, 3, 4, 7, centro autem communi, A, ad distantiam punctorum, 3, 4, 7, describantur circumferentiæ, 35A, 42R β , 789M, secantes spiralem in punctis, S, R, M, per quæ transeant eductæ à centro, A, productæque vsque ad circumferentiam, ECDB, rectæ, AD, AC, AE, vt igitur in præhabita demonstratione ostendemus circumferentiam, R Σ 4, æquari rectæ, KT, & M987, ipsi, LV, & quia, 53, circumferentia ad circumfer. Σ 4, est, vt, 3A, ad, A4, idest vt, QF, ad, FT, idest vt, IQ, ad, NT, est autem æqualis, 53, ipsi, IQ, ergo, Σ 4, erit æqualis ipsi, NT, & est, 34, æqualis ipsi, QT, ergo fascia, 534 Σ , erit æqualis trapezio, IQTN; eodem modo ostendemus fasciam, R9874, æquari trapezio, KV, & fasciam, MECDB7, æquari trapezio, PLVG, & ideo figura composita ex dictis fascijs æqualis erit figuræ compositæ ex his trapezijs inscriptæ trilineo, FLHG, est autem hæc figura inscripta maior spatio residuo circuli, ECDB, ab eo dempto spatio sub spirali, & voluta, AB, ergo figura composita ex dictis spatijs erit maior spatio dicto residuo, cui tamen est inscripta, quod est absurdum, non ergo trilineum, FLHG, maius est dicto residuo.

Corol. 1.
3. huius.

Dico neq; esse minus. Sit, si fieri potest, minus spatio eodem, α , sit autem vt supra trilineo, FLHG, circumscripta figura, ex trapezijs, KQ, LT, HV, & triangulo, IFK, composita, & alia eidem inscripta ex trapezijs, PO, OT, NQ, ita vt earum differentia sit minor spatio, α , igitur circumscripta excedet trilineum, FLHG, multò minori spatio, ergo circumscripta figura minor erit spatio residuo iam dicto circuli, ECDB, quod excedit trilineum, FLHG, spatio, α ; quod tamen est absurdum, nam sectorem, AS3, patet equalem esse triangulo, FIQ, fasciamque, AR Σ 43, æquari ostendemus trapezio, KQ, modo supra adhibito, & fasciam, β 1874, ipsi trapezio, LT, & totam fasciam, 679, trapezio, HV, vnde figura composita ex dictis fascijs, & sectore, AS3, erit æqualis com-

K k k

posi.

positæ ex dictis trapeziji, & triangulo, FIQ, quæ ostensa est esse minor spatio residuo iam dicto circuli, ECDB, & ideo figura composita ex dictis fascijs erit minor spatio residuo iam dicto, cui tamen circumscribitur, quod est absurdum, non est ergo trilineum, FLHG, minus dicto spatio residuo circuli, ECDB, & ostensum est neq; esse illo maius, ergo erit illi æquale, & triangulus, FHG, est æqualis circulo, ECDB, ergo triangulus, FHG, ad trilineum, FLHG, erit vt circulus, ECDB, ad residuum spatium ab eo dempto spatio sub spirali, A γ MB, & voluta, AB, sed triangulus, FHG, est sexquialter trilinei, FLHG, ergo circulus, ECDB, erit sexquialter spatij residui iam dicti, & consequenter erit triplus spatij, quod comprehenditur sub spirali, A γ MB, & voluta, AB, quod erat ostendendum.

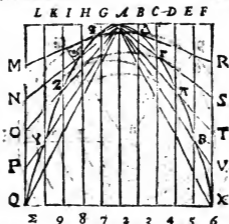
COROLLARIUM

Hinc patet eductas à vertice parabola ad secantem quamcunq; diametro eiusdem parallelam, parabola, ac tangente ibidem interceptam, similiter secare eandem, ac transiens per punctum curvæ parabolæ, in quo prædictæ eam dividit, eidemq; parallela, secat ipsam tangentem, estensum enim est, ex. g. HG, ad GT, esse vt, GF, ad, FQ, ex quo novus, ni fallor, ac pulcherrimus describendi parabolam elicitur modus.

SCHOLIUM.

Sit describenda parabola diameter, A2, basis, QX, cui per, A, sit ducta parallela, LF, sintque, AF, AL, æquales ipsis, 2X, 2Q, æqualibus, secta autem, AF, in quotcunq; partes æquales, vt in quinque, veluti etiam, LA, in punctis, K, I, H, G, B, C, D, E, per ipsa ducantur diametro, A2, æquidistantes, KΣ, I9, H8, G7, B3, C4, D5, E6, secantes similiter basim, QX, in æquas partes in punctis, Σ, 9, 8, 7, 3, 4, 5, 6, tandem iunctis,, LQ, FX, ipsæ similiter secantur ac, AF, vel, AL, scilicet in quinque partes æquales in punctis, R, S, T, V, M, N, O, P, & ad hæc puncta ducantur ab, A, rectæ lineæ, AR, AS, AT, AV, AM, AN, AO, AP, necnon, AQ, AX, notentur autem puncta, in quibus educta ab, A, secant parallelas diametro, A2, ea tamē, in quibus educta dividunt eas parallelas, quæ vicissim abscindunt de ipsis, AL, AF, versus, A, eandem partem, quam ab ipsis, QL, XF, abscindunt eductæ, versus tamen puncta, L, F, vt ex. g. notabimus punctum, T, in quo educta, AP, abscindit ꝑ. ipsius, QL, versus, L, sicut etiam

etiam parallela, RZ ,
 abscindit ab, LA , ver-
 sus, A , & ipsius, LA ,
 sic ergo puncta notata
 erunt, Q, Y, Z, Φ, Θ ,
 $\Delta, \Gamma, \Pi, R, X$, per
 qua si extendatur cur-
 ua linea, dico propin-
 quissimè sic Parabolā
 delineari, prædictā nē-
 pè puncta esse in Pa-
 rabola, cuius diame-
 ter, AZ , & basis, QX ,
 etenim habet hæc pro-



rietatem in præhabito Corollario declaratam, vel, ut clarius loquar,
 XF , ad, ER , exempli gratia habet rationem compositam ex ratione, X
 F , ad, FV , idest, propter constructionem, ex ratione, FA , ad, AE , & ex
 ratione, VE , ad, ER , hæc est adhuc ex ratione, FA , ad, AE , duæ autē
 rationes, FA , ad, AE , componunt ratione quadrati, FA , ad quadratum,
 AE , ergo, XF , ad, ER , est ut quadratum, FA , ad quadratum, A
 E , sed sic etiam est, FX , ad parallelam ipsi, AZ , interiectam inter, A
 F , & Parabolam circa diametrum, AZ , in basi, QX , ergo punctum,
 R , est in tali parabola: Hoc idem ostendemus eodem modo de ceteris
 punctis, $\Pi, \Gamma, \Delta, \Phi, \Theta, Z, Y$, ergo dicta puncta sunt omnia in dicta pa-
 rabola. Hic quidē modus debuisset poni Lib. 4. siue in meo Tractatu de
 Spectu Vstorio iam in lucem edito, sed quia oritur hic ex proprietate
 proximè demonstrata, nec illud prius menti subuenit; propterea idip-
 sum hic subiungere libuit.

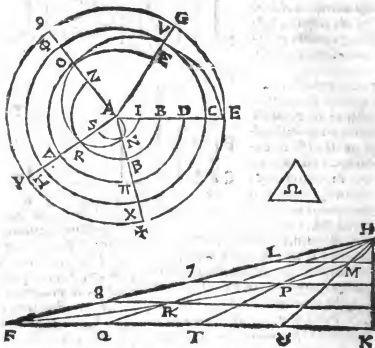
Corol. 1.
 L 4.

THEOREMA X. PROPOS. X.

SI in spirali ex prima reuolutione orta sumatur punctū,
 quod non sit initium, nec terminus eiusdem spiralis,
 ab initio autem spiralis ad dictum punctum agatur recta
 linea, & super initio spiralis centro ad distantiam dicti pū-
 cti describatur circulus, eiusdem portio comprehensa du-
 cta linea, & portione eius, quæ dicitur reuolutionis initia-
 tiua, quam abscindit circumferentia dicti circuli, & circū-
 ferentia eiusdem, quæ est ad consequentia, tripla est figu-
 ræ comprehensæ ducta linea, & portione spiralis, quæ est
 ad consequentia vsque ad initium spiralis.

K k k . 2

Sit



Sit spiralis ex prima reuolutione orta, AOVE, primus circulus, EYG, sumptum in spirali utcumq; punctum, V, & centro, A, intervallo autem, AV, circulus descriptus, VHX. Dico portionē, AOVA, comprehensam spiralis portione, AOV, & recta, AV, esse $\frac{1}{2}$ portioneis eiusdem circuli comprehensæ rectis, AV, AC, & circumferentia, VHXC. Exponatur triangulus rectangulus, HkF, rectum habens angulum, FKH, cuius latus, HK, æquale sit ipsi, AC, & kF, circumferentiæ, CXHV, erit ergo triangulus, HFk, æqualis portioni circuli, cuius basis est circumferentia, CXHV; descripta deinde intelligatur parabola, FRH, cuius vertex, H, quam tangat, KH, in, H, & FK, sit axi eiusdem æquidistans. Dico trilineum, HRFk, esse æquale spatium circumferentiæ, VHX C, spirali, VOA, & recta, AC, contento (quod spatium breuitatis causa dicatur residuum portioneis circuli, VHC,) si enim non, erit eo maius, vel minus, sit primò maius, & ut in antecedenti trilineo, HRFk, figura circumscripta intelligatur ex triangulo, HM₃, & ex trapexijs, P₃, R₄, F₆, composita, & alia inscripta ex trapezijs, M₄,

1. huius.
10. l. 4.

M₄, **P**₆, **R**_k, pariter composita, ita vt circumscripta superet inscriptam minori spatio, quam sit differentia dictarum figurarum (quæ differentia sit spatium, Ω ;) igitur trilineum, **H** β **F****K**, minori quantitate superabit figuram inscriptam, quam spatium residuum portionis circuli, **VHC**, ergo figura inscripta erit maior dicto residuo, quod est absurdum, nam si, **AC**, diuidamus similiter, vt, **KH**, in p α n α tis, **IBD**, & describerimus per eadem puncta super centro, **A**, circumferentias, **INS**, **BRZ**, **DΠOΞ**, ostendemus, vt in antecedenti figuram compositam ex fascijs, **IBβ**, **BDΔ**, **DCXΦ**, esse æqualem figuræ inscriptæ trilineo, **HβFk**, & consequenter esse maiorem spatio residuo portionis circuli, **VHC**, cui tamen inscribitur, quod est absurdum.

Sit nunc trilineum, **HβFk**, minus eodem, α , dicto residuo, & cætera, vt prius constructa, quia ergo circumscripta figura superat inscriptam minori quantitate, quam sit, α , superabit ipsum trilineum, **HβFK**, multò minori quantitate, ergo figura circumscripta minor erit spatio residuo portionis circuli, **VHC**, ostendemus autem, vt supra figuram compositam ex fasciore, **ANI**, & ex fascijs, **IBR**, **BDO**, **DCV**, esse æqualem figuræ circumscriptæ trilineo, **HβFk**, ergo erit minor spatio residuo iam dicto, cui tamen circumscribitur quod est absurdum, trilineum ergo, **HβFk**, neq; maius, neq; minus est spatio residuo iam dicto, ergo illi æquale, sicut triangulus, **HFK**, est æqualis portioni circuli, cuius basis est circumferentia, **CHV**, sed triangulus, **Hfk**, est sexquialter trilinei, **HβFK**, ergo talis portio est sexquialtera spatij residui iam dicti, ergo est tripla spatij, quod spirali, **AROV**, & recta, **AV**, continetur, quod erat ostendendum.

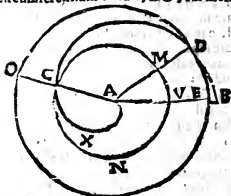
Elicitur
ex prima
l. 4.

THEOREMA XI. PROPOS. XI.

SI ab initio spiralis in prima reuolutione ortæ educantur rectæ lineæ vtcumque ad ipsam spiralem terminantes, spatia sub portionibus spiralis abscissis pereductas versus initium, erunt vt cubi earundem educatarum.

Sit spiralis in prima reuolutione orta, **ACDB**, ipsa, **AB**, reuoluta, & spiralis initium, **A**, à quo ad ipsam spiralem terminantes sint educatæ vtcumq; **AC**, **AD**. Dico spatium sub portione spiralis, **AXC**, & educatæ, **AC**, a \int spatium sub portione spiralis, **AXCD**, & educatæ, **AD**, esse vt cubum, **AC**, ad cubum, **AD**. Centro igitur, **A**, interuallis, **C**, **D**, sint descripti circuli, **CMVN**, **DGE**, & sic
pro-

producta, AC, vsq; ad circumferentiam circuli, DG, cui incidat in, O, portio igitur circuli, CAVN, ad portionem circuli, DAEGO, habet. rationem composita ex ea, quam habet portio, CAVN, ad



Defin. 12.
l. 1.

Coroll. 2.
3. huius.

33. Sexti.
Elem.
7. huius.

portionem, OAE
G, idest ex ratione quadrati, VA, ad quadratum, A

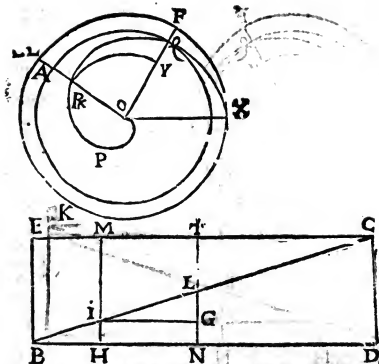
E, & ex ratione portionis, OAE, ad portionem, DAEGO, idest ex ratione circumferentiæ, EGO, ad circumferentiam, EGD, idest ex ratione, VA, ad, AE, duæ autem rationes quadrati, VA, ad quadratum, A E, & ipsius, VA, ad, AE, componunt rationem cubi, VA, ad cubum, AE, ergo portio, CAVN, ad portionem, DAEGO, erit vt cubus, VA, ad cubum, AE, sunt autem spatia, AXC, AXCD, tertiarum partes dictarum portionum, ergo spatium, AXC, id spatium, AXCD, erit vt cubus, VA, ad cubum, AE, quod erat ostendendum.

Ex antec.

THEOREMA XII. PROPOS. XII.

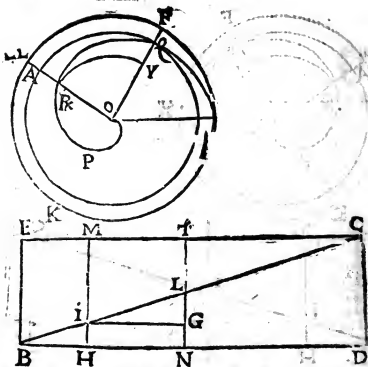
Compræhensum spatium sub spirali, quæ est minor ea, quæ sub prima reuolutione fit, nec habet terminum initium spiralis, & rectis, quæ à terminis ipsius in spiralis initium ducuntur, ad sectionem habentem radium æqualem maiori earum, quæ à termino ad initium spiralis ducuntur, arcum verò, qui intercipitur inter duas rectas secundum easdem partes spiralis, habet eandem rationem, quam rectangulum compræhensum sub rectis à terminis in principium spiralis ductis, vna cum quadrati excessu, quo maior dictarum linearum superat minorẽ, ad quadratum maioris linearum à terminis ad initium spiralis coniuatarum.

Sit



Sit spiralis ex prima revolutione ΩO , $OPQX$, primus circulus, ΩkXF , cuius, radius, & voluta sit, OX , spiralis, PQ , minor ea, quæ sub prima revolutione fit, nec habet terminum initium spiralis, iunctis autem, OA , OQ , & ipsæ usque ad circumferentiam, $F\Omega KX$, productis, cui incidant in, Ω , F . Dico trilineum, $PQOQ$, ad sectorum, AOQ esse vt rectangulum, AOQ , cum $\frac{1}{2}$. quadrati, APQ , ad quadratum, AO . Exponatur parallelogrammum rectangulum, ED , cuius latus, CD , sit æquale ipsi, OX , & BD , circumferentiæ, $F\Omega KX$, & sit iuncta, BC , & CT , sit æqualis circumferentiæ, $Xk\Omega$, TM , circumferentiæ, ΩP , & ME , circumferentiæ, FX , & per puncta, M , T , ducantur ipsi, CD , parallelæ, MH , TN , quarum, MH , secet, BC , in, I , & per, I , ipsi, EC , parallelæ ducatur, IG , erit ergo, MC , æqualis circumferentiæ, $Xk\Omega P$, & quia circumferentiæ, $XF\Omega k$, ad circumferentiã, $I\Omega kX$, est vt, XO , ad, OQ , idest, EC , ad, CM , est vt, XO , ad, OQ , est autem, EC , ad, CM , vt, EB , ad, MI , ergo, EB , ad, MI , erit vt, XO , ad, OQ , sunt autem ipsæ, XO , EB , æquales, ergo etiam æquales erunt ipsæ, MI , OQ ,

7. huius.
4. Sexti
Elem.



- I, QQ , sic ostendemus esse æquales ipsas, OQ , TL , quia ergo se-
 Corol. 2. ctor, AOQ , ad sectorem, ΔOF , est vt quadratum, QO , ad quadra-
 3. huius. tum, OF , idest vt quadratum, IM , ad quadratum, MH , idest vt
 omnia quadrata, MG , regula, EB , ad omnia quadrata, MN , &
 10. l. 2. sector, ΔOF , ad circulum, FK , est vt circumferentia, ΔF , ad cir-
 cumferentiam, $F\Delta KX$, idest vt, MT , ad, EC , idest vt omnia qua-
 9. huius. drata, MN , regula, EB , ad omnia quadrata, ED , & circulus, ΔKX
 24. l. 2. F , spatij, $OXQ\&PO$, triplus est, idest, se habet ad illud, vt omnia
 Ex ant. quadrata, ED , ad omnia quadrata trianguli, EBC , regula, EB ,
 item spatium, $OXQ\&P$, ad spatium, $OQ\&PO$, est vt cubus, OX ,
 ab cubum, OQ , idest vt cubus, EB , ad cubum, MI , idest vt omnia
 Coro. 12. quadrata trianguli, EBC , ad omnia quadrata trianguli, MIC , er-
 1. 2. go ex æquali sector, AOQ , ad spatium, $OQ\&PO$, erit vt omnia
 quadrata, MG , ad omnia quadrata trianguli, MIC , & quia spatium,
 $OQ\&PO$, ad spatium, $\&PO$, est vt cubus, OQ , ad cubum, $O\&$, id-
 F. Cor. 12. est vt cubus, MI , ad cubum, TL , idest vt omnia quadrata triangu-
 1. 2. li, MIC , ad omnia quadrata trianguli, TLC , ergo sector, AOQ ad
 spa-

spatium, OPR , erit vt omnia quadrata, MG , regula, MI , ad omnia quadrata trianguli, TLC , est autem idem sector, AOQ , ad spatium, $OPRQ$, vt omnia quadrata, MG , ad omnia quadrata trianguli, MIC , regula eadem, ergo sector, AOQ , ad reliquum spatium, dempto spatio, OPR , à spatio, $OPRQ$, erit vt omnia quadrata, MG , regula, MI , ad omnia quadrata trapezij, $MILT$, sed hæc sunt, vt quadratum, GT , ad rectangulum, GTL , cum $\frac{1}{2}$. quadrati, LG , ergo, conuertendo, spatium, ROQ , ad sectorem, AOQ , erit vt rectangulum, AOR , cum tertia parte quadrati, AR , ad quadratum, AO , quod erat ostendendum. 28. l. 1.

THEOREMA XIII. PROPOS. XIII.

IN eadem antecedentis figura centro, O , distantia, OR , descripta circumferentia, RY , ostendemus trilineum, ARQ , ad trilineum, RQY , esse vt, RO , cum $\frac{1}{2}$. RA , ad, RO , cum tertia parte ipsius, RA .

Quia enim ex antecedente sector, AOQ , ad spatium, QRO , est vt quadratum, AO , ad rectangulum, AOR , cum $\frac{1}{2}$. quadrati, AR , per conuersionem rationis, idem sector ad trilineum, ARQ , erit vt quadratum, AO , ad rectangulum, ORA , cum $\frac{1}{2}$. quadrati, RA , nã dempto rectangulo, AOR , à quadrato, AO , remanet rectangulum, ORA , i. rectangulum, ORA , cum quadrato, RA , à quo ablato $\frac{1}{2}$. remanet rectangulum, ORA , cum $\frac{1}{2}$. quadrati, RA , id est cum rectangulo sub $\frac{1}{2}$. RA , & sub, RA , quod cum rectangulo, ORA , compositum fit rectangulum sub composita ex, OR , & $\frac{1}{2}$. RA , & sub, RA , conuertendo igitur trilineum, ARQ , ad sectorem, AOQ , erit vt rectangulum sub composita ex, OR , & $\frac{1}{2}$. RA , & sub, RA , ad quadratum, OA , insuper sector, AOQ , ad sectorem, ROY , est vt quadratum, OA , ad quadratum, OR , & quia idem sector, AOQ , ad spatium, QRO , est vt quadratum, AO , ad rectangulum, AOR , cum $\frac{1}{2}$. quadrati, RA , id est sector, AOQ , ad reliquum dempto à spatio, ROQ , sectore, ROY , id est ad trilineum, QRY , erit vt quadratum, AO , ad reliquum rectanguli, AOR , cum $\frac{1}{2}$. quadrati, RA , ab eo dempto quadrato, RO , id est ad rectangulum, ORA , cum $\frac{1}{2}$. quadrati, RA , erat autem trilineum, ARQ , ad rectorem, AOQ , vt rectangulum sub composita ex, OR , & $\frac{1}{2}$. RA , ad quadratum, AO , ergo ex æquali trilineum, ARQ , ad trilineum, RQY , erit vt rectangulum sub composita ex, OR , & $\frac{1}{2}$. RA , & sub, RA , ad rectangulum, ORA , cum $\frac{3}{4}$. parte quadrati, RA , id est ad rectang. sub composita 1. Secundi Elem.
Coroll. 2. 3. huius.
3. Secundi Elem.

posita ex, OQ , & $\frac{1}{2}$. QA , & sub, QA , & quia horum reſtangularium altitudines ſunt æquales, ideò trilineum, AQO , ad trilineum, QOY , erit vt, OQ , cum $\frac{1}{2}$. QA , ad, OQ , cum tertiã parte, QA , quod oſtendere opus erat.

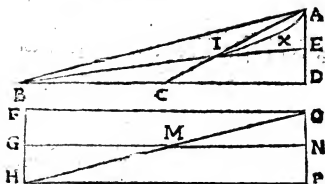
THEOREMA XIV. PROPOS. XIV.

SI duæ reſtæ lineæ ducantur, quarum altera parabolam tangat, altera verò ducta axi, vel diametro eiufdem æquidiftans, eandem ſecet, iuncto verò puncto contactus cum hoc ſectionis puncto, rurfus ab hoc puncto ad latus illi oppoſitum in faſto triangulo reſta producat, quæ curuam ſecabit parabolæ, à quo ſectionis puncto ducatur axi, vel diametro parallela quouſq; incidat in tangentem: Triangulum ſub eduſtis ad ſecantem à puncto contactus, ad portionem parabolæ eiſdem interceptam erit, vt quadratum totius tangentis ad reſtangularum ſub eadem, & ſub illius abſciſſa per eam verſus punctum contactus per ſecundò ductam axi, vel diametro parallelam, vna cum $\frac{1}{2}$. quadrati differentiæ dictarum tangentium.

Sit parabola curua, BIA , quam tangat, DA , in puncto, $\hat{A}DB$, verò axi, vel diametro eiufdem parallela eandem ſecet in puncto, B , iunctis verò, BA , à puncto, A , ducatur intra triangulum, ABD , ad latus oppoſitum, BD , vtcumq; AC , ſecans curuam, AIB , in, I , à quo verſus tangentem, AD , ducatur, IE , axi, vel diametro iam dicto æquidiftans. Dico igitur triangulum, ABC , ad trilineum, ABI , eſſe vt quadratum, DA , ad reſtangularum, DAE , vna cum $\frac{1}{2}$. quadrati, DE . Exponatur parallelogrammum, FP , cuius angulus, OPH , ſit æqualis angulo, ADB , &, OP , æqualis ipſi, AD , &, HP , ipſi, BD , abſcindatur deinde ab, OP , verſus, O , ipſa, ON , æqualis ipſi, AE , & per, N , ducatur, GN , parallela ipſi, HP , ſecans iungentem, HO , in, M , (ſint enim iuncta, H , O , puncta reſta, HO ,) ſit verò regula, HP . Quia ergo, BD , ad, DC , eſt vt, D A , ad, AE , per conuerſionem rationis, & conuertendo, CB , ad, B D , erit vt, ED , ad, DA , ideſt vt, NP , ad, PO , ideſt vt omnia quadrata, GP , ad omnia quadrata, FP , regula, HP , ſed vt, CB , ad, B D , ſic triangulus, ABC , ad triangulum, ABD , ergo vt omnia quadrata, GP , ad omnia quadrata, FP , ſic erit triangulus, ABC , ad triangulum, ABD , quod ſerua,

Corol. 9.
huius ad
poſteriorẽ
demonſt.
10. l. 2.

In-



Infuper omnia quadrata, FP, sunt tripla omnium quadratorum
 trianguli, OHP, & ideo sunt ad illa, vt triangulus, ABD, ad se-
 ctionem, AIB, cuius est triplus, quod etiam serua. Vltcrius omnia
 quadrata trianguli, OHP, ad omnia quadrata trianguli, OMN,
 sunt vt cubus, PO, ad cubum, ON, idest vt cubus, DA, ad cubum,
 AE, idest vt sectio, AIB, ad sectionem, AXI, (sunt enim tertiæ par-
 tes triangulorum, ABD, AIE, qui inter se sunt, vt cubi, DA, AE,)

ergo ex æquali omnia quadrata, GP, ad omnia quadrata trianguli,
 OMN, erunt vt triangulus, ABC, ad sectionem, AXI, sed omnia
 quadrata, GP, ad omnia quadrata trianguli, OHP, erant vt idem
 triangulum, ABC, ad sectionem, AIB, ergo omnia quadrata, GP,
 ad reliquum, demptis omnibus quadratis trianguli, OMN, ab
 omnibus quadratis trianguli, OHP, scilicet ad omnia quadrati tra-
 pezij, MHPN, erunt vt triangulus, ABC, ad reliquum, dempta
 sectione, AXI, a sectione, AIB, scilicet ad trilineum, AIB, sed omnia
 quadrata, GP, ad omnia quadrata trapezij, MHPN, sunt vt
 quadratum, HP, ad rectangulum sub, HP, MN, vna cum $\frac{1}{2}$. qua-
 drati, GM, idest vt quadratum, PO, ad rectangulum sub, PO, ON,
 vna cum $\frac{1}{2}$. quadrati, PN, ergo triangulus, ABC, ad trilineum, A
 BI, erit vt quadratum, PO, ad rectangulum, PON, vna cum $\frac{1}{2}$. qua-
 drati, PN, idest vt quadratum, DA, ad rectangulum, DAE, vna
 cum $\frac{1}{2}$. quadrati, DE, quod erat ostendendum.

24. l. 1.

Elicitur
ex prima
l. 4.F. Cor. 22.
l. 2.

23. l. 2.

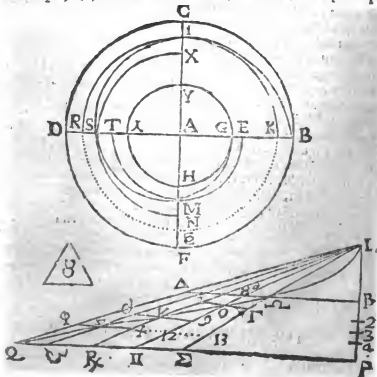
THEOREMA XV. PROPOS. XV.

Spatium sub spirali ex quacunq; reuolutione genita,
 præterquam ex prima, & recta eiusdem numeri cum

spatio, ad circulum eiusdem numeri, est vt compositum ex
 rectangulo sub radio eiusdem circuli, & sub radio circuli
 vnitate minoris, vna cum 3. parte quad. differentiæ vtri-
 usq; radij, ad quadratum maioris radij prædictorum.

Sit quicunq; circulus, CDFB, spatium eiusdem numeri cum eo,
 quod cōtinetur sub spirali, GMSIB, & voluta, GB; circulus vnita-
 te minor ipsæ, YAHG. Dico spatium dictum ad circulum, BCD
 F, esse vt rectangulum, BAG, cum tertia parte quadrati, GB, ad
 quadratum, AB. Exponatur triangulus, LPQ, rectum habens ar-
 gulum ad, P, cuius latus, LP, sit æquale ipsi, AB, & latus, PQ,
 æquale composito ex tot circumferentijs circuli, CDFB, quot ra-
 dij primi circui sunt in, AB, deinde intra triangulum, LPQ, ver-
 tice, L, descripta sit parabola, cuius curua transeat per, Q, quæ
 sit, LQ, ita vt, LP, sit eandem tangens in, L, & secans paralle-
 la axi ipsa, QP, abscindatur deinde ab, LP, recta, LB, æqualis ipsi-

20. l. 4.



AG,

AG, & per, β , ducatur, $\beta\Delta$, parallela ipsi, QP, secans curuam parabolæ in, α , & iunctis, L α , producat, L α , vsq; ad, QP, cui incidat in, Σ . Quia igitur est, QP, ad, P Σ , vt, PL, ad, L β , per conuersionem rationis, PQ, ad, Q Σ , erit vt, LP, ad, P β , quotuplex ergo est, LP, ipsius, P β , radio primi circuli æqualis, totuplex erit, QP, ipsius, Q Σ , est autem etiam totuplex, QP, circumferentiæ, CDFB, ergo, Q Σ , erit æqualis circumferentiæ, CDFB, est autem, L P, æqualis ipsi, AB, ergo triangulus, LQ Σ , circulo, CDFB, æqualis erit. Dico ulterius trilineum, LQ α , æquari spatio circuli, CD FB, nempe contento sub spirali, GSI β , & voluta, GB, si enim nō, erit eo maior, vel minor, sit primo, maior quantitate spatij seorsum expositi, δ , diuisa autem bifariam, Q Σ , in, β , iungatur, L β , rursus bifariam diuisantur, Q β , β Σ , in punctis, &, Π , & iungantur, &L, Π L, & sic semper fiat, donec deuentum sit ad triangulum minore spatij, δ , sit is triangulus, L Π Σ , per puncta autem, in quibus, L Π , L β , L&, secans curuam, Q α , scilicet per, O, V, Z, ducantur, QP, parallelæ, 7 Γ , 69, ϕ †, quæ si producantur secant, β P, in punctis, 2, 3, 4, quia ergo, Q&, & β , β Π , Π Σ , sunt æquales facile ostendemus per Coroll. Prop. 9. huius, etiam, P ϕ , 43, 32, 2 β , esse æquales, similiter facile ostendemus, trapezia, QZ, Σ V, V O, & triangulum, LO Γ , simul collecta æquari triangulo, L Π Σ , i. esse minora spatij, δ , habemus ergo spatij, LQ α , circumscriptam figuram ex triangulis, LQ&, L†Z, L ϕ V, L Γ O, & aliam eidem inscriptam ex triangulis, LZ†, LV ϕ , LO Γ , LQ Σ , compositam, quam circumscripta excedit minori spatij, quam sit, δ , ergo trilineum, LQ α , excedet inscriptam multo minori spatij, ergo inscripta erit maior spatij, GMSI β , quod est absurdum, nam si centro, A, semidiаметris æqualibus ipsis, L ϕ , L γ , L δ , describantur sectores, vel sectorum residua, AkIR, XSN, TME, habebimus spatij, BISM ϕ , inscriptam figuram ex sectoribus, vel sectorum residuis iam dictis compositam, & aliam circumscriptam ex sectoribus, vel sectorum residuis, BAC, IAR, SAN, MAE, compositam, & quia, Σ Q, ad, QP, est vt, β P, ad, PL, &, PQ, ad, Q&, est vt, L P, ad, P ϕ , ex æquali, Σ Q, ad, Q&, erit vt, β P, ad, P ϕ , idest vt GB, ad, BK, idest vt circumferentiæ, CDFB, ad circumferentiæ, CB, (nam dum punctus, B, describit totam circumferentiæ, CDFB, punctus describens spiralem percurrit ipsam, GB, & dum, B, descripsit circumferentiæ, CB, idem punctus percurrit ipsam, BK,) est autem, Q Σ , æqualis circumferentiæ, CDFB, ergo, Q&, æqualis erit circumfer. CB, est verò, Q&, ad, ϕ Z, vt, PL, ad, L ϕ , idest vt, BA, ad, Ak, idest vt circumferentiæ, CB, ad circumferentiæ, IK,

ergo.

Coroll. 9.
huius, ad
poster de.
monstr.

Iuxta 24
huius

Iuxta prop.
10. Elem.

Iux. Cor.
1. tertiz
huius.

Coroll. 9.
huius, ad
posterio-
rem de-
monstr.

Elicitur
ex 4. Sex.
ti Elem.

Corol. 2.
3. huius.

Elici tur
ex Corol.
3. huius.

ergo, $\angle Z$, erit æqualis circumferentiæ, IK , & est altitudo trianguli, $\text{L}\angle\text{Z}$, id est $\text{L}\angle$, æqualis ipsi, kA , ergo triangulus, $\text{L}\angle\text{Z}$, sectori, KAI , æqualis erit. Eodem modo ostendemus triangulum, LVB , æquari sectori, AXS , & triangulum, LO7 , sectori, ATM , & tandem triangulum, $\text{Ab}^{\circ}\text{n}$, sectori, AHG , ergo figura inscripta trilineo, $\text{LQ}\Omega$, æqualis erit inscriptæ spatio, GMSIB , est autem illa maior spatio, GMSIB , ergo figura inscripta spatio, GMSIB , erit eodem spatio, GMSIB , maior, quod est absurdum, non ergo trilineus, $\text{LQ}\Omega$, maior est spatio, GMSIB .

Sed dico neq; esse minorem eodem spatio, GMSIB , si enim est sit adhuc defectus spatium, 8 , modo autem supra adhibito circumscribatur trilineo, $\text{L}\angle\text{Q}$, figura, & alia inscribatur ex triangulis composita, ita ut circumscripta superet inscriptam minori spatio, quam sit, 8 , deseruiant autem nobis iam in prima parte descriptæ figuræ, tum intra, & extra trilineum, $\text{L}\angle\text{Q}$, tum intra, vel extra spatium, GMSIB : Igitur figura circumscripta trilineo, $\text{L}\angle\text{Q}$, superabit eundem trilineum multò minori spatio, quam sit, 8 , nempe quam spatium, GMSIB , excedat trilineum, $\text{L}\angle\text{Q}$, ergo figura huic trilineo circumscripta erit minor spatio, GMSIB , ostendemus autem eandem æquari figuræ circumscriptæ eidem spatio, GMSIB , modo supra posito, ergo figura circumscripta spatio, GMSIB , erit eodem minor, quod est absurdum, igitur trilineus, $\text{L}\angle\text{Q}$, neq; est maior, neq; minor spatio, GMSIB , ergo est eidem æqualis, & est triangulus, $\text{LQ}\Sigma$, æqualis circulo, CDFB , ergo circulus, CDFB , ad spatium, GMSIB , erit ut triangulus, $\text{LQ}\Sigma$; ad trilineum, $\text{LQ}\Omega$, est autem triangulus, $\text{LQ}\Sigma$, ad trilineum, $\text{LQ}\Omega$, ut quadratum, P ad rectangulum, $\text{PI}\beta$, vna cum $\frac{1}{2}$. quadrati, $\text{P}\beta$, ergo circulus, CDFB , ad spatium, GMSIB , erit ut quadratum, FL , ad rectangulum, $\text{PI}\beta$, vna cum $\frac{1}{2}$. quadrati, $\text{P}\beta$, id est ut quadratum, BA , ad rectangulum, BAG , vna cum $\frac{1}{2}$. quadrati, GB , quod erat nobis ostendendum.

Ex ant.

SCHOLIUM.

Poterant autem, ut in Prop. 5. & 6. huius, componi figura, que circumscribuntur, & inscribuntur, ex trapezibus, in quo casu, circumscriptio, & inscriptio intelligi debuisset circa trilineum, $\text{Q}\Omega\Sigma$, vel in supra demonstratis propositionibus poterant dicta figura ex triangulis componi, veluti in hac effectum est, & tunc circumscriptio, & inscriptio sectionibus, FLH , in Schemate posterioris demonstrationis Prop. 9. & HRF , in Propos. 10. fieri debuisset intelligi, hanc tamen varietatem prosequutus sum, ut pateat utroq; modo nos, quod inquirimus, obtinere posse.

THEO-

THEOREMA XVI. PROPOS. XVI.

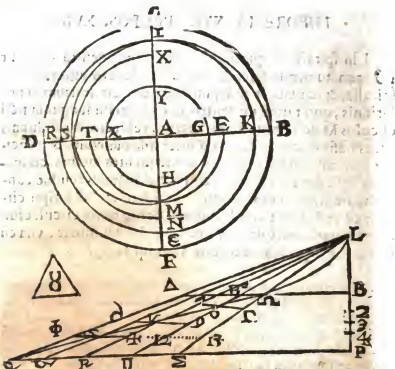
SI in spirali ex quacunq; reuolutione genita sumatur punctum, quod non sit initium, nec terminus eiusdem spiralis, & iungantur cum puncto, quod est initium reuolutionis, quo tanquam centro ad distantiam sumpti puncti circulus sit descriptus, huius sector, vel sectoris residuum, cuius basis sit circumferentia inter hoc punctum, & principium circulationis ad partes consequentes inclusa, ad spatium helicum ab eodem sectore, vel sectoris residuo, apprehensum, erit vt quadratum semidiametri descripti circuli, ad reſtanguſm sub eodem, & sub radio circuli eiusdem numeri cum spirali vnitate prædicta minoris, vna cū tertia parte quadrati excessus vtriuſq; radij.

Conſpiciatur antecedentis figura, in qua sumpto vtcunq; puncto in spirali, $GMSIB$, quod sit, I , intelligatur descriptus circulus, $IR \cdot K$. Dico igitur sectorem, vel eius residuum, cuius basis est circumferentia, $IR \cdot k$, ad reſtas, IA , AK , terminata, ad spatium sub spiralis porſiones, $ISMG$, & reſtis, IA , AG , esse vt quadratū, IA , ad reſtanguſm sub, IA , AG , vna cum $\frac{1}{3}$ quadrati, Gk ; in ipsa enim, $Q\Sigma$, iam habebus, & Σ , æqualem circumſerentiæ, $CDFB$, terminanti ad, C , B , producat, $\frac{1}{3} \Sigma$, quouſque ſecet ambas, LN , $L\Sigma$, vt in, 12 , 13 , & quia, & Σ , ad, Z , 13 , est vt, ΣL , ad, L , 13 , vel vt, PL , ad, $L4$, siue, BA , ad, AK , siue circumſerentia, $CDFB$, ad circumſerentiā, $IR \cdot K$, idē circumſerentia, $IR \cdot k$, erit æqualis ipſi, Z , 13 , si ergo diuidamus, Z , 13 , bifariam, & factas porſiones adhuc bifariam, & sic ſemper fiat, iungētes diuiſionum pūcta cum, L , & per puncta, in quibus iſte iungētes ſecant curuſ parabolę, $Z \cdot n$, ductis ipſi, Z , 13 , parallelis, vt in antecedenti circumſcriperimus trilineo, $LZ \cdot n$, figuram, & aliā inſcriperimus, ex triangulis compoſitam, & ſimiliter ſpatio, $AISMGA$, figuram ex ſectoribus, vel eorum reſiduiſ compoſitam circumſcriperimus, velut in antecedenti (quam quia antecedentis propoſitionis methoſo ſimilis est, hic explanare mitto) & aliam inſcriperimus, tandem oſtendemus trilineum, $LZ \cdot n$, neq; maius, neq; minus eſſe ſpatio, $AISMGA$, & idē illi eſſe a quale; ſimiliter oſtendemus triangulum, LZ , 13 , ſectori, $IP \cdot K$, vel ſectoris reſiduo, æqualem eſſe, nam triangulus, $LQ \cdot \Sigma$, ad triangulum, LZ , 13 ,

Iuxta 4.
Sexti Elc.

Defin. 12.
l. 1.

ha-



habet rationem compositam ex ratione trianguli, $LC\Sigma$, ad triangulum, $L&\Sigma$, idest ex ratione, $Q\Sigma$, ad, $\Sigma&$, vel ex ratione circumferentiæ, $CD\text{FBC}$, ad circumferentiam, $CD\text{FB}$, quia prædictis æquatur idest ex ratione circuli, $CD\text{FB}$, ad sectorem, vel eius residuum, $AC\text{DFBA}$, & ex ratione trianguli, $L&\Sigma$, ad triangulum, LZ_{13} , idest ex ratione quadrati, PL , ad quadratum, L_4 , idest ex ratione quadrati, BA , ad quadratum, AK , idest ex ratione sectoris (dicatur sic breuitatis causa, siue sit sector, siue eius residuum) $AC\text{DFB}$, ad sectorem, $\text{AIR}\epsilon\text{KA}$, quæ duæ rationes componunt rationem circuli, $CD\text{FB}$, ad sectorem, $\text{AIR}\epsilon\text{KA}$, ergo triangulus, $LQ\Sigma$, ad triangulum, LZ_{13} , erit vt circulus, $CD\text{FB}$, ad sectorem, $\text{AIR}\epsilon\text{KA}$, sed triangulus, $LQ\Sigma$, est æqualis circulo, $CD\text{FB}$, ergo triangulus, LZ_{13} , sectori, $\text{AIR}\epsilon\text{KA}$, æqualis erit, & est trilineus, $LZ\alpha$, æqualis spatio, $\text{AISMG}\alpha$, ergo sector, $\text{AIR}\epsilon\text{KA}$, ad spatium, $\text{AISMG}\alpha$, erit vt triangulus, LZ_{13} , ad trilineum, $LZ\alpha$, .i. vt quadratum, $4L$, ad rectangulum sub, $4L$, 1β , cum $\frac{1}{3}$. quadrati, 4β , .i. vt quadratum, 1α , ad rectangulum sub, 1α , AG , cum $\frac{1}{3}$. quadrati, GK , quod erat ostendendum.

THEO.

THEOREMA XVII. PROPOS. XVII.

Compræhensum spatium sub spirali, quæ est minor ea, quæ sub vna reuolutione fit, nec habet terminum initium spiralis, & rectis, quæ à terminis ipsius in reuolutionis initium ducuntur ad sectorem habentem radium æqualem maiori earum, quæ à termino ad initium reuolutionis ducitur, arcum verò, qui intercipitur inter duas rectas secundum eandem partem spiralis; habet eandem rationem, quam rectangulum compræhensum sub rectis à terminis ad initium reuolutionis ductis, vna cum tertia parte quadrati excessus, quo maior dictarum linearum superat minorem, ad quadratum maioris earundem.

In eadem antecedentis figura supponamus assumptam, IS, portionem spiralis in vna reuolutione genitæ, qui non habet terminum initium talis spiralis, à cuius extremis punctis, I, S, sunt ductæ ad, A, initium reuolutionis ipsæ, SA, IA, & fit sector, IAR, cuius semidiameter sit æqualis maiori ductarum, IA, AS, nempe ipsi, IA. Dico sectorem, IAR, ad trilineum, IAS, esse vt quadratum, RA, ad rectangulum, RAS, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati, RS, (vtamur constructis in eadem figura) sector igitur, IFK, est æqualis triangulo, LZ, vt in antecedenti ostensum est, eodem modo probabimus triangulum, L $\frac{1}{2}$, esse æqualem sectori, AFK, ergo reliquus triangulus, LZ $\frac{1}{2}$, erit æqualis reliquo sectori, IAR; similiter iuxta antecedentem ostendimus spatium, AISMGA, esse æqualem trilineo, L7, & spatium, ASMGA, esse æqualem trilineo, LV, ergo reliquum spatium, IAS, erit æquale trilineo, LZV, ergo sector, IAR, ad trilineum, LZV, erit vt triangulus, LZ $\frac{1}{2}$, ad trilineum, LZV, id est vt quadratum, L4, ad rectangulum sub, 4L3, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, 34, id est vt quadratum, IA, vel, RA, ad rectangulum sub, RA, A', vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati, RS, quod ostendit re opus erat.

THEOREMA XVIII. PROPOS. XVIII.

Trilineum, IRS, ad trilineum, ISX, erit vt, SA, cum $\frac{1}{3}$. SR, ad, SA, cum $\frac{1}{3}$. SR.

M m m

Huius

Huius demonstratio non erit alia à demonstratione 13. huius, propterea ibi recolatur.

THEOREMA XIX. PROPOS. XIX.

Primi circuli spatium helicum ad spatium helicum secundi circuli erit, ut tertia pars quadrati radij primi circuli ad rectangulum sub radio primi, & secundi circuli, vna cum tertia parte quadrati excessus radij secundi circuli super radium primi, Spatium verò secundi circuli ad spatium tertij erit, ut rectangulum sub radio eiusdem, & sub radio circuli vnitatis minoris, id est primi, vna cum tertia parte quadrati differentie horum radiorum, ad rectangulum sub radio eiusdem, & sub radio circuli vnitatis maioris, id est tertij, vna cum tertia parte quadrati differentie istorum radiorum, & sic deinceps in reliquis.

Exponentur super eodem centro, A, circuli, primus, HRVO, secundus, kLNM, tertius autem, CDFB, cum spatijs sub spiralibus eiusdem numeri cum circulis, primo, AGHA, secundo, HPKMH, tertio autem, MZSBM. Dico spatium primum ad secundum esse ut $\frac{1}{3}$. quadrati HA, ad rectangulum sub, HA, AM, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati, HM, secundum verò ad tertium esse ut rectangulum sub, HA, AM, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, HM, ad rectangulum sub, MA, AB, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati, MB. Nam spatium, AGH, ad spatium, HPkM, habet rationem compositam ex ratione spatij, AGH, ad circulum, OVRH, id est ex ratione $\frac{1}{3}$. quadrati, HA, ad quadratum, HA, & ex ratione circuli, OVRH, ad circulum, MkLN, id est ex ratione quadrati, HA, ad quadratum, AM, & ex ratione circuli, CDFB, ad spatium, HPMH, id est ex ratione quadrati, MA, ad rectangulum, MAH, vna cum $\frac{1}{3}$. quadrati, MH, quæ rationes componunt rationem $\frac{1}{3}$. quadrati, AH, ad rectangulum, MAH, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, HM. Item spatium, HPMH, ad spatium, MZSBM, habet rationem compositam ex ratione spatij, HPMH, ad circulum, kLNM, id est ex ratione rectanguli, HAM, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, HM, ad quadratum, AM, & ex ratione circuli, kLNM, ad circulum, CDFB, id est quadrati, MA, ad quadratum, AB, & tandem ex ratione circuli, CDFB, ad spatium, MZSBM, id est ex ratione quadrati, BA, ad rectangulum, BAM, cum $\frac{1}{3}$. quadrati, MB, quæ

ra-

9. huius.

Coroll. 2.

11. l. 3.

15. huius.

Defin. 12.

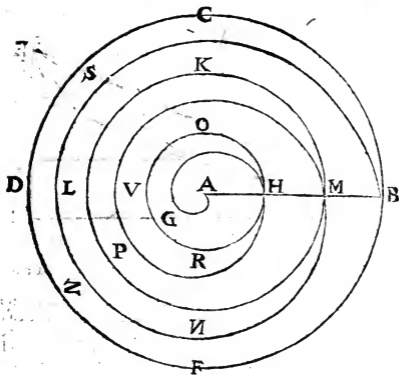
l. 1.

15. huius.

Coroll. 2.

16. l. 3.

17. huius.



rationes componunt rationem rectanguli, HAM, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, HM, ad rectangulum, MAB, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, MB. Et sic deinceps ostendemus tertium spatium ad quartum esse, ut rectangulum, MAB, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, MB, ad rectangulum sub, BA, & radio circuli unitate maioris, vna cum $\frac{1}{2}$. quadrati differentia horum radorum, quæ differentia semper est æqualis radio primi circuli, quod ostendere opus erat.

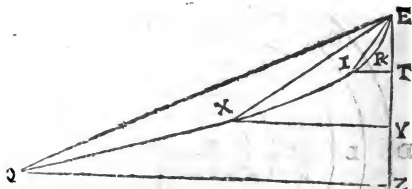
ALITER.

EXponatur triangulus, ETI, habens rectum angulum ad, T, cuius latus, ET, sit æquale radio primi circuli, & TI, eiusdem circumferentiæ, & per, EI, transeat parabolæ curua quam tangat, TE, in, E, vertice, secet verò, TI, in, I, eiusdem axi æquidistans, deinde indefinitè producta, ET, versus, T, in ea sumantur tot partes æquales ipsi, ET, quot radij primi circuli sunt in radio, AB, quæ sint,

M m m 2

sint,

20.1.4.



sint, ET, TY, YZ, & per puncta, YZ, ducantur parabolæ axi æ-
 quidistantes, YX, ZQ, curvæ eiuſdem inſinitè productæ occur-
 rentes in punctis, X, Q, & iungantur, EX, EQ. Erit igitur ſectio,
 EIX, ad ſectionem, ERI, vt cubus, YE, ad cubum, ET, ſic enim
 ſunt eorum tripla ſcilicet trianguſa, EIT, EXY, quod elicitur ex
 prima Lib. 4. & diuidendo, trilineum, EXI, ad ſectionem, ERI,
 erit vt parallelepipedum ter ſub, ET, ac quadrato, TY, & ter ſub,
 38. l. 2. YT, & quadrato, TE, cum cubo, TY, ad cubum, TE, vel vt horû
 ſubtripſa, ſcilicet, vt parallelepipedum ſemel ſub, YT, & quadra-
 36. l. 2. to, TE, & ſub, ET, & quadrato, TY, ſcilicet ſub, YT, & rectan-
 gulo, YTE, cum $\frac{1}{2}$. cubi, TY, ideſt cum parallelepipedo ſub, TY, &
 $\frac{1}{2}$. quadrati, TY, ad $\frac{1}{2}$. cubi, TE, ideſt ad parallelepipedum ſub, T
 E, vel, TY, & tertia parte quadrati, TE, nempe vt parallelepipe-
 dum ſub, TY, & quadr. ET, & rectangulo, YTE, & tertia parte
 35. l. 2. quadrati, YI, quod conficit parallelepipedum ſub, YT, & rectan-
 gulo ſub, YET, & ſub tertia parte quadrati, YT, ad parallelepi-
 pedum ſub, YI, & ſub tertia parte quadrati, TE, & quia horum
 parallelepipedorum altitudines ſunt eadem, ideò erunt, vt baſes
 P. G. Cor. ſcilicet, vt rectangulum ſub, YET, cum tertia parte quadrati, TY,
 4. Geom. ad, $\frac{1}{2}$. quadrati, ET. Eodem modo oſtendemus trilineum, EQX,
 14. l. 2. ad trilineum, EXI, eſſe vt exceſſus cubi, ZE, ſuper cubum, YE, ad
 exceſſum cubi, YE, ſuper cubum, TE, .i. vt parallelepipedum ter
 8. l. 2. ſub, ZY, & quadrato, YE, ter ſub EY, & quadrato, YZ, cum cu-
 bo, YZ, ad parallelepipedum ter ſub, ET, & quadrato, TY, ter
 ſub,

sub, YT; & quadrato, TE, cum cubo, TY, vel vt horum sub tri-
 pla .i. vt parallelepipedum sub, ZY, & quadrato, YE, sub, EY, &
 quadrato, YZ; .i. sub, ZY, & rectangulo, ZYE, cum tertia parte
 cubi, ZY; quæ conficiunt parallelepipedum sub, ZY, & his iunctis ^{35 l. 2.}
 idest rectangulo, ZYE, quadrato, YE, cum tertia parte quadrati, ^{33. l. 2.}
 ZY, idest sub, ZY, & rectangulo, ZEY, cum tertia parte quadrati,
 ZY, ad parallelepipedum sub, YT, & quadrato, TE, sub, ET, &
 quadrato, TY, cum tertia parte cubi, TY, quæ esse æqualia ostē-
 demus parallelepipedo sub, YT, & rectangulo YET, cum tertia
 parte quadrati, YT, igitur trilineum, EQX, ad trilineum, EXI,
 erit vt parallelepipedum sub, ZY, & rectangulo, ZEY, cum tertia
 parte quadrati, ZY, ad parallelepipedum sub, YF, idest sub, ZY, B.G. Cor.
 & sub rectangulo, YET, cum tertia parte quadrati, TY, & quia
 hæc parallelepipedum sunt in eadem altitudine, idcirco sunt vt bases, ^{4. gener.}
 igitur trilineum, EQX, ad trilineum, EXI, erit vt rectangulum, ZF ^{34. l. 2.}
 Y, cum tertia parte quadrati, YZ, ad rectangulum, YET, cum ter-
 tia parte quadrati, YT, est aut. m. sectio, ERI, æqualis spatio, AG
 H, & trilineum, EXI, spatio, HPMH, & trilineum, EQX, spatio, ^{Elicitur ex}
 MZSBM, ergo spatio, AGH, ad spatio, HPMH, erit vt ter- ^{9. huius.}
 tia pars quadrati, TE, ad rectangulum, TEY, cum tertia parte ^{Elicitur}
 quadrati, TY, idest vt tertia pars quadrati, HA, ad rectangulum, ^{ex 15. hui}
 HAM, cum tertia parte quadrati, HM, Similiter concludemus ^{us.}
 spatio m; HPMH, ad spatio m; MZSBM, esse vt rectangulum, HA
 M, cum tertia parte quadrati, HM, ad rectangulum, MAB, cum
 tertia parte quadrati, MB, quod ostendere oportet.

COROLLARIUM.

Hinc patet si ducatur quædam tangens parabolam, qua in partes
 quotcunq; æquales diuidatur, & per puncta diuisionum du-
 cantur recta linea diametro parallela, quousq; incidant in curuam
 parabola, his incidentia punctis cum contactus puncto iunctis, spa-
 tium sub prima iungente, & subtensa curua parabola ad trilineum
 sub prima, & secunda iungente, & ab illis apprehensa curua, .i. vt
 tertia pars quadrati prima partis tangentis est ad rectangulum sub
 prima parte, & composito ex prima. & secunda cum tertia parte qua-
 dratis secunda. Similiter hoc trilineum ad trilineum sub secunda,
 & tertia iungente, & ab illis apprehensa curua parabola, .i. vt re-
 ctangulum sub prima, & sub composito ex prima, & secunda parte
 tangentis (enumeratione semper a puncto contactus inceperit) vna cum
 tertia parte quadratis secunda ad rectangulum sub composito ex prima,

Et secunda, & sub composito ex prima, secunda, & tertia parte, una cum tertia parte quadrati tertia partis, & sic trilinea deinceps sequentia esse, ut hæc rectangula deinceps sequentia cum tertia parte dictorum quadratorum, eodem enim modo supra adhibito hoc ostendetur. Quotiescunq; autem tangens sit æqualis radio circuli spiralium alicuius numeri veluti fuit, EZ, æqualis ipsi, AB, & diuidatur in tot partes æquales, in quot radius talis circuli diuiditur a circumferentijs inferiorum circuloꝝ, tunc nedum in parabola dicta spatia se habent, ut dictum est, sed etiam sunt æqualia spatijs dictorum circuloꝝ, primum nempe primo, secundum secundo, & sic deinceps, a puncto contactus parabola dictorum spatiorum enumeratione facta, quod est admirabile, hæc autem ex supradictis manifesta sunt.

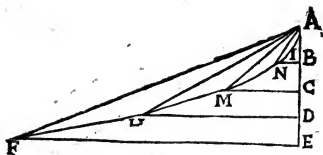
THEOREMA XX. PROPOS. XX.

SI parabolam tetigerit recta linea, quæ diuidatur in quotcunq; partes æquales, per puncta autem diuisionum, & extremum ducantur rectæ lineæ diametro parabolæ, æquidistantes, quousq; in eiusdem curuam incidant, iungantur autem puncta incidentiæ cum puncto cõtractus. Spatium sub prima iungente, & subtensa ab eadem curua erit septima pars spatij sub prima, & secunda iungente, & ab ijs appræhensa curua compræhensû. Hoc verò ad spatium sub secunda, & tertia iungente, & appræhensa curua, erit vt 7. ad 19. Hoc autem ad spatium sub tertia, & quarta iungente & ab ijs inclusa curua, vt 19. ad 37. & sic deinceps, prout indicat apposita numerorum series.

Sit tangens parabolam, AHF, ipsa, AE, diuisa in quotcunq; partes æquales, AB, BC, CD, DE, ductis autem à punctis, B, C, D, E, diametro parallelis, quousq; incidant curuam, AHF, ipsæ, B, N, CM, DH, EF, iungantur puncta incidentiæ, quæ sint, F, H, M, N, cum puncto, A, & AN, dicatur prima iungens, AM, secunda, AH, tertia, & sic deinceps. Dico spatium sub, AN, & ab ea subtensa curua, esse ad spatium sub, NA, AM, & curua, MN, idest ad trilineum, AMN, vt 7. ad 19. hoc verò ad trilineum, AHM, vt 7. ad 19. & sic deinceps, prout indicat opposita numerorum series se habere trilinea deinceps subsequentiâ. Est enim spatium, AIN, ad trilineum, AMN, vt 7. quadrati, AB, ad rectangulum, CAB, cum

Ex Coro.
antec.

Series spatiorum	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Series numerorum	1.	7.	19.	37.	61.	91.	127.



cum 3. quadrati, CB, si ergo, AB, statuatur 8. erit, AC, 6. rectangulum, CAB, 18. tertia pars quadrati, BC, erit 3. quæ iuncta ipsi 18. efficit 21. erit ergo qualium partium quadratum, AB, est 9. rectangulum, CAB, cum tertia parte quadrati, BC, 21. & tertia pars quadrati, AB, est 3. est igitur spatium, AIN, ad trilineum, AMN, vt 3. ad 21. id est vt 1. ad 7. Eodem modo reperiemus trilineum, ANM, ad, AMH, esse vt 7. ad 19. & hoc ad trilineum, AHF, vt 19. ad 37. & sic deinceps, prout indicat series numerorum supra posita, quod demonstrandum erat.

COROLLARIUM:

Hinc patet si exposita sint spirales in quotcunque revolutionibus genita, initio circulationis existente in, K, sint autem volute ipsa, KL, LO, OP, PG, & spirales eodem ordine procedentes, KRL, LSO, OTP, PVG, quod si, KG, fuerit equalis ipsi AE, & diuisa in punctis, L, O, P, prout diuiditur, AE, in punctis, B, C, D. spatium, KRL, erit aequale spatio, AIN, &, LSO, trilineo, AMN, &, OTP, trilineo, ANM, & tandem, PVG, trilineo, AHF, & sic deinceps, vnde etiam hæc spatia se habebunt, prout indicat supraposita series nume-

Elicitur ex
9. huius
Elicitur
12. huius.

1 Secunda series num. 1. 6. 12. 18. 24. 30. 36. 1

subnectere non inutile mihi visum fuit. Hoc autem tantum circa præfatas demonstrationes dicam, quod licet in Prop. 12. & 14. indivisibilibus, nempe omnibus quadratis parallelogrammorum, qua ibi describuntur, usus fuerim, tamen etiam modo consueto potuissent demonstrari, si ex. g. vice omnium quadratorum parallelogrammi, ED, regula, EB, ibi assumptæ, usus fuisset parallelepipedo sub altitudine, DB, basi autem quadrato, EB, vel pro omnibus quadratis trianguli, CBE, regula eadem, EB, usus esset pyramide sub altitudine, CE, basi eodem quadrato, EB, etenim similiter demonstratio absolui potuisset, hac omnium quadratorum parallelogrammorum ibidem consideratorum dimissa congerie, & substitutis parallelepipedis, vel pyramidibus, aut earum frustis, ubi opus erat. Hæc inuenire volui, ut prædicta omnia stylo veteri demonstrabilia esse, etiam aliter ab Archimede patet.

THEOREMA XXI. PROPOS. XXI.

SI exponatur series spiraliū, & circularum deinceps à primis, in spatijs verò sub spiralijs, & volutis, cylindrici, & conici in eadem altitudiue stantes intelligantur constituti tamquam in basijs, similiter & in circulis constituti esse cylindri, & conii intelligantur. Cylindri inter se, & cylindrici pariter inter se, siue ad cylindros comparati, siue conii inter se, & conici inter se siue ad conos comparati eandem rationem, quam bases habebunt.

Patet hæc propositio, nam cylindrici, & conici in eadem altitudine constituti sunt inter se, ut bases; sunt autem prædicta solida per constructionem in eadem altitudine posita, ergo erunt inter se, ut ipsæ bases; Vocentur autem Cylindri, & Cylindrici, necnon Conici eiusdem numeri cum spatijs, quibus insistant. i. primus cylindrus, vel conus, qui est in primo circulo, secundus cylindrus, vel conus, qui est in secundo circulo tamquam in basi; primus cylindricus, vel conicus, qui est in spatio helico primi circuli tamquam in basi, secundus cylindricus, vel conicus, qui est in spatio secundi circuli, & sic deinceps.

B. G. H.
Coroll. 4.
gener. 34.
l. 2.

COROLLARIUM.

ET quia in suprapositis Propositionibus basium prædictorum solidorum ratio fuit adiuventis, idè eandem pro dictis solidis rationem inde colligemus.

THEOREMA XXII. PRO POS. XXII.

Primus cylindrus nonuplus est primi conici.

Hæc Propositio pariter manifesta est, nam primus cylindrus ad primum cylindricum est, vt primus circulus ad suum spatium idest in ratione tripla, primus verò cylindricus ad primum conicū est in ratione tripla, quia sunt in eadem basi, quod est spatium primi circuli, & in eadem altitudine, & idè primus cylindrus ad primum conicum est in ratione nonupla, quæ ex duabus triplis conflatur.

I. Cor. 4.
gener. 34.
12.

THEOREMA XXIII. PROPOS. XXIII.

Secundus cylindrus ad secundum conicum est, vt triplum quadrati radij secundi circuli, ad rectangulum sub radio eiusdem secundi, & radio primi circuli, vna cū tertia parte quadrati differentię eorundem radiorum.

Secundus enim cylindrus ad secundum cylindricum est, vt secundus circulus ad suum spatium idest vt quadratum radij secundi circuli ad rectangulum sub radio eiusdem, & sub radio primi vna cū tertia parte quadrati differentię eorundem radiorum, secundus verò cylindricus triplus est conici secundi, quoniam in eadem basi, & altitudine cum eo constituitur, ergo est ad illum, vt dictum rectangulum sub radijs primi, & secundi circuli, vna cum tertia parte quadrati differentię eorundem ad horum coniunctorum tertiã partem, & ex æquali secundus cylindrus ad secundum conicum erit, vt quadratum radij primi circuli ad tertiã partem rectanguli sub radijs primi, & secundi circuli, cum nona parte quadrati differentię eorundem radiorum, idest, vt triplum quadrati radij secundi circuli ad rectangulum sub radijs primi, & secundi circuli, vna cum tertia parte quadrati differentię eorundem radiorum.

I. Cor. 4.
gener. 14.
13.

COROLLARIUM I.

Hinc patet reliquorum cylindrorum ad conicos eiusdem numeri rationem eandem esse illi, quam habet triplum quadrati radij circuli, quæ est basis talis cylindri, ad rectangulum sub eodem radio, & radio circuli unitate minoris, præa cum tertia parte quadrati differentia utriusq; radij, quod eod. modo ostendetur.

COROLLARIUM II.

Paret insuper, quod eadem methodo facillè inueniemus rationem cuiuscunq; cylindri, vel frusti cylindri, & conici, vel frusti conici, in basibus aliquibus ex iam consideratis spatijs constituti, quæ ob facilitatem dimitto; ut ad aliqua ex antecedentium librorum, & huius propositionibus constructa Problemata, sine Theoremata, speculationem nostram conuertentes, utilitatis eximia, quam superius tradita doctrina, etiam ad praxim deducta, afferre potest, illustriora quædam præbeamus argumenta.

PROBLEMA I. PROPOS. XXIV.

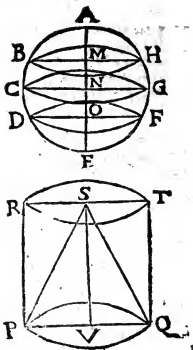
Cylindrum, vel conum constituere æqualem datæ spheræ, vel spheroidi, vel eiusdem portioni.

Sit spheræ, vel spheroides, ACEG, circa diametrum, AE, oportet illi cylindrum, vel conum æqualem constituere. Exponatur cylindrus, RQ, & conus, SPQ, quorum altitudo, ut, SV, sit æqualis ipsi, AE, & basis æqualis circulo transeunti per centrum, N, qui sit, CG, rectè axem secans, seu pro spheroides, si, AE, non sit axis, RQ, altitudinè habeat æqualem altitudini spheroidis iuxta planũ, CG, assumptæ, & sit in basi æquali ellipsi, CG. Erit ergo cylindrus, RQ, sexquialter spheræ, vel spheroidis, ACEG, & conus subduplus eiusdè, si igitur in eadè basi fiat cylindrus, cuius altitudo sit 3. ipsius, SV, hic erit æqualis datæ spheræ, vel spheroidi, ACEG, si vero, fiat conus altitudinis duplæ ipsius, VS, in eadem pariter basi, illic eisdè spheræ, vel spheroidi æqualis erit, conus enim, & cylindrus, in eadè basi constituti sunt, ut altitudines.

Sit rursus constituendus cylindrus, vel conus, æqualis eiusdem spheræ, vel spheroidis, portioni, BAH, vel, DAE, ut ponatur tunc ergo cylindrus, RQ, cuius basis sit æqualis circulo, vel ellipsi, LE, altitudo verò, SV, æqualis ipsi, AO, seu altitudini portionis, BAE, C. G. H.
Coroll. 4.
Gener. 24.
l. 2.

Coroll.
34. l. 3.

iuxta planum, DF, assumptæ, erit igitur hic cylindrus ad portionem, DAF, vt, OE, ad compositam ex $\frac{1}{2}$. OE, & $\frac{1}{2}$. OA, hanc autem rationem habeat, SV, ad aliam altitudinem, erit ergo cylindrus, RQ, ad cylindrum altitudinis inuentæ, & in eadem basi, PQ, constitutum, vt, OE, ad compositam ex $\frac{1}{2}$. OE, & $\frac{1}{2}$. OA, i. vt cylindrus, RQ, ad portionem, DAF, igitur inuentus cylindrus erit æqualis portioni, DAF. Triplicetur nunc altitudo inuenti cylindri, & fiat conus talis altitudinis, in eadem cum eo basi, hic igitur conus erit æqualis inuento cylindro, & subinde portioni, DAF. Eodem modo inuenietur cylindrum, vel conum æqualem portioni, BAH.



PROBLEMA II. PROPOS. XXV.

Solido quocunq; in eadem basi, & altitudine cum cylindro constituto, ad quod cylindrus notam rationem habeat, cylindrum, & conum, inuenire, æqualem dato solido.

Sit solidum quodcunque, DAF, ad quod cylindrus, BF, in eadem basi, DF, & eadẽ altitudine cum eodẽ constitutus, habeat notam rationem. Oportet cylindrum inuenire, & conum, æqualem dato solido. Fiat ergo, vt cylindrus, BF, ad solidum, DAF, sic altitudo, quæ fit, AE, ad altitudinem, EI, & per, I, ducatur planum producens in cylindro, BF, circulum, GK, constituensque cylindrum, GF, igitur, vt, AE, ad, EI, sic erit cylindrus, BF, ad cylindrum, GF, & sic

fic cylindrus, BF, ad solidum, DAF, unde cylindrus, GF, erit æqualis solido, DAF. Rursus triplicetur altitudo, EI, & fiat conus eiusdem altitudinis in basi, DF, hic igitur conus erit æqualis cylindro, GF, & subinde solido, DAF, quod inuenire opus erat.



COROLLARIUM I.

Hinc patet nos etiam posse inuenire cylindrum, & conum, necdū aequalem dicto solido, sed qui ad ipsum habeat datam rationem, si enim altitudo inuenti cylindri, vel conus aequalis dicto solido, fiat id aliam altitudinem in data ratione, tamen conuersa, & harum altitudinum ultimò inuentarum in eisdem basibus cum predictis fiat cylindrus, & conus, habebunt isti ad dictum solidum datam rationem, vt facillè apparet.

COROLL. II. SECTIO I.

A

Hinc etiam patet cylindrum in basi apicis sphaeræ, vel sphaeroidalis, constitutum cuius altitudo ad altitudinem eiusdem apicis sit, vt, 2. ad 21. esse aequalem eidem apici.

CORO. 21.
34. l. 3.

SECTIO II.

B

Vterius habetur quoque cylindrum, ad cuius altitudinem altitudo tympani sphaeræ, vel sphaeroidalis sit, vt semidiameter basis tympani ad reliquum, dempta ab eadem recta linea, ad quam dimidia secunda diametri circuli, vel ellipsis sit, vt circulus ad quadratum, cui circumscribitur simul cum excessu, quo dicta linea excedit 7. tertia proportionalis semidiametri basis tympani, & dimidia secunda diametri dicti circuli, vel ellipsis, esse aequalem dato tym-

CORO. 12.
34. l. 3.

SECTIO III.

C

Et cylindrum, ad cuius altitudinem, altitudo anuli stricti circularis, vel elliptici, sit vt quadratum ad circulum, cui circumscribitur, in basi existentem circulo, cuius radius sit aequalis secunda dia.

Coro. 11.
34. 13.

diametro circuli, vel ellipsis, qua reuoluitur, esse æqualem dicto anulo striato. Similiter autem inueniemus cylindrum æqualem anulo lato circulari, vel elliptico; & eius portionibus, abscissis planis ad axem reuolutionis rectis; siue cuiusq; ex figuris Corollariorum 26, 27, 28, 29. Lib. 2. Similiter inueniemus cylindrum æqualem Malo Rosæ; vel Cocœ, vel Citri; vel Oliuæ; Conoidi Parabolico, vel hyperbolico, eiusdem frusto, Apici parabolico, Semianulo striato, vel lato, & semibasibus striatis, medijs, vel latis, Aceruis minori, vel maiori parabolicis. Tympano hyperbolico, & portionibus eorundem supra consideratis, & cylindricis, vel conicis, qui in basibus spatij sub spiralibus, & volutis constituuntur. Triplicatis autem altitudinibus inuentorum cylindrorum, in quibus, & eisdem basibus cum cylindris, constituantur coni, isti prædictis solidis æquales erunt, & iuxta Coroll. 1. antecedentis inueniemus pariter cylindrum, vel conum, qui ad quoduis ex prædictis solidis datam ratione in habeat.

PROBLEMA III. PROPOS. XXVI.

Sphæram inuenire æqualem dato cylindro. Similiter, & sphæroidem circa datum axim æqualem dato cylindro.

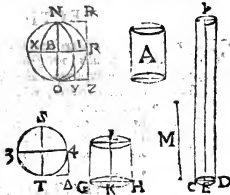
Vide Dauidem Riualetum in Commé. in Arch. ad prop. 1. secundij de Sphæra, & Cylindro.

Sit cylindrus datus, A, oportet illi æqualem sphæram inuenire. Fiat cylindrus rectus, CFD, sexquialter cylindri, A, deinde inter,

altitudinem, FE, & basis diametrû, CD, duæ mediæ continuè proportionales, iuxta methodû ab alijs traditam, inueniantur, quæ sint, M, GH, descripto autem circulo circa alterâ distarû mediarum tanquam diametrum, vt circa, GH, fiat is basis cuiusdam cylindri altitudinis æqualis ipsi, G

H, & sic tandem sphæra, B, circa diametrum æqualem ipsi, GH, constituta. Dico sphæram, B, esse æqualem cylindro, A. Est enim CD, ad, GH, vt, M, ad, FE, permutando, CD, ad, M, est vt, G

H, vel,



H, vel, **LK**, altitudo, ad, **FE**, vt verò, **CD**, ad, **M**, ita quadratum **CD**, ad quadratum, **GH**, vel circulus, **CD**, ad circulum, **GH**, ergo vt, **LK**, ad, **FE**, sic circulus, **CD**, ad circulum, **GH**, ergo cylindri, **CFD**, **GLH**, sunt æquales, est autem cylindrus, **CFD**, sexquialter cylindri, **A**, ergo cylindrus, **GLH**, erit sexquialter cylindri, **A**, est autem cylindrus, **GLH**, etiam sexquialter sphaeræ circa diametrum, **GH**, vel illi æqualem, **NO**, descriptæ idem sphaeræ, **B**, ergo sphaera, **B**, erit æqualis dato cylindro, **A**.

E. G.
Coroll. 4.
gen. 34.
l. 2.
Coroll. 1.
34. l. 3.

Sit nunc datus axis, **NO**, circa quem fit constituenda sphaeroidis æqualis dato cylindro, **A**, si igitur sphaera circa diametrum, **NO**, esset æqualis dato cylindro, non posset circa hanc diametrum fieri alia sphaeroidis æqualis dato cylindro, sed talis sphaeroidis esset eadē sphaera. Non sit autem æqualis sphaera, **B**, cylindro, **A**, tunc fiat sphaera æqualis cylindro, **A**, quæ sit circa diametrum, **ST**, deinde fiat, vt, **NO**, ad, **ST**, sic quadratum, **ST**, ad, **XI**, bifariam diuisam in, **B**, centro, & fiat sphaeroidis circa diametros, **NO**, **XI**, igitur primi axes, **NO**, **ST**, reciprocè respondent secundorum axium, **ST**, vel, **34**, **XI**, quadratis ergo sphaera, **ST**, erit æqualis sphaeroidis, **NX**, **OI**, ergo sphaeroidis, **NXOI**, circa datum axim, erit æqualis dato cylindro, **A**, quod erat inueniendum.

Coroll. 10.
Prop. 34.
l. 3. scilicet. 4.

COROLLARIUM.

Hinc colligitur cuiusq; ex solidis in antecedenti, & Corollarijs eiusdem nominatis sphaeram æqualem nos scire constituere, necnon sphaeroidem æqualem circa datum axem, sphaeramque, ac sphaeroidem, quæ ad quodcunq; ex ipsis datam rationem habeat. Proposito enim ex illis quocunq; solido, inuenietur primò cylindrus, qui ad ipsum datam rationem habeat, deinde fiet sphaera, vel sphaeroidis circa datum axim, æqualis inuento cylindro, quæ subinde ad datum solidum datam rationem habebit: Et vniuersaliter patet si discamus, dato cylindro æquale solidum ex iam consideratorum genere construere, consequenter eiusmodi solidum nos scire construere, quod ad aliud quod ex nominatis in antecedenti Propositione, & eiusdem Corollarijs, datam rationem habeat.

25. huius.

PROBLEMA. IV. PROPOS. XXVII.

Dato cylindro apicem sphaeralem æqualem constituere, vel sphaeroidalem, & hunc circa datum axem.

Vta. 7

Vtatur antecedentis figura, in qua supponamus dato cylindro, A, constituendum esse æqualem apicem sphaeralem, vel sphaeroidalem, & hunc circa datum axem. Exponatur autem cylindrus, FCD, qui ad cylindrum, A, sit, vt 2 1. ad 1. deinde inter, C D, FE, sumantur duæ mediæ continuè proportionales, GH, M, & fiat cylindrus altitudinis, GH, qui sit, GLH, ac supponatur ipsi, LK, assumptam esse æqualem ipsam, NO, igitur duæ tangentes circulum circa, NO, in punctis, O, R, N, quæ sunt, OZ, ZR, RN, concurrentibus in Z, R, patet, OZ, esse æqualem ipsi, GK, & RZ, æquatur ipsi, Lk, ergo cylindrus, qui nasceretur ex reuolutione parallelogrammi, NZ, circa manentem axem, RZ, esset æqualis cylindro, GLH, ostendemus autem, vt in antecedenti cylindrum, GLH, esse æqualem cylindro, CFD, vnde patebit cylindrum genitum ex, NZ, ad cylindrum, A, esse vt 2 1. ad 1. sed idem ad apicem, qui nasceretur ex reuolutione trilinei, OZR, circa, RZ, esse vt 2 1. ad 1. nam cylindrus ex, NZ, duplus est cylindri ex, BZ, ergo apex genitus ex trilineo, OZR, æqualis erit cylindro, A.

Corol. II.
34.13.

Sit nunc inueniendus apex sphaeroidalis circa datum axem, RZ, vel illi æqualem, qui sit æqualis cylindro, A, si ergo talis esset apex sphaeralis, qui sit ex, OZR, non esset alius apex sphaeroidalis circa, RZ, vel illi æqualem, qui esset æqualis cylindro, A; si verò non sit, inueniatur apex sphaeralis, vt, TΔ4, æqualis cylindro, A, deinde vt, RZ, ad huius facti apicis axim, 4Δ, ita fiat dimidij diametri basis eisdem, idest, TΔ, quadratum ad quadratum, OY, siue, BI, & per, I, transeat elliptis, NIO, & ducatur eandem tangens in, I, quæ sit, IY, igitur quia, RZ, ad, 4Δ, axim facti apicis sphaeralis est, vt quadratum, TΔ, dimidij diametri basis, ad quadratum, OY, idest, vt circulus, qui est basis facti apicis sphaeralis, TΔ4, ad circulum, qui est basis alterius, idest, isti apices erunt æquales: nam se habebunt, vt cylindri in eisdem cum illis basibus, & circa eisdem axes existentes, qui cylindrici erunt æquales, nam axes basibus reciproçè respondet; ergo apex sphaeroidalis, qui fiet ex, OYI, & est circa axim, IY, æqualem ipsi, RZ, datæ, erit æqualis cylindro, A, quæ inuenienda erant.

COROLLARIUM.

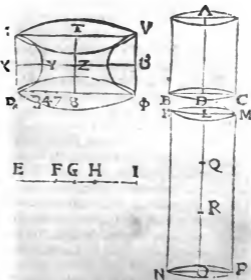
Patet autem, quod inxt.: Corollarium antecedentis poterimus etiã inuenire apices sphaerales, vel sphaeroidales circa datum axim, ad datum quodcumq; solidum ex enumeratis in dicto Corollario datam rationem habentes.

PRO.

PROBLEMA V. PROPOS. XXVIII.

Dato cylindro tympanum sphaerale eidem æquale constituere, cuius axis semidiametro basis sit æqualis.

Sit datus cylindrus, ABC, cuius axis, AD, basis, BC, oportet illi æquale tympanū sphaerale constituere, cuius axis semidiametro basis sit æqualis. Ut hoc fiat exponatur recta linea terminata quæcūque, EI, quæ sit bifariā secta in, G, & vt quad. circulo cuiusq; circūscriptum ad eundem circulum, ita fiat, GE, ad, EF, sumatur deinde, FH, quæ sit excessus, quo, PE, superat t. tertiæ proportionalis dūarum, IE, EG,



deinde vt, HI, ad, IE, ita fiat, AD, ad, LO, altitudinem alterius cylindri in basi, NP, æquali ipsi, BC, existentis, & tandem inter LO, &, ON, basis semidiametrum, sumantur duæ mediæ continuo proportionales, QO, OR, & in altitudine æquali, OR, nempe, T8, basi, R8, æquali eidem, OR, fiat parallelogrammum rectangulum, 58, in cuius plano describatur semicirculus, SY8, & ipsum cum parallelogrammo reuo uatur circa manentem axim, T8, donec redeat vnde discessit, patet autem, quod ex parallelogrammo fiet cylindrus, vt, 8ϕ, & ex figura, SY8T, tympanum sphaerale, 5Yϕ. Dico igitur hoc tympanum esse æquale dato cylindro, ABC, &, T8, æqualem ipsi, 88, semidiametro basis, 8ϕ. Sint parallelogrammum, Sϕ, & figura, SYϕ, per axem transecta, & X&, per centra, X, &, circulorum ducta, tecans, T8, in, Z, manifestum est igitur, quod, XZ, bifariam secabit à circumferentia, SY8, vt in, Y, cum, 88, sit æqualis, 88, & ipsi, XZ, S8, autem sit dupla, XY, vnde si secetur, 88, bifariam in, 4, crit, 44, æqualis ipsi, 4Y, sit autem ab ea decepta, 8, ad quam, 48, sit vt

O o o

qua-

quadratum ad inscriptum circulum, & in, $R8$, sumpta, 37 , æqualis excessui, quo, 38 , iuperat $\frac{1}{2}$. tertiæ proportionalis duarum, 88 , 84 , patet ergo, quod cylindrus, $S\phi$, ad tympanum, $SY\phi$, est vt, 8 , ad, 87 . Quoniam verò, vt, LO , ad, OQ , sic est, QO , ad, OR , ideo vt, LO , ad, OR , vel, $T8$, ipsi æqualem, ita quadratum, LO , ad quadratum, OQ , vel ita quadratum, RO , seu quadratum, 88 , ad quadratum, NO , vel ita circulus, $R\phi$, ad circulum, NP , ergo duo cylindri, $S\phi$, KP , quorum axes reciproce basibus respondent, erunt æquales, quod serua. Vltcrius, quia vt, IE , ad, EG , sic est, 88 , ad, 84 , & vt, EG , ad, EF , sic quadratum ad inscriptum circulum, & ita etiam, 84 , ad, 83 , ergo ex æquali, IE , ad, EF , erit vt, 88 , ad, 83 . Similiter quia, IE , ad, EG , est vt, 88 , ad, 84 , & E , G , ad $\frac{1}{2}$. tertiæ proportionalis duarum, IE , EG , est vt, 48 , ad $\frac{1}{2}$. tertiæ proportionalis duarum, 88 , 84 , ideo ex æquali, vt, IE , ad, $\frac{1}{2}$. tertiæ proportionalis duarum, IE , EG , ita, 88 , erit ad $\frac{1}{2}$. tertiæ proportionalis duarum, 88 , 84 , eadem autem, IE , 88 , ad, FE , 38 , erant in eadem ratione, ergo ad excessus duarum, EF , 83 , super $\frac{1}{2}$. tertiæ proportionalium, IE , EG , ex vna parte, & 88 , 84 , ex alia, erunt in eadem ratione .i. vt, IE , ad, FH , ita erit, 88 , ad, 37 , sed etiam, vt, IE , ad, EF , sic esse ostentum est, 88 , ad, 83 , ergo, colligendo, vt, IE , ad, EH , ita, 88 , ad, 87 , & per conuersionem rationis, & conuertendo, vt, HI , ad, IE , ideo vt, AD , ad, LO , ideo vt cylindrus, BAC , ad cylindrum, NLP , vel illi æquale, $S\phi$, (vt ostentum est) ita, 78 , ad, 88 , sed vt, 78 , ad, 88 , ita tympanum, $SY\phi$, ad cylindrum, $S\phi$, ergo, vt cylindrus, BAC , ad cylindrum, $S\phi$, ita tympanum, $SY\phi$, ad cylindrum, $S\phi$, ergo cylindrus, BAC , æquatur tympano, $SY\phi$, cuius axis, $T8$, semidiametro basis, 88 , est æqualis, quod, &c.

COROLLARIUM.

Colligitur autem iuxta Corollarium Proposit. 26. huius, nos posse inuenire tympana sphericalia, quorum axes semidiametris basium sint æquales, quæ ad datum quodcumq; ex solidis in sectione 30. Coroll. 2. Propos. 25. huius enumeratis, datam rationem habeant.

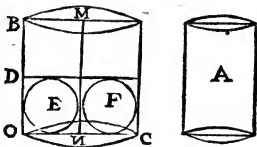
PROBLEMA VI. PROPOS. XIX.

Dato cylindro anulum strictum circulem æqualem inuenire.

Sit datus cylindrus, A, oportet illi anulum strictum circulem æqualem inuenire. Reperiamus ergo cylindrum, qui ad cylindrū A, sit, vt duplum cuiusuis quadrati ad circulum diāo quadrato incriptum, & deinde huic inuento cylindro alius inueniatur æqua-

Vt in pro.
pol. 16,
huius.

lis, BC, cuius axis sit equalis diametro ba-
sis .i. MN, ipsi, OC,
qui diuidatur bifariā
in, R, & per, R, du-
cto plano oppositis
basibus æquidistan-
te, sit constitutus cy-
lindrus, DC, in quo
planum per axem
ductum produxerit
parallelogrammum,
DC, quod in duo se-



parabitur quadrata per ipsam, RN, sint illis incripti æquales cir-
culi, E, F, ex quorum reuolutione circa, RN, intelligatur effectus
anulus strictus circularis, EF. Dico hunc esse æqualem cylindro,
A. Nam, BC, ad, A, est vt parallelogrammum, BN, .i. vt duplū
quadrati, DN, ad circulum, E, sic autem est, BC, ad anulum stri-
ctum genitum ex, E, igitur hic anulus cylindro, A, æqualis erit,
quod inuenire oportet erat.

Elicitur
ex Corol.
11, 14, 13.

PROBLEMA VII. PROPOS. XXX.

Dato cylindro anulo latum circulem æqualem inue-
nire, dato circulo, qui per reuolutionem ipsum ge-
nerat; oportet autem datum cylindrum maiorem esse anu-
lo stricto ab eodem circulo per reuolutionem genito.

Sit datus cylindrus, E, datus circulus, CD, sit autem datus cy-
lindrus, E, maior anulo stricto per reuolutionem dati circuli circa
ipsum rectam tangentem genito. Oportet anulum latum circula-
rem inuenire ab eodem circulo per reuolutionem genitum, æqua-
lem dato cylindro, E. Sit tangens circulum, CD, in puncto, D,
ipsa, MN, circa quam fieri intelligatur reuolutio, vt describatur
anulus strictus circularis ex, CD, fiat deinde, vt anulus strictus ab
eo genitus ad cylindrum, E, ita, DC, diameter eiusdem ad aliam,
FH, (quæ erit eadem maior, quia etiam cylindrus, E, est maior

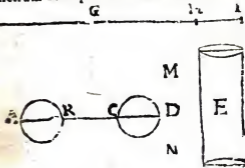
O o o 2 dicto

dicto anulo (stricto) cui adijciatur in directum, HI, ipsi, DC, æqualis, deinde tota, FI, bifariam dividatur in, G, & producta, DC, versus, C, indefinitè in ea sumatur, AD, æqualis ipsi, GI, & abscissa ab eadem ad punctum, A, ipsa, AR, eidem, CD, æquali, intelligatur circa, AR, diametrum descriptus circulus, AR, æqualis, CD. Dico anulū

latum circulearem descriptum per, A, R, reuolutum circa, MN, in tali situ, cylindro, E, æqualem esse. Nam strictus anulus descriptus à, CD, ad cylindrum, E, est vt, DC, ad, FH, &

quia, GI, est æqualis ipsi, AD, &, CD, ipsi, HI, erit, GH, æqualis ipsi, AC, ergo vt, DC, ad, FH, ita est eadem, DC, ad, IGH, vel ad,

Elicitur ex dictis in DAC, siue, AR, ad, ADR, (nam composita ex, AD, DR, est æqualis composita ex, DA, AC,) est autem vt, AR, ad compositā ex, AD, DR, ita anulus strictus genitus ex circulo, CD, ad anulū latum genitum ex circulo, AR, ergo anulus strictus genitus ex circulo, CD, ad anulū latum genitum ex circulo, AR, erit, vt idem applicetur. anulus strictus ad cylindrum, E, ergo anulus latus genitus ex circulo dato, AR, siue, CD, in tali situ, æqualis erit cylindro, E. Inuentum ergo est, quod opus erat.



COROLLARIUM I.

Iuxta Coroll. autem Prop. 26. huius, manifestum est nos etiam dictos anulos in data ratione ad datum cylindrum inuenire posse, & subinde etiam in data ratione ad quodcunq; ex solidis in Sect. 3. Cor. 2. Prop. 25. huius enumeratis.

COROLLARIUM II.

Habetur insuper si in recta, DA, indefinitè producta, continuentur à puncto, D, æquales circulorum diametri; ab eisdem circulis per reuolutionem circa, MN, demseps genitos anulos sese habere, vt numeros impares ab unitate continuè progredientes. Quod si in eadem recta linea perpendiculari ipsi, MN, vt in eadem, DA, in

dist.

definitè producta, continentur à puncto, *D*, parallelogrammorum re-
ctangulorum, in eademq; altitudine existentium, aequales bases, usq;
bisariam sectis, ab effectis punctis educantur parallelogrammorum di-
ctorum diametri, circa quas existant alia plana figurae eius conditio-
nis, ut ducta quacumq; parallela, *AD*, illius portiones in his figuris
concepta sint aequales, tum anuli descripti à dictis parallelogrammis
se habebunt ut numeri impares ab unitate deinceps expositi, tum et iā
anuli geniti à praedictis figuris: Etenim isti anuli deinceps se habe-
bunt, ut quadratum primae aequalium rectorum linearum, in ipsa, *D*
A, assumptarum, & excessus quadratorum deinceps subsequentium
aequalium linearum, ut facile innotescet, si in memoriam reuocentur,
quae dicta sunt in Coroll. 29. 34. Lib. 3. pro ibi consideratis figuris,
quibus haec quoq; adaptantur.

COROLLARIUM III.

Manifestum etiam est nos posse iuxta supradictam methodum
caetera solida attentare, ut eadem dato cylindro tum aequalia,
tum etiam in data ratione inueniamus, veluti ex. gr. basim columna-
rem strictam, latam, ac mediam, Malum Roseum, Citrium, & reliqua,
quae in Sect. 3. Cor. 2. Prop. 25. huius enumerantur, ut subinde cui-
libet ex consideratis in hoc volumine solidis inueniamus ex genere
cuiuslibet necdum aequale, sed etiam in data ratione, qua omnia singul-
latim prosequi minimè volui, tum ad vitandam prolixitatem, tum
etiam, ut alijs iucundi exercitij occasionem non eripiam, veluti, &
centri grauitatis nouorum solidorum inuentionem, nemini, quod sciam
adhuc tentatam, alijs pro nunc relinquam, sufficiat enim in praesenti
praedicta solida inueniendi rationem aliquam declarasse, centriq;
grauitatis dictorum solidorum inuestigandi materiam praebuisse.

SCHOLIUM.

Aduertendum est autem circa supradicta solida, quorum mensuram
praecise non inuenimus, ut ex. g. patet de apicibus sphaerali-
bus, tympanis, anulis, & alijs plurimis, neq; inuentionem praedictam
esse, vel fore praecisam, non tamen aspernendam, cum proximè ad ve-
ritatem accedat.

THEOREMA XXIV. PROPOS. XXXI.

SI in spatio helico primi circuli spiraliū conicus in eadem altitudine cum apice parabolico, in basi dicto circulo existente, sit constitutus; apex parabolicus erit sexquialter dicti conici.

Coroll. 8. Patet hæc Propositio, nam si in dicto circulo, ut in basi, & circa eundem axim cum dictis solidis sit cylindrus constitutus, hic erit sexcuplus apicis parabolici, & nonuplus dicti primi conici, ergo apex parabolicus ad cylindrum erit, ut 3. ad 18. & conicus ad ipsum, ut 2. ad 18. vnde apex ad conicum erit, ut 3. ad 2. id est in ratione sexquialtera, quod erat ostendendum.

THEOREMA XXV. PROPOS. XXXII.

SI circa diametrum basis semianuli stricti parabolici tanquam circa propriam diametrum sphaera, vel sphaeroidis, fuerit constituta, cuius secunda diameter sit æqualis altitudine, siue axi, eiusdem semianuli; dicta sphaera, vel sphaeroidis ipsi semianulo æqualis erit.

Hæc etiam patet, nam cylindrus in eadem basi cum semianulo dicto, & eadem altitudine, est eiusdem sexquialter, est autem etiã sexquialter dictæ sphaeræ, vel sphaeroidis, & ideo dicta sphaera, vel sphaeroidis, erit æqualis dicto semianulo, quod ostendendum erat.

Coroll. 10.
51. lib. 4.
sect. post.
1107.
Coroll. 1.
34. l. 3.

THEOREMA XXVI. PROPOS. XXXIII.

SI cylindrus, & conus, hæmisphaerium, vel hæmisphaeroides, conoides parabolicum, apex parabolicus, & sphaericalis, fuerint in basi eodem circulo, & circa eundem axim, infra scriptam rationem inter se habebunt -

Sit cylindrus, BE, in basi circulo, CE, circa axem, FD, in quibus sint etiam hæmisphaerium, vel hæmisphaeroides, CFE, conoides parabolicum, CRFkE, conus, CFE, apex parabolicus, CVF ZE, & apex sphaericalis, vel sphaeroidalis, CXYF, qualium igitur partium cylindrus, BE, est 126. talium hæmisphaerium est 84. co-

noides 63: conus 42. apex parabolicus 21. apex sphaericalis 12. unde patet haemisphaerium, vel haemisphaeroides sexquitercium esse conoidis parabolici, quadruplum apicis parabolici, & septuplum apicis sphaericalis. Conoides vero parabolicum triplum esse apicis parabolici, & quintuplum sexquiquartum apicis sphaericalis, quae ex ipsis numeris colliguntur, similiter conum, FCE, duplum esse apicis parabolici, triplum sexquialterum proximè apicis sphaericalis, quoad apicem sphaeralem enim semper proximam dictam ratione intellige, & tandem apex parabolicus ad sphaeralem erit sexquisupertripartiens quartas.



Coroll. 10.
51. l. 4. sec.
posterior.
Coroll. 1.
51. l. 4.
1. Coroll. 4.
gener. 34.
l. 2.
Coroll. 8.
51. l. 4. se-
ctio 1.
Coroll. 11.
34. l. 3.

THEOREMA XXVII. PROPOS. XXXIV.

SI in basi cylindri, & circa eundem axim, fuerint haemisphaerium, vel haemisphaeroides, conoides parabolicum, hyperbolicum, & conus, secto vero axi utcunque, ducatur planum per punctum sectionis basi aequidistans. Abscissae per ductum planum à dictis solidis portiones erunt ad solida, à quibus abscinduntur in ratione infra scripta. Similiter demptis dictis solidis singillatim à cylindro, abscissae per ductum planum portiones ad residuum cylindri, demptis solidis iam dictis, erunt in ratione infra scripta.

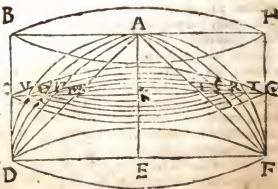
Sit cylindrus, BF, in basi circulo, DF, & circa axim, AE, circa quem in eadem basi sit haemisphaerium, vel haemisphaeroides, DV ATF, conoides parabolicum DOARF, hyperbolicum, DN ASF, & conus, DMAIF, sumpto autè utcunq; puncto in, AE, quod sit, k, per, k, ducatur planum, CG, basi, DF, aequidistans. Igitur haemisphaerium, vel haemisphaeroides, DV ATF, ad portionem, VAT, erit ut parallelepipedum sub dupla, AE, & quadrato, AE, ad parallelepipedum sub composita ex dupla, AE, & ex, EK, & sub quadrato, kA. Conoides parabolicum, DOARF, ad conoides, OAR, erit ut quadratum, EA, ad quadratum, AK. Conoides hyperbolicum, DN ASF, ad conoides, NAS, ut parallelepipedum sub composita ex sexquialtera transuersi cuiusdem lateris, & EA, & sub quadrato, E

Coroll. 7.
34. l. 3.

Coroll. 3.
51. l. 4.
Coroll. 2.
30. l. 5.

A, ad

A, ad parallelepipedum sub composita ex sexquialtera eiusdem tranſuerſi lateris, & KA, & quadrato, KA. Conus verò, DAF, ad conum, MAI, vt cubus, EA, ad cubum, AK.



F. H.
Cor. gen.
34. l. 2.

Nunc intelligatur demptum à cylindro, BF, hæmisphæricum, vel hæmisphæroides, DVATF.

Coroll. 5.
34. l. 3.

Igitur per demonstrata patet reliquum cylindri ab abscissam ab eo portionem per ductum planum esse, vt cubus, AE, est ad cubum, EK. Dempto autem conoide parabolico ab eodem cylindro; reliquum cylindri ab abscissam portionem erit, vt quadratum, AE, ad quadratum, EK.

Coroll. 9.
31. l. 4.

Dempto verò conoide hyperbolico ab eodem cylindro, reliquum cylindri ad abscissam portionem erit, vt parallelepipedum sub composita ex sexquialtera tranſuerſi lateris, & dupla axis eiusdem, & sub quadrato eiusdem axis, ad parallelepipedum sub composita ex sexquialtera eiusdem tranſuerſi lateris, & axibus vtriusq; portionis, & sub quadrato excessus maioris axis super minorem.

Coroll. 5.
30. l. 5.

Tandem dempto cono, DAF, à cylindro, BF, residuum cylindri ad abscissam portionem erit, vt cubus, AE, ad parallelepipedum sub sexquialtera, KE, & sub rectangulo, AKE, cum $\frac{2}{3}$ quadrati, KE. Nam cylindrus, BF, ad reliquum cylindri, CF, dempto frusto coni, DMIF, habet rationem compositam ex ea, quam habet cylindrus, BF, ad cylindrum, CF, id est ex ea, quam habet, AE, ad, EK, & ex ratione cylindri, CF, ad reliquum, dempto à cylindro, CF, frusto, DMIF, quæ est ea, quam habet quadratum, DE, ad rectangulum, CMK, cum $\frac{2}{3}$ quadrati, CM, vel quadratum, EA, ad rectangulum, EKA, cum $\frac{2}{3}$ quadrati, EK, est autem reliquum cylindri, BF, dempto cono, DAF, $\frac{2}{3}$ eiusdem cylindri, ergo reliquum cylindri, BF, dempto cono, DAF, ad reliquum cylindri, CF, dempto frusto, DMIF, erit in ratione composita ex ea, quam habet $\frac{2}{3}$ AE, ad, EK, id est, AE, ad sexquialteram, EK, & quadratum, AE, ad rectangulum, AKE, cum $\frac{2}{3}$ quadrati, KE, quæ duæ rationes component rationem cubi, AE, ad parallelepipedum sub sexquialtera, EK, &

Defin. 12.
l. 1.

C. Cor. 4.
gener. 34.
l. 2.

Collig. ex
L. Coroll.
4. gener.
34. l. 2.

D. G.
Cor. gen.
34. l. 2.

sub

sub rectangulo, AkE , cum 3 . quadrati AE , sic igitur erit residuum cylindri, BF , dempto cono, DAF , ad residuum cylindri, CF , dempto frusto, DMF ; cætera autem ex iuis Propositionibus patent, quæ explicanda proponiebantur.

COROLL. GENERALE.

Licet autem in superioribus huius Libri Propositionibus tantummodo cylindros, conos, sphaeras, spheroides, conoides parabolicas, & hyperbolicas, apices sphaerales, atque anulos, apices parabolicos, & semianulos, ac cætera consimilia solida fuerimus contemplati, quorum omnia plana sunt omnes figurae similes figurarum, quæ eorundem genitricis appellantur, scilicet in his solidis, assumptis tantum similibus figuris, quæ sint circuli, vel ellipses; tamen manifestum est, si vice circularum, vel ellipsium alia fuissent assumptæ similes figurae, quod eadem circa talia solida Theoremata, vel Problemata similia præpositis construere potuissimus, Vnde ex.g. veluti in Prop. 26. huius inuenimus sphaeram aequalem dato cylindro, ita si vice cylindri habuissimus cylindricum, cuius basis fuisset triangulum æquilaterum, poteramus vice sphaerae inuenire solidum, cylindrico dato similitare, genitum ex circulo, cuius nempe omnia plana fuissent omnes figurae similes, idest omnia triangula æquilatera, circuli, qui erat sphaera, & est huius solidi genitrix figura, & eodem modo in cæteris hanc commutationem prosequi, assumptis quibuscumque similibus figuris genitricium figurarum, ex quibus dicta solida ad inuicem similia genita dicuntur, quam varietatem, ut & alia quamplurima tum Problemata, tum Theoremata, quæ ex hæcenus ostensis deduci possent, quæq; Lectoris industria relinquuntur, cuiq; licebit iuxta præpositam methodum facile meditari, & propterea circa hæc non amplius immorandum mihi esse censui.

Finis Sexti Libri.

GEOMETRIÆ CAVALERII LIBER SEPTIMVS.

*In quo quacumque in antecedentibus Libris metho-
do indivisibilium demonstrata fuere,
aliam ratione, ab eadem independen-
te, breuiter ostenduntur.*

PRÆFATIO.



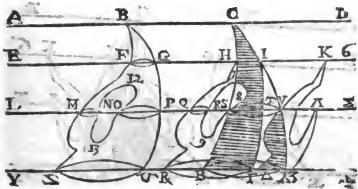
QUOMODUM GEOMETRIÆ, in sex prioribus Libris per eam, quam indivisibilium methodum non incongruè appellamus, hætenus promotæ, talis fuit, qualis hucusq; videri potuit, structura, necnon talia, qualia iacta sunt fundamenta. Illa quidem adeò firma, atq; inconcussa, esse decuit, ut veint adamantina summorum ingeniorum tamquam arietum ictibus pulsata ne minimum quidē mutantis agnoscerentur: Hoc enim Mathematicarum dignitati, ac summa certitudini, quam præ omnibus alijs humanis scientijs, nemine philosophorum reclamante, ipsa sibi vindicarunt, maximè conuenire manifestum est. An id ego sufficienter præstiterim a iorum iudicio relinquam; unicuique enim hæc perlegenti ex animi sui sententia iudicare licebit. Haud quidem me lateo circa continui compositionem, necnon circa infinitum, plurima à philosophis disputari, quæ meis principijs obesse non paucis fortasse videbuntur, propterea nempe hæsitantes quod omnium linearum, seu omnium planorum, conceptus cimerijs veluti obscurior tenebris inapprehensibilis videatur: Vel quod in continui ex indivisibilibus compositionem mea sententia prolatur: Vel tandem quod vnum infinitum alio maius dari posse pro firmissimo Geometria sternere auferim fundamento, circa quæ milibus, quæ passim in scholis circumferuntur argumentis, ne Achilæa

lea quidem armare resistere posse existimantur. His tamen ego per ea, qua Lib. 2. Prop. 1. ac illius Scholio præcipue declarata, ac demonstrata sunt, satisfieri posse dijudicavi: quoad conceptum enim omnium linearum, seu omnium planorum efformandam, facile hoc per negationem nos consequi posse existimant; ita nempe ut nulla linearum, seu planorum, excludi intelligatur. Quoad continuum autem compositionem manifestum est ex præostensis ad ipsum ex indivisibilibus componendum nos minime cogi, solum enim continua sequi indivisibilem proportionem, & è conuerso, probare intentum fuit, quod quidem cum utraq; positione stare potest. Tandem verò dicta indivisibilem aggregata non ita pertractauimus ut infinitatis rationem, propter infinitas lineas, seu plana, subire videntur, sed quatenus finitatis quandam conditionem, & naturam sortiuntur, ut propterea, & augeri, & diminui possint, ut ibidem ostensum fuit, si ipsa prout diuisa sunt accipiantur. Sed his nihilominus fortè obstrepent Philosophi, reclamabuntq; Geometrae, qui purissimos veritatis latice ex clarissimis haurire fontibus consueverunt sic obijcientes. Hic dicendi modus ad huc videtur subobscurus, durior quam par est euadit hic omnium linearum, seu omnium planorum conceptus, quapropter hunc tua Geometria ceu Gordium nodum aut auferas, aut saltem frangas, nisi dissoluas. Fregissem qui idem fateor, ò Geometra, vel omnino à prioribus Libris sustulissem, nisi indignum facinus mihi visum fuisset noua hæc Geometria veluti mysteria sapientissimis abscondere viris; ut, his fundamentis, quibus tot conclusionum ab alijs quoq; ostensarum veritates adedè mirè concordant, alicuius industria melius fortè concinnatis, huiusce nodi exoptatam illis dissolutionem aliquando præstare possint. Interim qualiscumq; mea fuerit illius tentata dissolutio, ipsum tamen in præsentis Libro, nouis alijs denudè stratis fundamentis, quibus ea omnia, quæ indivisibilem methodo in antecedentibus Libris iam ostensa sunt, alia ratione ab infinitatis exempta conceptu comprobantur, omnino è medio tollendam esse censui. Hoc verò præcipue à nobis factum est, tum ut apud eos, quibus nostra hæc indivisibilem methodus minus probabitur, non indignè nostram hanc de Continuis doctrinam Geometria titulo insigniri clarius elucescat; tum etiam ut appareat, quod non leui ratione dicti, cum possent cuncta per indivisibilem methodum præostensa, tantum per huius Libri fundamenta demonstrare, illam quoque methodum tanquam nouam, ac consideratione dignam, sumus persequenti. Nodum verò ipsum, cui negotium facefferet, non inaniter in præcedentibus Libris relictum esse, quini amo nos ipsam alicui Alexandro aut frangendum, aut inexta scrupulosissima cuiusq; Geometrae vota dissoluidum, meritò referuisse, non iceptè quisquam iudicabit.

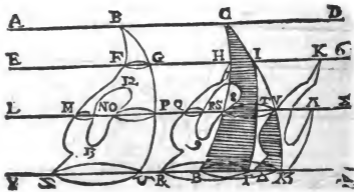
THEOREMA I. PROPOS. I.

Figuræ planæ quæcunq; in eisdem parallelis constitutæ, in quibus, ductis quibuscunq; eisdem parallelis æquidistantibus rectis lineis, conceptæ cuiuscunq; rectæ lineæ portiones sunt æquales, etiam inter se æquales erunt: Et figuræ solidæ quæcumq; in eisdem planis parallelis constitutæ, in quibus, ductis quibuscunq; planis eisdem planis parallelis æquidistantibus, conceptæ cuiuscunq; sic ducti plani in ipsis solidis figuræ planæ sunt æquales, pariter inter se æquales erunt. Dicantur autem figuræ æqualiter analogæ, tum planæ, tum ipsæ solidæ inter se comparatæ, ac etiam iuxta regulas lineas, seu plana parallela, in quibus esse supponuntur, cum hoc fuerit opus explicare.

Sint quæcunq; planæ figuræ, $BZ&$, $C\beta A$, in eisdem parallelis, AD , Y_4 , constitutæ, ductis autem ipsis, AD , Y_4 , quibuscunq; parallelis, $E6$, $L\Sigma$, portione ex. g. ipsius, $E6$, in figuris conceptæ, nempe, FG , HI , inter se sint æquales, necnon ipsius, $L\Sigma$, portiones, MN , OP , simul sumptæ (sit enim figura, $BZ&$, ex. g. intus caua secundum ambitum, 12 , N , 13 , O ,) ipsi, SV , sint pariter æquales, & hoc contingat in quibuscunq; alijs ipsi, AD , æquidistantibus. Dico figuras, $BZ&$, $C\beta A$, inter se æquales esse. Assumpta ergo alterutra figuratum, $BZ&$, $C\beta A$, ut ipsa, $BZ&$, cum parallelarum, AD , Y_4 , portionibus ipsi conterminantibus, nempe cum, AB , $Y&$, superponatur reliquæ figuræ, $C\beta A$, ita tamen ut ipsæ, A , B , $Y&$, cadant super, BD , & 4 , vel ergo tota, $BZ&$ congruit toti, $C\beta A$, & ita cum sibi congruant æquales erunt, vel non, aliqua tamen pars esto, quæ congruerit alicui parti, ut, $CI\beta 587$, pars figuræ, $BZ&$, ipsi, $CI\beta 587$, parti figuræ, $C\beta A$. Manifestum est autem superpositione figurarum taliter effecta, ut portiones parallelarum, AD , Y_4 , ipsius figuris conterminantes sint inuicem superpositæ, quod quæcumq; rectæ lineæ in figuris conceptæ erant sibi in directum, manent etiam sibi in directum, ut ex. g. cum, M , N , OP , essent in directum ipsi, SV , dicta superpositione facta, manent etiam sibi in directum, nempe, QR , ST , in directum ipsi, SV , est enim distantia ipsarum, MN , OP , ab, AD , æqualis distantia, SV , ab eadem, AD , vnde quotiescunq; AB , extendatur super, B , D , vbicunq; hoc fiat, semper, MN , OP , manebunt in directum ipsi,



ipsi, SV , quod, & de cæteris quibuscunq; ipsi, AD , parallelis in
 vtraque figura liquidò apparet. Quod verò pars vnius figuræ, vt,
 $BZ&$, congruat necessariò parti figuræ, $C\beta\Lambda$, & non toti, dum sit
 superpositio tali lege, quali dictum est, sic demonstrabitur. Cum
 enim ductis quibuscunq; ipsi, AD , parallelis conceptæ in figuris
 ipsarum portiones, quæ erant sibi in directum, adhuc post super-
 positionem maneat sibi in directum, illæ verò ante superpositio-
 nem essent ex hypotesi æquales, ergo post superpositionem por-
 tiones parallelarum ipsi, AD , in figuris superpositis conceptæ erût
 pariter æquales, vt ex.g. QR , ST , simul sumptæ æquabuntur ipsi,
 SV , ergo nisi vtræque, QR , ST , congruant toti, SV , congruente
 parte alicui parti, vt, ST , ipsi, ST , erit, QR , æqualis ipsi, TV , &
 QR , quidem erit in residuo figuræ, $BZ&$, superpositæ, TV , verò
 in residuo figuræ, $C\beta\Lambda$, cui fit superpositio. Eodem modo osten-
 demus cuiusq; parallelæ ipsi, AD , conceptæ in residuo, figuræ, B
 $Z&$, superpositæ, quod sit, $H\beta 597$, respondere in directum æqua-
 lem rectam lineam, quæ erit in residuo figuræ, $C\beta\Lambda$, cui fit super-
 positio, ergo superpositione hac lege facta, cum superest aliquid
 de figura superposita, quod non cadat super figuram, cui fit su-
 perpositio, necesse est reliquæ figuræ aliquid etiam superesse, super
 quod nihil sit superpositum. Cum autem vniciq; rectæ lineæ
 parallelæ, AD , conceptæ in residuo, vel residuis (quia possunt esse
 plures figuræ residuæ) figuræ, $BZ&$, siue, $C\beta\Gamma$, superpositæ, re-
 spondeat in directum in residuo, vel residuis figuræ; $C\beta\Lambda$, alia re-
 cta linea, manifestum est has residuas figuras, siue residuarum ag-
 gregata, esse in eisdem parallelis, cum ergo residua figura, $H\beta 597$,
 ut



fit in parallelis, $E\delta$, $Y\delta$, etiam residua figura, vel residuarum aggregatum, ipsius, $C\beta\lambda$, (quod fit ipsi frustra, $IT\lambda$, 785,) erit in eisdem parallelis; $E\delta$, $Y\delta$, si enim non pertingeret hinc inde ad parallelas, $E\delta$, $Y\delta$, vt ex. g. si pertingeret quidem vsq; ad, $E\delta$, non tamen vsq; ad, $Y\delta$, sed tantum vsque ad, $L\epsilon$, conceptis rectis lineis in frusto, $Q\beta\delta$; ρR , ipsi, AD , parallelis non responderent in residuo figuræ, $C\beta\lambda$, seu ex residuis aggregato, aliæ rectæ lineæ, vt superius necesse esse probatum est, sunt ergo hæc residua, vel residuorum aggregata in eisdem parallelis, & in illis conceptæ parallelarum ipsis, A , D , $Y\delta$, portiones inter se sunt æquales, vt supra ostendimus, ergo residua, seu residuorum aggregata, sunt eius conditionis, cuius ipsas, $BZ\&$, $C\beta\lambda$, figuras iam esse suppositum fuit, idest æqualiter analoga. Fiat ergo denuo residuorum superpositio, ita tamen vt parallelæ, GH , & β . super parallelas, $E\delta$, $Y\delta$, sint constitutæ, & congruat pars, $V\Delta\lambda$, frusti, $H\beta\gamma$ 97, parti, $V\Delta\lambda$. frusti, $IT\lambda$, ostendemus ergo vt supra, dum vnus habetur residuum haberi etiam alterius, & hæc residua, siue residuorum aggregata, esse in eisdem parallelis, sit autem ad figuram, $BZ\&$, spectans residuum, $KV\lambda$; ΠX , ad figuram autem, $C\beta\lambda$, sint pertinentia residua, $IT\Delta V$, 785, quorum aggregatum est in eisdem parallelis cum residuo, $KV\lambda$; ΠX , nempe in parallelis, $E\delta$, $Y\delta$, si ergo horum residuorum fiat denuo superpositio, ita tamen vt parallelæ, in quibus existunt, sint semper ad inuicem superpositæ, & hoc semper fieri intelligatur, donec tota figura, $BZ\&$, fuerit superposita, dico totam debere ipsi, $C\beta\lambda$, congruere, alioquin si esset aliquod residuum vt figuræ, $C\beta\lambda$, cui nihil esset superpositum, esset etiam aliquod residuum figuræ, $BZ\&$,

BZ&, quod non esset superpositum, ut supra ostendimus necesse esse, ponitur autem totam, **BZ&**, esse superpositam ipsi, $C\beta A$, ergo ita sunt ad inuicem superpositæ, ut neutrius residua habeantur, ergo ita sunt superpositæ, ut sibi congruant, ergo figuræ, **BZ&**, $C\beta A$, inter se sunt æquales.

Sint nunc in eodem schemate duæ figuræ solidæ quæcunque, **BZ&**, $C\beta A$, in eisdem planis parallelis, **AD**, **Y₄**, constitutæ, ductis autem quibuscunq; planis, **E₆**, **L₂**, præfatis æquidistantibus, sint conceptæ in solidis figuræ, quæ iacent in eodem plano, semper inter se æquales, ut, **FG**, æqualis, **HI**, & **MN**, **OP**, simul sumptæ (sit enim solida figura ex. g. **BZ&**, intus utcunq; caua secundum superficiem, **N**, **O**,) æquales ipsi, **SV**. Dico easdem solidas figuras æquales esse. Si enim solidum, **BZ&**, cum portionibus, **ABY**, & planorû, **AD**, **Y₄**, ipsi conterminantibus, solido, $C\beta A$, ita superposuerimus, ut planum, **AB**, sit in plano, **AD**, & **Y₄**, in plano, **Y₄**, ostendemus (ut fecimus superius circa parallelarum ipsi, **AD**, conceptas in figuris planis, **BZ&**, $C\beta A$, portiones) figuras in solidis, **BZ&**, $C\beta A$, conceptas, quæ erant in eodem plano, etiam post superpositionem manere in eode plano, & ideo adhuc æquales esse figuras in superpositis solidis conceptas, & ipsis, **AD**, **Y₄**, parallelas. Nisi ergo totum solidum toti congruat in prima superpositione, relinquentur residua solida, vel ex residuis composita in utroq; solido, quæ non erunt ad inuicem superposita, cum enim ex. g. figuræ, **QR**, **ST**, æquantur figuræ, **SV**, dempta communi figura, **ST**, reliqua, **QR**, æquabitur reliquæ, **TV**, hocq; continget in quouis alio plano ipsi, **AD**, parallelo occurrente solidis, **C β T**, $C\beta A$, ergo semper habentes residuum vnus solidi, habebimus etiam residuum alterius, & patebit, iuxta methodum adhibitam in priori parte huius Propositionis circa figuras planas, residua solida, vel residuorum aggregata semper esse in eisdem parallelis planis, ut residua, **H β 597**, **ITA**, **785**, esse in planis parallelis, **E₆**, **Y₄**, ac æqualiter analogæ: si ergo hæc residua adhuc superponantur, ita ut planum, **EH**, locetur in plano, **H₆**, & **Y₆**, in β , & hoc semper fieri intelligatur, donec quod superponitur, ut, **BZ&**, totû fuerit assumptum, tandem ipsum totum, **BZ&**, congruet toti, $C\beta A$, nisi enim toto solido, **BZ&**, ipsi, $C\beta A$, superposito, ipsa sibi congruerent, esset aliquod residuum vnus, ut solidi, $C\beta A$, ergo etiam esset aliquod residuum solidi, **C β T**, seu, **BZ&**, illudq; non esset superpositum, quod est absurdum, ponitur enim iam totum solidû, **BZ&**, esse ipsi, $C\beta A$, superpositum, non ergo erit aliquod residuû in ipsis solidis, ergo sibi congruent, ergo duæ figuræ solidæ, **BZ&**, $C\beta A$, inter se æquales erunt, quæ fuerunt demonstranda. Præfate autem

autem figuræ, vt supra inuimus, dicatur æqualiter analogæ, & si opus erit, iuxta regulas lineas parallelas, seu plana parallela, AD, Y4.

S C H O L I V M.

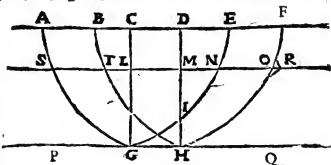
Cum antecedens Prop. maximi sit momenti, vt in sequentibus apparebit, aliusq; modus priorem partem demonstrandi, stylo Archimedeo haud absimilis, menti succurrerit, id ipsum ne pereat in Lemmata distributum hic subiungere placuit.

L E M M A P R I M V M.

Si in eadem, vel æqualibus basibus, & in eisdem parallelis figuræ planæ æqualiter analogæ iuxta easdem bases fuerint constitutæ, ita tamen, vt quæcunq; æquidistantium basibus linearum portiones in eisdem conceptæ figuris integræ sint, ac eidem basi, vel basibus æquales, ipsæ pariter figuræ inter se æquales erunt.

Sint in eadem basi, GH, seu in æqualibus basibus, & in eisdem parallelis, AF, PQ, figuræ planæ, AGHB, EGHF, æqualiter analogæ iuxta eandem basem, G

H, seu bases æquales iâ dictas, extenta vtrò quæcunq; ipsis, PQ, A



E, parallela, SR, eiusdem portiones captæ in præfatis figuris, vt, SI, NO, integræ sint, ac æquales basi, GH, seu dictis æqualibus basibus. Dico etiam præfatas figuras inter se æquales esse. In eadem enim basi, GH, seu in altera dictarum æqualium basium sit constitutum, & in eisdem parallelis, AF, PQ, quodcunq; parallelogrammum, CH, in quo portio concepta ipsius, SR, sit, LM, quæ erit æqualis ipsi, GH, & consequenter ipsi, NO, vnde addita cõmuni, MN, fiet, LN, æqualis, MO. Eodem modo autem ostendemus, CE, esse æqualem, DE, & reliquas huiusmodi similiter adq.

adæquari. Nunc assumpto trilineo, ECG, & posito, C, in, D, & CG, in, DH, cadet, G, in, H, quia, CG, DH, sunt æquales, cadente verò trilineo, ECG, super, FDH, extendetur, CE, super, D F, cum angulus, FDH, exterior sit æqualis interiori, ECG, parallelarum, DH, CG, & punctum, E, erit in, F, ambitusque, ENG, cadet super ambitum, FOH, si enim non, esto quod aliquod punctum ambitus, ENG, non cadat super, FOH, cadet ergo, vel extra trilineum, FDH, vel intra, cadat extra, vt in, R, ita vt ambitus, E NGH, cadat vt, FRH, erit ergo, MR, maior, MO, sed, MR, est æqualis, LN, ergo, LN, erit maior, MO, sed est etiam æqualis eidem, MO, ex demonstratis, ergo esset æqualis, & maior eadem, MO, quod est absurdum, non ergo aliquod punctum ambitus, ENG, cadit extra trilineum, FDH, eodem modo probabitur, nec cadere intra eundem trilineum, ergo ambitus, ENG, cadet super ambitum, FOH, congruens totus toti, & consequenter etiam trilineus, ECG, congruet trilineo, FDH, & illi æqualis erit, vnde ablato communi trilineo, DIE, & addito communi trilineo, GIH, fiet, EGHF, figura æqualis parallelogrammo, CH. Eodem modo ostendemus figuram, AGHB, æquari eidem, CH, ergo figuræ, A GHB, EGHF, inter se æquales erunt. Cum autem dictæ figuræ fuerint in æqualibus basibus, tum constituentes super vnquamq; parallelogrammum in eisdem parallelis cum istidem positum, concludemus etiam dictas figuras æquales esse, probantes eodem modo descriptis parallelogrammis adæquari, quæ quidem inter se erunt æqualia, quod demonstrare opus erat. Hæc autem vocentur parallelogramma curuilinea, cum, AG, BH, EG, FH, fuerint curuæ lineæ, cum verò fuerint rectæ lineæ, parallelogramma rectilinea ad illorum differentiam eadem appellabimus, sed vtraq; in genere, si libuerit, nomine parallelogrammi tantum etiam nuncupabimus.

L E M M A I I.

SI in æqualibus rectis lineis, tamquam in basibus, & in eisdem parallelis, fuerint quæcunq; planæ figuræ, æqualiter analogæ iuxta dictas bases; portiones autem æquidistantium quocunq; ipsis basibus linearum in figuris conceptæ integræ fuerint, ac in altera dictarum figurarum sic se habentes, vt quælibet propinquior basi sit maior remotiori, dictæ figuræ inter se æquales erunt.

AP, in æqualia parallelogramma, A&, &Q; rursus autem per alias ipsi, QY, parallelas diuidantur dictæ altitudinis portiones bifariam, & sic semper fiat (lectis insimul constitutis parallelogrammis, quæ idcirco etiam bifariam diuidentur) donec ad parallelogrammum, vt ad, βQ , deueniatur minus spatium, \ast , sit igitur sectum, AP, in parallelogramma, æquæ alta, AZ, $\beta \&$, $\Gamma \beta$, ΔP , per equidistantes lineas, $\beta \&$, ΓV , ΔX , quæ secent lineas, AQ, in punctis, β , Γ , Δ , CQ, in, E, I, N, DP, in, Z, &, β , FT, in, $\Lambda \Pi \Sigma$, HT, in, O, R, S, & tandem, LY, in, K, V, X, compleanturq; parallelogramma, BZ, $\alpha \&$, $\gamma \beta$, ΔP , iuxta descriptionem superius traditam, erunt enim lineæ, BE, $\alpha 1$, γN , ΔQ , extra figuram, CQPD, quod patebit, veluti, AQ, extra, CQPD, similiter cadere ostensa est, & consequenter figura ex parallelogrammis, BZ, $\alpha \&$, $\gamma \beta$, ΔP , composita comprehendet spatium, CQPD, sint autem etiam completa parallelogramma, E&, I&, NP, quorum descriptæ lineæ, E ϕ , I α , NM, intra figuram, CQPD, quidem cadere ostendimus ex eadem ratione, quod dictæ parallelæ ipsi, PQ, propiniores remotioribus sint semper maiores, & subiinde patebit figuram ex parallelogrammis, E&, I&, NP, compositam comprehendere figuram, CQPD. Tandem compleantur parallelogramma quoque, Gk, δV , θX , ζY , ex quibus compositam figuram spatium, HTYL, eadem methodo comprehendere demonstrabimus. Cum ergo figura comprehendens spatium, CQPD, superet ab eo comprehensam parallelogrammis, BZ, $\alpha \phi$, $\gamma \alpha$, ΔM , hoc est parallelogrammo, ΔP , quod est minus spatio, \ast , dicta comprehendens figura superabit, CQPD, multò minori spatio, quam sit, \ast , sed, HTYL, superat, CQPD, ex hypotesi spatio, \ast , ergo figura comprehendens, CQPD, minor est, HTYL, & multò minor figura ipsum, HTYL, comprehendente, quæ iam descripta fuit, hoc autem est absurdum, cum enim parallelogrammum, BZ, æquetur ipsi, GK, $\alpha \&$, δV , θX , & ΔP , ζY , tota toti adæquatur contra prædemonstrata, non ergo figura, HTYL, maior est, CQPD.

Sit nunc eadem minor, si possibile est, eodem spatio, \ast , igitur descriptis circa, CQPD, eisdem figuris, ita vt comprehendens, CQPD, superet ab eo comprehensam minori spatio, quam sit, \ast , compleantur parallelogramma, OV, RX, SY, ex quibus compositam figuram, vt supra à spatio, HTYL, comprehendendi ostendimus, igitur si comprehendens, CQPD, superat figuram comprehendendam minori spatio, quam sit, \ast , ipsum spatium, CQPD, superabit ab eo comprehensam figuram multò minori spatio, quam sit, \ast , idè autem superat, HTYL, spatium, \ast , ergo figura comprehensa à

Q q q 2

ipa

Elicite. ex
ant. Lem.1. Decimi
Elem.Ex antec.
Lem.

Ex antec.
Lem.

spatio, CQPD, maior erit spatio, HTYL, & multò maior erit figura iam descripta, ab eodem spatio, HTYL, comprehensa, quod est absurdum, cum enim parallelogrammum, E&, æquetur, OV, I&, ipsi, RX, necnon, NP, ipsi, SY, tota toti adæquatur contra prædemonstrata, nec ergo figura, HTYL, minor esse potest figura, CQPD, sed neque eadem maior, vt ostensum est, ergo eidem æqualis erit, quod demonstrare oportebat. Vnamquamque autem dictarum figurarum, CQPD, HTYL, præfatas conditiones habentium, figuram in alteram partem deficientem appellabimus, regula basi, seu quacunq; illi æquidistante.

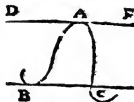
LEMMA IIL

SI curva quæcunq; tota sit in eodem plano, cui occurrat recta in duobus punctis, aut rectis lineis, vel in recta, & puncto, poterimus aliam rectam lineam præfatæ æquidistantem ducere, quæ tangat portionem curvæ lineæ inter duos prædictos occurfus continuatam.

DEFINITIO. ✱

Tangere autem dico rectam lineam aliam quamcunq; curvæ totam in eodem plano cum ea existentem, cum ipsa recta lineæ sine in puncto, sine in recta linea, curvæ, occurrente, eadem curva vel tota est ad eandem partem, vel illius nihil est ad alteram partem illius occurrentis rectæ lineæ.

Sit curva linea, BAC, tota in eodem existens plano, cui recta, B C, occurrat in duobus punctis, seu rectis lineis, vel in recta, & puncto, B, C. Dico nos aliam rectam ipsi, BC, æquidistantem ducere posse, quæ tangat portionem curvæ lineæ inter duos occurfus, B, C, continuatam. Quoniam ergo recta est, BC, & curva, BAC, ideò inter se spatium comprehendent, figuramque, vt, BAC, constituent, ergo possibili



1. lib. 7.

le erit figuræ, BAC, respectu rectæ, BC, verticem inuenire, sit is punctum, A, per quod ducatur, DF, parallela, BC, igitur, BF, tanget figuram, BAC, ergo totus ambitus, BAC, est ad eandem partem

tem rectæ, DF, vel nihil est (saltem ad alteram partem, si enim aliqua illius portio esset ad alteram partem rectæ, DF, iam recta, DF, leccaret figuram, BAC, quod est absurdum, ergo recta, DF, tangit curuam, BAC, igitur possibile est, &c.

COROLLARIUM.

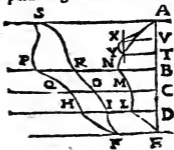
Hinc manifestum est quomodo ducenda sit recta linea datam curuam totam in eodem plano cum ea existentem contingens, quæ quidem data recta linea sit æquidistans.

LEMMA IV.

Si proposita quæcumque figura plana vni regulæ parallelis quotcumque lineis ita secari possit, vt conceptæ in figura rectæ lineæ integræ semper existant: Ipsa ex parallelogrammis rectilineis, aut curuilineis, seu ex figuris in alteram partem deficientibus, regula eadem, componetur.

Sit quæcumque figura plana, SPFR, talis tamen, vt secta quotcumque; vni regulæ, vt, FE, parallelis, conceptæ in ipsa rectæ lineæ integræ sint. Dico ipsam, vel ex parallelogrammis rectilineis, aut curuilineis, vel ex figuris in alteram partem deficientibus,

reg. eadem, FE, componi. Sint enim ductæ, SA, FE, oppositæ tangentes figuræ, SPFR, regula eadem, FE, quibus incidat quomodocumque; recta linea, AE, moueatur autem, FE, versus, SA, semper æquidistanter eidem, SA, donec illi



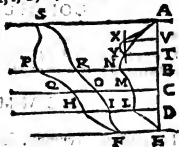
1. lib. 1

congruat, interim verò punctum, E, ita in ipsa feratur, vt describat lineam, ENA, cum, AE, figuram, ANE, comprehendentem, quæ eidem, SPFR, sit æqualiter analoga iuxta regulam, FE; in eadem integris existentibus parallelis ipsi, FE, ad ambitum, ANE, terminantibus: rursus feratur recta linea, AE, versus ambitum, ANE, semper ipsi, AE, æquidistanter donec totam pertranferit figuram, ANE, adnotentur autem contactus lineæ sic decurrentis

in

in ambitu, ANE, vel enim tanget in linea, aut lineis, vel in punctis, & lineis, vel tantum in punctis, esto quod fiat contactus in re-
cta, LM, & in puncto, N, transeantq; per puncta, L, M, N, rectæ
lineæ regulæ, FE, parallelæ, HD, QC, PB, secantes ambitum fi-
guræ, SPFR, in punctis, P, Q, H, I, O, R, & rectam, AE, in pun-
ctis, B, C, D, nullasque alius

factus fuerit contactus in am-
bitu, ANMLE. Quoniam ergo
a puncto, N, ad, A, nullus
datur contactus, erit, ANB, fi-
gura in alteram partem, n: im-
pè verius, A, deficiens, hoc est
quælibet in figura, ANB, pa-
rallæla, NB, erit maior remo-
tiori, si enim non, esto quod



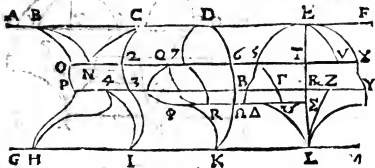
aliqua vt, YT, non sit maior remotiori, XV, ad ambitum termina-
ta, vel ergo erit illi æqualis, vel eadem maior, sit illi æqualis, &
iungatur, YX, hæc ergo erit parallela, AE, & occurrit ambitui in
duobus punctis, Y, X, ergo possibile erit ducere rectam lineam ipsi
YX, seu, AE, parallelam, tangentem portionem curvæ lineæ; hoc
est ambitus, AN, inter duos occurrius, Y, X, continuatam, quod
est contra suppositum: quod si dicatur, YT, esse minorem, XV,
multò magis conuincetur præfatum absurdum, ergo, YT, erit ma-
ior, XV, & quælibet, NB, propinquior remotiore maior, ergo fi-
gura, ANB, erit in alteram partem deficiens: eodem modo autem
ostendemus etiam, NMCB, LED, esse figuras in alteram partem
deficientes, LMCD, autem manifestum est esse parallelogrammū
rectilineum, ergo in figura, SPFR, ipsa, SPR, quæ est æqualiter
analogæ ipsi, ANB, erit figura in alteram partem deficiens, sic etiã,
PQOR, HPI, QHIO, verò erit parallelogrammum rectilineum,
seu curvilineum, prout, QH, OI, rectæ, vel curvæ, esse possunt,
ergo figura, SPFR, componitur ex figuris in alteram partem defi-
cientibus, ac ex parallelogrammo rectilineo, seu curvilineo, re-
gula, FE, quod ostendere opus erat.

Ex antec.
Lem.

COROLLARIUM.

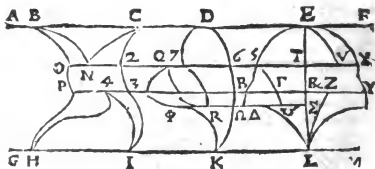
Hinc habetur figuram, SPFR, ipsi, ANE, æqualem esse, & uni-
uersaliter figuras plures æqualiter analogas, in quibus earum
regula æquidistantium, quotcunq; linearum concepta portiones inte-
gra sunt, inter se æquales esse. Pro-

Proposit. antecedens, aliter, quoad priorem partem, ostensa.



Sint quęcūq; figurę planę equaliter analogę iuxta regulā, GM , ipsę; $BHIC$, DQK , quarum oppositę tangentes, AF , GM , regula pariter, GM , parallelarū, autē ipsi, GM , quorūcumque portiones in vnaque dictarum figurarum integrę sint, siue non. Dico easdem equaliter esse. Incidat ergo parallelis, AF , GM , quomodocumque recta linea, EL , in eisdem terminata, moueatur autem, GM , versus, A F , temper eidem, AF , equidistanter donec illi congruerit, interim autem vnum punctum moueatur in eadem, GM , sic mota, describens ambitum, IE , figurę equaliter analogę ipsi, DQK , & aliud punctum in eadem motum ad aliam partem, EL , describat ambitum figurę, EYL , equaliter analogę ipsi, $BHIC$, in quibus quidem sic descriptis figuris conceptę ipsi, GM , parallelarum portiones quęcumque integrę sint. Erit ergo figura, EAL , equalis figurę, EYL , esto autem quod in figura, DQK , conceptę portiones parallelarum ipsi, GM , non omnes sint integrę, sed aliquę fractę per anteriorem ambitum, nempe, quę intercipiuntur parallelis, $Q6$, 6Ω , in quibus habeantur duo figurę frustra, $67R\Omega$, $Q6R$, in quorum tamen vnoquoque dictę parallelarum portiones integrę habeantur, sit autem in motu, GM , a quodam puncto descripta linea, & ES , nempe ambitus figurę, $5&ST$, eodem modo, quo descripti fuerunt ambitus, EAL , EYL , figurę inquam, $5&ST$, equaliter analogę frustra, $7R\Omega5$, erit ergo reliqua figura, $5\Delta S$, equaliter analogā frustra, $Q6R$, cum tota, $TS\Delta S$, sit toti composito ex frustra, $Q6R$, $7R\Omega5$, equaliter analogā, & sunt portiones ipsi, GM , parallelarum

Ex antec.
Lem.

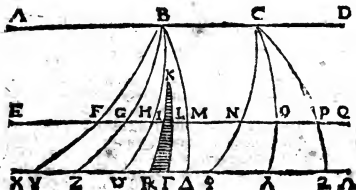


laru n in vnaquaq; figura, $\delta \Delta \Sigma$, $\delta \delta \Sigma T$, integræ omnes, sicut contingere supposuimus in frustis, $Q \circ R$, $\gamma R \alpha \delta$, ergo cum, $Q \circ R$,
Ex antec. $\delta \Delta \Sigma$, sint figuræ etiam æqualiter analogæ, inter se æquales erunt:
Lem. Eadem ratione patebit frustum, $\gamma R \alpha \delta$, æquari figuræ, $S \delta \Sigma T$, ergo frustra, $Q \circ R$, $\gamma R \alpha \delta$, simul sumpta æquabuntur figuræ, $T \delta \Delta \Sigma$, sed & figuram, $\gamma \delta D$, ipsi, EST , adæquari, necnon, $\phi K \alpha$, ipsi, ΔL
Ex antec. Σ , pariter adæquari manifestum est, cum sint figuræ æqualiter analogæ, & portiones parallelarum ipsi, GM , in eisdem conceptarū integræ sint, ergo tota figura, DQK , toti, $E \beta L$, æqualis erit. Cōsimili modo in figura, $BHIC$, ducentes rectas lineas ipsi, GM , parallelas, nempe, O_2 , P_3 , quibus ipsa distinguatur in frustra, capiētia dictas parallelarum portiones integras scilicet in frustra, BON , CN_2 , PH_4 , $4I_3$, OP_3 , PH_4 , $4I_3$, eisdem, O_2 , P_3 , producentes vt secent ambitum figuræ, EYL , velut in, T , X , βY , descriptisq; lineis, EV , ZL , vt fuit descripta, $\delta \Gamma \delta$, vt constituatur figura, ETV , æqualiter analogæ frusto, CN_2 , (ex quo remanet, EVX , æqualiter analogæ ipsi, BON ,) & figuræ, $Z \beta L$, æqualiter analogæ ipsi, $4I_3$, (ex quo, ZLY , remanet etiam æqualiter analogæ ipsi, PH_4 ,) cum in his captæ parallelarum dictæ portiones integræ sint, manifestum erit fig. EIV , æquari ipsi, CN_2 , EVX , ipsi, BON , $Z \beta L$, ipsi, $4I_3$, ZLY , ipsi, PH_4 , & tandem, $XT \beta Y$, ipsi, OP_3 , ex quo concludemus figuram, $BHIC$, æquari ipsi, EYL , hoc est ipsi, $E \beta L$, sed eisdem, $E \beta L$, ostensa est æqualis etiam, DQK , ergo figuræ, $BHIC$, DQK , inter se æquales erunt, igitur quæcumq; planæ figuræ æqualiter analogæ inter se æquales erunt, quod ostendendum erat. Per hæc autem priori parti Propof. 1. huius iam satisfactum esse manifestum est.

THEO.

THEOREMA II. PROPOS. II.

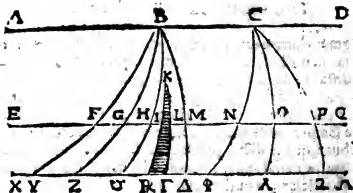
Figuræ planæ quæcumq; in eisdem parallelis constitutæ, in quibus, ductis quibuscumq; eisdem parallelis æquidista tribus rectis lineis, conceptæ cuiuscumq; rectæ linæ portiones sunt inter se, vt cuiuslibet alterius in eisdem figuris conceptæ portiones (homologis tamen in eadem figura semper existentibus) eandem inter se proportionem habebunt, quam dictæ portiones. Dicantur autem proportionaliter analogæ, ac etiam, si libuerit, iuxta regulas ipsas parallelas, in quibus existunt.



Sint duæ quælibet figuræ planæ, $B\&R\&K\&\Gamma\&\Delta$, $C\&\lambda$, inter parallelas AD , $X\alpha$, constitutæ, ducta verò utcumq; EQ , prædictis parallelæ, eiusdem portiones in figura, $B\&\Delta$, conceptæ, quæ sint, HI , LM , simul sumptæ sint ad eam, seu ad eas, quæ concipiuntur in figura, $C\&\lambda$, vt aliæ quælibet similiter sumptæ, nempè ex. g. vt , & $R\&\Gamma\&\Delta$, ad, λ . Dica figuram, $B\&R\&K\&\Gamma\&\Delta$, ad figuram, $C\&\lambda$, esse vt, HI , LM , ad, NO , vel vt, & $R\&\Gamma\&\Delta$, ad, λ , vel vt quælibet aliæ similiter sumptæ. Accipiantur in, λ , producta versus, λ , quotcûq; eidem, λ , æquales, vt; λ_2 , similiter quælibet linearum figuræ, $C\&\lambda$, producat, & in ipsa intelligantur tot assumptæ æquales vnicuiq; productarum, quot assumptæ sunt æquales ipsi, λ , ex. g. vni-

R r r

ca



ca tantum, & per omnium terminos ex parte, z , transeat linea, C
 Pz , similiter in alia figura, $B&\Delta$, sumantur quotcumq; in ipsa, ΔX ,
 producta versus, Δ , æquales ipsis, & $\Gamma\Delta$, simul sumptis, & pro-
 ductis reliquis in fig. $B&\Delta$, ipsi, Δ , parallelis, aliæ tot æquales
 suis productis in directum capiantur, per quorum omnium termi-
 nos transeat linea, BGZ , BFY . Quoniam ergo figuræ, $BFYZG$,
 $BGZ&H$, $B&\Gamma\Delta$, sunt in eisdem parallelis, AD , $\lambda\alpha$; & ductis
 in eisdem quomodocumq; ipsis, AD , $\lambda\alpha$, parallelis, interceptæ in
 figuris portiones sunt æquales, idè ipsæ figuræ, BYZ , $BZ&$, $B&$
 $\Gamma\Delta$, æqualiter analogæ, & subinde æquales, erunt: Quo pa-
 cto etiam ostendemus figuras, $\varphi\lambda$, λC_2 , æquales esse: Quo pa-
 cto ergo est aggregatum ex, $Y\Gamma$, $\Gamma\Delta$, aggregati ex, $\Delta\Gamma$, $\Gamma\Delta$, to-
 tuplex erit aggregatum ex figuris, BYZ , $BZ&$, $B&\Gamma\Delta$, seu figu-
 ra, $BY\Gamma\Delta$, figuræ, $B&\Gamma\Delta$; similiter quotuplex erit, φ_2 , ipsi-
 us, $\varphi\lambda$, totuplex erit aggregatum ex figuris, $C\varphi\lambda$, $C\lambda_2$, hoc est figu-
 ra, $C\varphi_2$, ipsius figuræ, $C\varphi\lambda$, habemus ergo æquæ multiples pri-
 mæ, & tertiæ utcumq; assumptas, similiter & æquæ multiples se-
 cundæ, & quartæ. Quoniam verò ex, g. $Y\Gamma$, $\Gamma\Delta$; FI , LM , sunt
 æquæ multiples ipsarum, $\Delta\Gamma$, $\Gamma\Delta$; HI , LM , similiter, $z\varphi$, PN ,
 sunt æquæ multiples ipsarum, $\varphi\lambda$, NO , ipsæ veidè, $\Delta\Gamma$, $I\Delta$, HI ,
 LM , $\varphi\lambda$, NO , sunt proportionales, idè si aggregatum ex, $Y\Gamma$, $I\Delta$,
 adæquabitur ipsi, φ_2 , etiam aggregatum ex, FI , LM , adæquabitur
 ipsi, NP , ut & reliquæ omnes similiter sumptæ, & consequenter
 etiam figura, $BY\Gamma\Delta$, adæquabitur figuræ, $C\varphi_2$, si verò aggreg-
 atum ex, $Y\Gamma$, $I\Delta$ superet, φ_2 , eodem modo patebit figuram, BY
 $\Gamma\Delta$, superare figuram, $C\varphi_2$, vel superari ab eadem, si, $Y\Gamma$, $I\Delta$

Per ant.

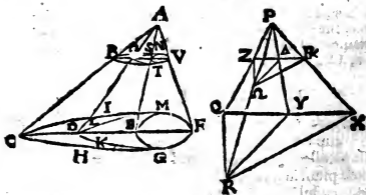
Ex ant.

supereretur à, ϕ , ergo prima ad secundam erit, vt tertia ad quar-
 ram .f. figura, B&RKL Δ , ad figuram, C ϵ λ , erit, vt aggregatum
 ex, &R, Γ Δ ; ad/ ϕ λ , vel vt aggregatum ex, Hl, LM; ad, NO, seu
 vt quælibet aliaæduæ similiter sumptæ, quod erat ostendendum.
 Dicantur autem dictæ figuræ proportionaliter analogæ iuxta regu-
 lam, AD, vel, X α .

THEOREMA III. PROPOS. III.

Figuræ solidæ quæcumq; in eisdem planis parallelis
 constitutæ, in quibus ductis quibuscumque planis di-
 ctis parallelis æquidistantibus, conceptæ cuiuscumq; sic
 ducti plani in ipsis solidis figuræ planæ sunt inter se, vt eius-
 modi cuiuslibet alterius plani in eisdem solidis conceptæ fi-
 guræ (homologis tamen in eodem solido semper exister-
 tibus) eandem inter se, quam dictæ iam conceptæ cuiuscumq;
 plani figuræ, rationem habebunt. Dicantur autem figuræ
 proportionaliter analogæ, iuxta regulas ipsa plana paral-
 lela, in quibus existunt.

Sint duæ quælibet fig. solidæ, AMEGF, PQRY, in eisdem planis
 parallelis constitutæ; ductis verò quibuscumq; planis præfatis pa-
 rallelis æquidistantibus, eorum conceptæ, in solidis figuræ sint vnus
 plani ex. g. figuræ, NSTV, Z Ω Δ , alterius autem, MEGF, QRY,
 vel contingat has esse solidorum bases, ac in altero planorum pa-
 rallelorum, solida, AMEGF, PQRY, contingentium, sit verò figu-
 ra, MEGF, ad figuram, QRY, vt figura, NSIV, ad figuram, Z Ω
 Δ . homologis nempe in eodem solido existentibus. Dico solidum,
 AMEGF, ad solidum, PQRY, esse vt, NSTV, figura, ad figuram,
 Z Ω Δ , vel vt figura, MEGF, ad figuram, QRY. Ducatur enim in
 figura, MEGF, vtcumq; recta, EF, ad illius ambitum terminata,
 cui ducta parallela, SV, in figura, NSTV, producantur ambæ in-
 definitè versus puncta, S, E, in quibus sumantur vtçumq; æquæ mul-
 tiplices, BS, CE, similiter in eisdem figuris ductis alijs eisdem, SV,
 EF, æquidistantibus, sumatur earum pariter æquæ, multiplices iux-
 ta prædictarum multiplici-
 tatem, & omnium termini sint in lineis, NST,
 NOT, NBT, MEG, MDG, MCG, traductis verò alijs quotcumq;
 planis præfatis parallelis, ac ipsa solida secantibus, hoc idem fiat
 circa ipsorum figuras in ipsis solidis conceptas, omnium verò ita



Ex antec.

resultantium figurarum termini sint in superficiebus, $AMCG$, $AMDG$; $AMEGF$ similiter in alio solido esto quod plana, quæ producerunt in solido, $AMEGF$, figur. $MEGF$, $NSTV$, generint figuras, QRY , $Z\Delta\alpha$, ad quas illæ habent eandem rationem, ductis autem, vel assumptis rectis, QY , $Z\Delta$, inter se parallelis, illæ producantur versus eandem partem, ΔY , in ipsiq; productis accipiantur quæcûq; æquè multiplices, vel æquales, YX , $\Delta\beta$, & idem fiat in cæteris ipsis parallelis in figuris, QRY , $Z\Delta\alpha$, sic productis, & omnium termini sint in lineis, YXR , $\Delta\beta\alpha$, hæc verò lineæ, sicut & reliquarum figurarum eodem modo producibilium, sint in superficiebus, PYR , $PYXR$. Manifestum est autem figuras, $MEGF$, $MDGE$, $MCGD$, esse æqualiter analogas, & ideo inter se æquales, sicut etiã figuræ, $NSTV$, $NOTS$, $NBTO$, pariter inter se sunt æquales, & quecunq; aliæ sunt in eodem plano, ex quo habemus etiam solida, $AMEGF$, $AMDGE$, $AMCGD$, esse æqualiter analogas, & ideo inter se æqualia. Eodem modo ostendemus solida, $PQRY$, $PQRX$, Y , pariter inter se æqualia esse. Quotuplex est ergo solidum, $AMCGF$, ex tribus, $AMCGD$, $AMDGE$, $AMEGF$, compositum, totuplex est figura, $MCGF$, ex tribus, $MCGD$, $MDGE$, $MEGF$, composita, figuræ, $MEGF$. Similiter quotuplex est solidum, $PQRX$, ex duobus, $PQRY$, $PYRX$, compositum ipsius, $PQRY$, totuplex est basis, QRX , ex duobus, QRY , YRX , composita, fig. QRY ; ita ut habeamus æquè multiplices primæ, & tertię, necnon secundę, & quartę magnitudinis. Cum autem figuræ, $FMCG$, $VNBT$, sint æquè multiplices figurarum, $MEGF$, $NSTV$, & pariter figuræ, QRX , $Z\Delta\beta$, sint æquè multiplices figurarum, QRY , $Z\Delta\alpha$,
 ipsæ

ipsæ verò figuræ, MEGF, QRY, NS IV, Z $\Delta\Delta$, sint proportionales, & homologæ, MEGF, NSTV, ideò si figura, MCGF, fuerit æqualis figuræ, QRX, etiam figura, NBIV, erit æqualis figuræ, Z $\Delta\Delta$, & quælibet alia in solido, AMCGF, sibi respondentem in alio solido, PQRX, vnde & solidum, AMCGF, æquabitur solido, PQRX. Et si figura, MCGF, superauerit figuram, QRX, eodem modo ostendemus, quod solidum, AMCGF, superabit solidum, PQRX, & si illa superabitur, etiam hoc superabitur, ergo prima ad secundam erit, vt tertia ad quartam, hoc est solidum, AMEGF, ad solidum, PQRX, erit vt figura, MEGF, ad figuram, QRY, vel vt figura, NSTV, ad figuram, Z $\Delta\Delta$, vel vt alia quælibet eiusmodi in solido, AMEGF, ad sibi respondentem in alio solido, PQRX, hoc est ad existentem in eodem cum ipsa plano quod ostendere oportet. Dicantur autem figuræ proportionaliter analogæ, iuxta regulas, MEGF, QRY.

Conuers.
Defin. 7.
Qui. El.

Ex 1. huius.

Def. 5.
Qui. El.

ANNOTATIO.

Hæc, & antecedens methodo Indiuisibilem ostensæ quoque fuerunt Lib. 2. Prop. 4. cum verò prima, secunda, & tertia Prop. eiusdem libri sint illius methodi fundamenta, hinc opus erit in præsentem Lib. quascumque illas subsequentes, & ex dicta indiuisibilem methodo Propositiones dependentes, aliter demonstrare, vt vel scrupuloso cuique Geometræ satisfiat. Igitur ab hac Lib. 2. Propos. 4. incipientes, curabimus, vt, quæ per illam methodum vera esse demonstrata sunt, etiam per noua hæc fundamenta confirmentur. Primi Lib. autem Prop. nullatenus à dicta methodo pendere manifestum est circa nonnullas tamen obiter prius hæc pauca maioris facilitatis gratia libuit declarare.

In Prop. 4. igitur Lib. primi sciat Lector tacite supponi omnes vertices datæ figuræ, respectu eiusdem regulæ assumptos, esse in eadem recta linea regulæ parallela; seu, pro figuris solidis, in eodem plano regulæ æquidistante, diffinitionibus conformiter; quod ob sui claritatem inter axiomata poterat recenseri.

In Prop. 16. prætermissa fuit demonstratio præsentis casus, cum nempe, AG, contingit esse perpendicularem, GV, & hoc cum facile, intellecto difficiliori casu (qui ibidem explicatur) hoc probari possit; concludetur autem hoc modo, quod prætendimus, nempe in tali casu etiam, KY, esse perpendicularem ipsi, Y Δ , & secunda plana, AV, K Δ , ad plana, HV, & Δ , æquè ad eandem partem inclinari. Sit, AG, ad, GP, vt, KY, ad, YX, iunctis, AP, PE, KX, X
T, &

& ceteris vt ibidem constructis, eodem modo prius ostendimus vt in triangula, AFE, KZT , necnon, $AFG, KZY, EFG, TZY, \& AGE, KYT$, esse inter se similia, & angulum, PGE , æquari angulo, XYT . Hoc supposito, cum, PG , ad, GA , sit vt, XY , ad, YK , &, AG , ad GE , vt, KY , ad, YT , ex æquali, PG , ad GE , erit vt, XY , ad, YT , & sunt circa æquales angulos, PGE, XYT , ergo triangula, PGE, XYT , sunt similia, ergo, PE , ad, EG , est vt, XT , ad, TY , &, GE , ad, EA , vt, YT , ad, Tk , ergo, PE , ad, EA , est vt, XT , ad, TH , & sunt circa rectos, PEA, XTK , ergo triangula, PEA, XTK , sunt similia, ergo, AP , ad, PE , erit vt, KX , ad, XT , sed &, PE , ad, PG , est vt, XT , ad, XY , ergo, AP , ad, PG , erit vt, KX , ad, XY , &, PG , ad, GA , est vt, XY , ad, Yk , ergo triangula, APG, kXY , sunt similia, rectus autem est angulus, AGP , cum rectus ponatur, AGV , ergo, kYX , &, $KY\Delta$, rectus erit, vnde anguli, $AGV, kY\Delta$ æquales erunt. Cum verò quadratum, PA , æquetur quadratis, PG, GA , seu quadratis, PG, GE, EA , & quadratum PA , æquetur etiam quadratis, PE, EA , duo quadrata, PE, EA , æquabuntur tribus quadratis, PG, GE, EA , & ablato communi quadrato, EA , erit quadratum, PE , æquale quadratis, PG, GE , vnde angulus, PGE , rectus erit, & consequenter etiam rectus ipse, XYT , vnde anguli, AGE, KYT , erunt inclinationes secundorum planorum, AV, KA , cum subiectis planis, $HV, \& \Delta$, & inter se æquales, per quæ supposito casui satisfieri manifestum est.

In Lemmate 5. post Prop. 8. prætermissa fui demonstratio præsentis casus, cum eadem facili existimaretur, nempe quando, FE, FG , cum, AE, AG , &, LI, LM , cum, HI, HM , concurrere minime posse contingat, vt cum angulos, EAF, GAF, IHL, MHL , rectos, vel recto maiores acciderit esse: Sic autem tum hic, tum suppositus ibi casus poterit vniuersaliter demonstrari. Intelligentur ipse, AE, AF, AG, HI, HL, HM , inter se æquales, & iungantur, EF, FG, EG, IL, LM, IM : Cum ergo anguli, FAG, LHM , supponantur æquales, & latera, FA, LH , &, AG, HM , æqualia, erunt pariter bases, FG, LM , æquales: Sic autem probabimus tum, EF, IL , tum, EG, IM , inter se æquales esse. Rursus suspensâ pyramide, $A EFG$, ponatur, F , in, L , demittaturq; FG , super, LM , cui cõgruet, & triangulo, EFG , cadente super, ILM , punctum, E , pariter erit in, I ; Sed & punctum, A , dico fore in, H , tres enim sphericæ superficies super centris, I, L, M , radijs inuicem se secantibus descriptæ, nempe radijs, HI, HL, HM , seu, AE, AF, AG , in duobus tantum punctis sese decussare possunt, vt facile ostendi potest, duæ enim quælibet sphericæ superficies in circuli periphæria se se-

cabunt, tertia verò hanc peripheriam diuidet in duobus punctis, quæ sunt ab ambas partes plani, ILM , nempe vnum supra alterum infra ipsum, quare non ad aliud punctum, quam ad, H , concurrēt tres rectæ & lineæ, AE , AF , AG , ad eandem partem plani, ILM , cum ipsis, HI , HL , HM , constitutæ, ergo, AF , cadet in, HL , AE , in, HI , &, AG , in, HM , quibus præstentis, reliquum demonstrationis, vt ibi, prosequemur.

THEOREMA IV. PROPOS. IV.

Parallelogramma in eadem altitudine existentia inter se sunt vt bases.

Sin in figura Prop. 5. lib. 1. parallelogramma, AM , MC , in eadem altitudine. Dico eadem esse inter se, vt bases, GM , MH . Hoc autem manifestum est, sunt enim dicta parallelogramma figuræ proportionaliter analogæ, iuxta ipsas bases, cum sit, GM , ad, MH , vt, DE , ad, EI , &, DI , ducta sit vtrumque, vnde patet propositum etiam independenter à methodo Indiuisibilium. Ex 2. huius.

ANNOTATIO.

Propositionis 5. Lib. 2. prior pars pendet quidem ab Indiuisibilium methodo, verum pars posterior, necnon Prop. 6. 7. & 8. abiq; illa methodo, vt intuenti apparebit, ostenduntur, quapropter, cum ab eadem exemptæ sint, non indigent vt restaurentur, sed illas tamquam stylo veteri demonstratas, vt veras in hoc libro quoq; usurpabimus, quod etiam de alijs Propositionibus fiet, quæ à methodo Indiuisibilium immediatè pendere non conspiciuntur, etiamsi mediatè ab eadem vtiq; dependere competiantur, sufficiet enim illas Prop. de nouo ostendere, quæ immediatè ab ipsa methodo Indiuisibilium fidem sumpsisse videbuntur. Cum verò subsequentes Propositiones, in quibus parallelogrammorum omnia quadrata, seu omnes figuræ similes, regulis basibus, examinantur, sint in gratiam cylindricorum, prima verò tantum pendeat ex methodo Indiuisibilium, propterea illa erit denuò ostendenda, quam nunc subiungo.

THEOREMA V. PROPOS. V.

Cylindrici in eadem altitudine existentes inter se sunt vt bases.

Ma-

Corol. 12.
lib. 1.

3. huius.

Manifesta est similiter hæc Prop. cum enim secto quolibet cylindrico plano æquidistanter basi, producatum in eo figura æqualis ipsi basi, propterea ut basi ad basim, sic erit figura ad figuram ab eodem plano basibus æquidistante etcumq; productam, ergo hi cylindrici erunt figuræ proportionaliter analogæ, iuxta ipsas bases, ergo cylindrici æquæ alti erunt inter se ut bases.

ANNOTATIO.

Hoc demonstrato haud difficile erit stylo veteri ostendere cylindricos existentes in eadem basi esse inter se ut altitudines, vel ut latera æqualiter basibus inclinata.

Similiter eisdem habere inter se rationem compositam ex ratione basium, & altitudinum, vel laterum æqualiter basibus inclinatorum. Et eos qui habent bases altitudinibus, vel lateribus æqualiter basibus inclinatis, reciprocas æquales esse; Vel æquales, bases haberet altitudinibus, seu lateribus æqualiter basibus inclinatis, reciprocas atq; similes cylindricos esse in tripla ratione laterum homologorum. Sufficiet namq; nos methodum imitari, qua demonstrata Prop. 9. lib. 2. postmodum reliquæ vsq; ad Prop. 14. ostensæ fuerunt, probando circa cylindricos, quod ibi circa omnia quadrata datorum parallelogram. ostendebatur. Hæc autem pro cylindricis postea collecta sunt in eodem lib. 2. Prop. 34. Cor. 4. generali à sec. B. vsq; ad sec. G. quæ quidem animaduerrere opus erat.

In Prop. 15. eiusdem lib. 2. hæc supplerenda videntur. In Sec. A. probatur figuram, KQM, ipsi, ABD, & ΠΤΑ, ipsi, ΨΞΑ, æqualem esse ex Prop. 3. eiusdem, nempe ex methodo Indivisibilium, hoc autem patebit etiam ex prop. prima huius, sunt enim dictæ figuræ æqualiter analogæ. In sec. B. figuram, MZP, adæquari ipsi, KQ M, & αβδ, ipsi, ΠΤΑ, eodem modo deducetur ex prima huius. In sec. C. probabitur ut, MP, ad, PO, ita esse figuram, MZP, ad, O ZP, ex prop. 1. huius. In sec. D. similiter ostendemus figuram, O ZP, ad figuram, Ωξδ, esse ut, ZP, ad, βδ, similiter ex prop. 2. huius. Cætera verò absq; methodo indivisibilium subsistunt; ut & Corollaria, & prop. 16.

In Prop. 17. eiusdem lib. 2. hæc pariter supplerenda sunt. In sec. A. elicitur ex 1. pariter lib. 2. solidum, HZΘ, æquari solido, ABP C, & ΣΓΖ, solido, VΠ&α, cum verò hæc solida sint figuræ æqualiter analogæ ut eorum conditiones expendenti patebit, ideò quod ibi ex 3. lib. 2. hic ex prima huius deducemus. In sec. B. solidum,

LD

LDGF, æquari ipsi, HZ^{oo}, &, 3687, solido, XR³, pariter ex prima huius colligemus. In sec. D. quod figura, LED, ad, OED, sit vt, LE, ad, EO, seu quod figura, QAMY, ad, TIMY, sit vt, QY, ad, Y, T, idest vt, LE, ad, EO, vel quod figura, LFE, ad, OFE, sit vt, LE, ad, EO, patet, ex prop. 2. huius: Quod verò solidum, LDFE, ad solidum, ODFE, sit vt figura, LEF, ad figuram, OEF, idest vt, LE, ad, EO, manifestum est pariter ex 1. huius. In sec. F. solidum, ODFE, ad solidum, 3674, esse vt figura, EDF, ad figuram, 467, patet ex 3. huius, sunt enim dicta solida figuræ proportionaliter analogæ vt consideranti manifestum erit. Cætera huius prop. cum Cor. & prop. 18. absq; methodo Indiuisibilibum subsistunt, vt examinati faciliè apparebit.

THEOREMA VI. PROPOS. VI.

Quæcumq; de parallelogrammis ostenduntur in Prop. 5. 6. 7. & 8. Lib. 2. eadem etiam de triangulis, conditiones ibi suppositas circa suas bases, & altitudines, seu latera æqualiter basibus inclinata, habentibus, verificantur.

Hæc Propositio manifesta est, cum enim exposito quocumq; triangulo, & assumptis duobus quibuslibet lateribus angulum quælibet continentibus parallelogrammum compleri possit in illo angulo, cuius triangulum erit dimidium, idè quæcumq; triangula erunt, vt eorum completa parallelogramma, habentibus autem triangulis circa bases, & altitudines, seu latera æqualiter basibus inclinata, præfatas conditiones, cum pariter habent completa parallelogramma, & de illis verificantur ea, quæ in dictis propositionibus fuerunt proposita, ergo eadem de eorum medietatibus, hoc est de dictis triangulis verificabuntur. Triangula ergo, quæ sunt in eadem altitudine inter se sunt, vt bases; Et quæ sunt in eadem, vel æqualibus basibus, vt altitudines, vel vt latera, quæ æqualiter basi, seu basibus, inclinantur. Habent inter se rationem compositam ex ratione basium, & altitudinum, vel laterum æqualiter basibus inclinatorum. Habentia bases altitudinibus, vel lateribus basibus æqualiter inclinatis, reciprocas, sunt æqualia; Et quæ sunt æqualia bases habent altitudinibus, vel lateribus æqualiter basibus inclinatis, reciprocas. Et tandem similia triangula sunt in dupla ratione laterum homologorum; Quæ omnia etiam Lib. 2. Prop. 19. Coroll. 1. ex methodo Indiuisibilibum colligebantur.

34. Primi Elem.

4. huius, cum Annot.

tur. Coroll. 2. autem spectat ad dictam methodum pertractandam, propterea non opus est, quod aliter ostendatur: Lemma verò antecedens Propos. 20. stylo veteri demonstratur, sicut & ipsa Propos. 20. & 21. quorum Corollaria haud nobis opus est aliter demonstrare, cum eorum usus non sit, nisi pro methodo Indivisibilium.

THEOREMA VII. PROPOS. VII.

Conici in eadem, vel æqualibus altitudinibus existētes inter se sunt vt bases.

Sint quicunq; conici in eadem, vel æqualibus altitudinibus, A E, B F, existentes, AKLM, BSQTR. Dico hos esse inter se, vt ipsorum bases, KLM, SQTR. Abscissis enim ab altitudinibus, A E, B F, vtcunq; partibus æqualibus versus, A, B, ipsis, A C, B D, per, C, ducatur planum basi, K

LM, æquidistans, & per, D, similiter planum basi, SQTR, æquidistans, quibus in conicis producantur figuræ, GIO, XNVP, erit ergo, GIO, similis ipsi, kLM, quarum latera homologa, IO, LM, simili-

ter, XNVP, erit similis basi, SQTR, ducto autem plano transeunte per altitudinem, B F, secetur basis in recta, QR, vtcunq; & figura, XNVP, in recta, NP, superficies verò conicularis in rectis, BQ, BR, erunt ergo hæc similiter secta in punctis, N, P, ac, B F, in, D, sicut etiam, Ak, AL, AM, erunt similiter secta in punctis, G, I, O, ac, A E, in, C, & QR, NP, latera homologa similium figurarum, SQTR, XNVP, sunt autem etiam, A E, B F, altitudines æquales similiter sectæ in punctis, C, D. Cum ergo figura, KLM, similis sit ipsi, GIO, habeat, KLM, ad, GIO, duplam proportionem eius, quam, LM, ad, IO, vel, MA, ad, AO, vel, EA, ad, A C, seu; FB, ad, B D, vel, RB, ad, B P, vel tandem eius, quam habet, QR, ad, NP, sed etiam figura, SQTR, ad, XNVP, habet duplam rationem eius, quam habet, QR, ad, NP, ergo figura, KLM, ad, GIO, est vt, SQTR, ad, XNVP, & permutando figura, kLM, ad, SQTR, erit vt figura, GIO, ad figuram, XNVP, & puncta, C, D, sumpta sunt vtcunq; ac conici, AKLM, BSQTR, sunt in æqualibus altitudinibus, A E, B F, respectu basium, KLM, SQTR, assum-

ptis,

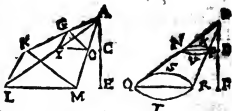
19. lib. 1.

21. lib. 1.

17. Vnde.
Elem.

21. lib. 1.

15. lib. 2.



ptis, ergo sunt figuræ proportionaliter analogæ, ergo dicti cylindrici erunt inter se, vt bases, *KLM, SQTR*, quod erat demonstrandum. 3. huius.

COROLLARIUM.

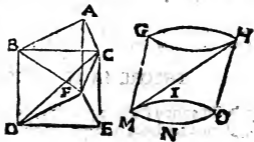
Cum verò etiam cylindrici in eisdem basibus, & altitudinibus prædictis æqualibus, sint inter se, vt ipsa bases, propterea erunt etiam inter se, vt ipsi conici, unde si in vna specie cylindricorum, & conicorum ostensum fuerit, cylindricum triplum esse conici in eadem basi, & altitudine cum eo existentis, illic hoc etiam de reliquis speciebus cylindricorum, & conicorum facillè colligemus. 5. huius.

THEOREMA VIII. PROPOS. VIII.

Quilibet Cylindricus triplus est Conici in eadem basi, & altitudine, cum eo existentis.

Sit quicumq; cylindricus, *GO*, & conicus in eadem basi, *IMNO*, & eadem altitudine cum ipso. Dico cylindricum, *GO*, triplum esse conici, *HIMNO*.

Exponatur enim prisma, *AFDE*, triangulares habens bases, *ABC*, *FDE*; altitudinis æqualis altitudini cylindrici, *GO*, in basi verò, *FDE*, sit pyramis, *CDFE*; erit ergo prisma, *ADEF*, triplum pyramidis, *C*



DEF, cum resoluator in tres pyramides æquales, *FDBC*, *FDEC*, *FBAC*, vt ostendit Euclides Vnd. Element. Prop. 7. vt autem se habet prisma, *ADEF*, ad pyramidem, *CDEF*, ita se habet cylindricus, *GO*, ad conicum, *HIMNO*, ergo, *GO*, triplus est conici, *HIMNO*, vnde omnis cylindricus triplus est conici in eadem basi, & altitudine cum eo constituti, illi enim conici, qui sunt in eadem basi, & altitudine ex ant. omnes inter se sunt æquales, quod ostendendum erat. Ex ant.

ANNOTATIO.

Per ant. prop. satisfit prop. 22. lib. 2. ex ea enim pariter habetur omnes cylindricos eandem rationem habere ad conicos in eadem basi, & altitudine cum ipsis existentes, cum eorum esse triplos fuerit demonstratum, & eadem, quæ ex ipsa deducebantur, hic pariter colliguntur, proprietates inquam illæ, quas cylindricis competere dictum est in Annot. prop. 5. huius. Sic ergo ratum, ac firmum est, Conicos in eadem, vel æqualibus basibus existentes, esse inter se vt altitudines. Habereq; rationem compositam ex ratione basium, & altitudinum. Eos verò, quorum bases altitudinibus reciprocantur, æquales esse, & æqualium bases altitudinibus reciprocari. Ac tandem similes conicos esse in tripla ratione linearum, vel laterum homologorum eorundem basium, seu similium triangulorum per verticem traseuntium, quæ in ipsis prop. 22. Cor. Sectionibus, in gratiam Conicorum pariter colligebantur. Per hanc etiam satisfit prop. 24. eiusdem lib. 2. cum per eam ibi demonstrati intendatur cylindricum quemcūq; triplum esse conici in eadem basi, & altitudine cum eo existentis, vt in Sec. I. Cor. 4. gen. prop. 34. postea declaratur. Aduerte autem, quod pag. 79. lin. 1. 5. hæc verba, & cum omnibus quadratis duorum triangularum CBM , EMF , ponenda sunt post hæc verba, *dupla erunt omnium quadratorum, AF .*

THEOREMA IX. PROPOS. IX.

Conicorum frustra æquè alta, & in basibus æquè altorum conicorum, à quibus abscinduntur, constituta; inter se sunt vt bases.

Videatur schema prop. 7. huius, in quo sint conicorum æquè altorum, $AKLM$, $BSQTR$, frustra, $GIOLKM$, $XVTS$, in eisdem cum illis basibus, kLM , $SQTR$, & in æqualibus altitudinibus, C , E , DF , existentia, igitur abscissis versus puncta, C , D , altitudinum partibus æqualibus, & per earum terminos ductis planis basibus parallelis, ostendemus ab iisdem productas in frustis figuras esse inter se vt ipsæ bases eodem modo, quo ibi factum est, vnde patebit dicta frustra esse figuras proportionaliter analogas, quapropter ipsa eis inter se vt bases pariter concludemus, quod erat demonstrandum.

3. huius.

CO.

COROLLARIUM.

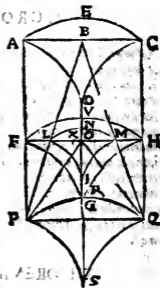
Cum verò etiam cylindrici in basibus dictorum frustorum, & in aequalibus cum eisdem altitudinibus constituti, sint inter se ut bases, erunt etiam inter se ut dicta frustra, & permutando habebunt eandem rationem ad dicta frustra, unde proposito quocumq; frusto conico, & cylindrico in eadem basi, & altitudine, cum eo existente, ut rationem cylindrici ad frustum conicum inueniamus, sufficiet alicuius cylindrici prefatae altitudinis rationem ad frustum conicum in eadem basi, & altitudine cum eo existens inuenire, ex ea enim propositi cylindrici, & frusti conici ratio illicò apparebit. Per hanc autem Propos. satisfit etiam Prop. 27. Lib. 2. & Sect. K. Cor. 4. gen. 34. eiusdem Lib. 2. ubi contenditur probare, conicorum frustra in eadem basi, & altitudine existentia, esse inuicem aequalia, hoc enim per hanc Prop. manifestum est. shuius.

THEOREMA X. PROPOS. X.

Cylindri cus ad frustum conicum quodcumq; in eadem basi, & altitudine cum eo constitutum (sumptis duabus homologis in oppositis basibus frusti conici) eam habet rationem, quam quadratum maioris homologarum ad rectangulum sub ambabus homologis, vna cum tertia parte quadrati differentiae earundem. Idem verò frustum ad conicum in eadem basi, & altitudine, cum eo existentem, erit ut rectangulum sub maiori, & tripla minoris, vna cum quadrato differentiae earundem homologarum, ad maioris quadratum.

Sint in quacunq; basi, $FRQS$, & eadem altitudine cylindricus, FQ , frustum conici, $BFRQS$, nempe, $LNMI$ & conicus, $OPRQS$, secto autem quomodocumq; conico plano per verticem aëto, producatür triangulum, B Coro. 21.
 PQ , secans oppositas bases frusti conici in rectis, LM , FQ , quæ 1. 1.
erunt homologæ similium figurarum, $LNMI$, $FRQS$, similiter, eodem extenso plano, ac completo cylindrico in eadem altitudine cum conico, BRS , secantur eius oppositæ bases, necnon figura, $FVHG$, ab eodem plano in rectis, AC , FH , PQ . Dico ergo
cylind.

cylindricum, FQ, ad frustum conici, NISR, eandem rationem habere, quam quadratum, PQ, ad rectangulem, sub, PQ, LM, vna cum quadradifferentiæ earundem. Idem verò frustum ad conicum, OPQ, esse vt rectangulum sub, PQ, & tripla, LM, vna cum quadrato differentiæ earundem, ad idem quadratum, P Q. Etenim cylindricus, FQ, ad frustum conici, NISR, habet rationem compositam ex ratione cylindrici, FQ, ad cylindricum, AQ, idest ex ratione, FP, ad, PA, vel, LP, ad, BP, vel excessus, PQ, super, LM, (qui sit, FX,) ad, PQ, & ex ratione cylindrici, AQ, ad conicum, BSR, idest ex ea, quam habet, PQ, ad, PQ, & tandem ex ratione conici, BSR, ad



frustum, ISRN, quæ est eadem ei, quam habet cubus, PQ, vel, F H, ad parallelepipedum ter sub, HX, & quadrato, XF, ter sub, F X, & quadrato, XH, cum cubo, FX, est enim conicus, BSR, similis conico, BIN, & idè, BSR, ad, BIN, est vt cubus, PQ, vel, FH, ad cubum, LM, seu ad cubum, XH, vnde cum cubus, FH, æquetur cubis, FX, XH, cum parallelepipedis ter sub, FX, & quadrato, XH, & ter sub, HX, & quadrato, XF, idè per conuersionem rationis conicus, BSR, ad frustum, ISRN, erit vt cubus, FH, ad parallelepipedum ter sub, FX, & quadrato, XF, ter sub, XF, & quadrato, HX, cum cubo, HX. Duæ rationes autem nempe, quæ habet, FX, ad, PQ, &, PQ, ad sui, componunt rationem, FX, ad, PQ, vel triplæ, FX, ad, PQ, seu, FH, vel, sumpto pro communi basi quadrato, FH, componunt rationem parallelepipedum ter sub tripla, FX, & sub quadrato, FH, ad cubum, FH, quæ proportio cum ea, quam diximus habere cubum, FH, ad parallelepipedum ter sub HX, & quadrato, XF, ter sub, XF, & quadrato, HX, cum cubo, FX, componit rationem parallelepipedum ter tripla, FX, & quadrato, FH; ad parallelepipedum ter sub, HX, & quadrato, XF, ter sub, XF, & quadrato, HX, cum cubo, XF, ergo cylindricus, FQ, ad frustum, ISRN, erit vt parallelepipedum ter tripla, FX, & quadrato, FH, ad dicta sex parallelepipeda cum cubo, FX, vel vt eorum ter tripla, idest vt parallelepipedum sub, FX, & quadrato, F H, ad

Annot. p.
5. huius.

8. huius.

Ex diff. 7.
l. 1.

Annot. p.
8. huius.

38. lib. 2.

H, ad parallelepipedum sub, FX, & quadrato, XH, sub, HX, & quadrato, XF, cum $\frac{1}{2}$. cubi, XF, hæc tria verò æquantur parallelepipedo sub, FX, & rectangulo, FHX, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, FX, nam parallelepipedum sub, HX, & quadrato, XF, idem est cum parallelepipedo sub, FX, & rectangulo, FXH, simul cum $\frac{1}{2}$. cubi, FX, idest vna cum parallelepipedo sub, FX, & $\frac{1}{2}$. quadrati, FX, (cum sit communis altitudo) fiet parallelepipedum sub, FX, & rectangulo, FXH, cum quadrato, XH, idest sub, FX, & rectangulo, FHX, & sub $\frac{1}{2}$. quadrati, FX, igitur cylindricus, PQ, ad frustum, ISRN, erit vt parallelepipedum sub, XF, & quadrato, FH, ad parallelepipedum sub, XF, & rectangulo, FHX, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, FX, idest vt quadratum, FH, vel quadratum, PQ, ad rectangulum sub, FH, HX, vel sub, PQ, LM, vna cum $\frac{1}{2}$. quadrati, FX, differentiæ ipsarum homologarum, PQ, LM. Quoniam verò conicus, OSR, est $\frac{1}{2}$. cylindrici, FQ, idcirco ad idem frustum, ISRN, conicus, OSR, erit vt $\frac{1}{2}$. quadrati, PQ, ad rectangulum sub, PQ, LM, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, FX, vel vt quadratum, PQ, ad rectangulum sub, PQ, & tripla, LM, cum quadrato, FX, & conuertendo frustum, ISRN, ad conicum, OSR, erit vt rectangulum sub, PQ, & tripla, LM, cum $\frac{1}{2}$. quadrati, FX, differentiæ earundem homologarum, ad quadratum, PQ, quæ ostendere opus erat.

A N N O T A T I O.

PER superiorem autem demonstrationem suppletur prop. 28. l. 2. necnon ei, quod colligitur in sec. L. & M. Cor. 4. gen. 24. eiusdem l. 2. Cor. autem prop. 28. est in gratiam methodi inducibilem. Quod prop. 29. eiusdem l. 2. si intelligamus in eius figura latera, CD, DB, describere similes figuras planas, in quibus tantquam in basibus cylindrici consistant, quorum latera sint, CD, pro figura, DB, & DB, pro figura, CD, ostendemus consimili ibi traditæ demonstrationi cylindricum sub lateræ, DB, basi figura, DC, ad cylindricum sub latere, DC, basi figura, BD, prædictæ similitudine esse vt, DC, ad, DB, & sic etiam esse conicum sub lateribus, CB, BD, basi figura, CD, ad conicum sub lateribus, BC, CD, basi figura ipsius, DB, habent enim cylindrici inter se, necnon & conici, rationem, compositam ex ratione basium, & altitudinum, seu laterum æqualiter basibus inclinatorum, vt superius denuò animadu-
 Annot. p. 3. & 2. h. 106.
 erisum est: Per hæc autem satis est etiam Sec. N. Cor. 4. gen. 34. eiusdem

eiusdem lib. 2. Circa verò prop. 25. & 26. cum Corollarijs nihil dictum fuit, cum sint lemmaticæ pro methodo indiuisibilium, quæ propter restaurationem minimè indigere visæ fuerunt; Prop. 33. autem recoletur in examine lib. 3. cum Cor. Prop. 34. consistit independenter à methodo indiuisibilium, ut illius etiam Corollaria, unde nec ipsa restauranda visa sunt. Veruntamen circa Cor. 4. generale eiusdem prop. 34. superius suis locis adnotata fuerunt, quæ animaduertenda erant. Reliquæ tandem propositiones à 35. usque ad finem lib. 2. non pendent ab indiuisibilium methodo, & propterea circa illas nihil nobis dicendum occurrit. Relicta denique fuit ultimo loco prop. 23. cum Corollarij sectionibus, ac prop. 30. 31. & 32. à 23. præcipuè dependentibus cum paulò diligentiorè animaduersionem poposcere viderentur, præsertim verò cum propositione 23. restaurata, aliæ quædam propositiones lemmaticæ, ad rem nostram pertinentes, forent superextruendæ, ut in sequentibus manifestum erit.

THEOREMA XI. PROPOS. XI.

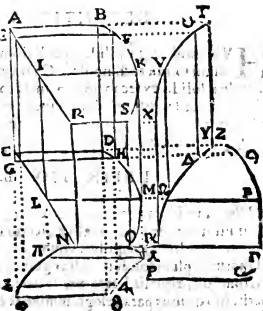
SI propositum quodcumque solidum parallelis quocumque planis ita secari possit, ut conceptæ ex secantibus planis in eo figuræ sint semper parallelogramma rectangula, latera verò eadem describentia sint omnia vni cuidam lateri, ut regulæ æquidistantiæ: Illud superficiebus cylindraceis comprehensum erit.

Sit propositum quodcumque solidum, ASOC, quod quidem parallelis quocumque planis sectum esse supponatur, efficientibus in eo parallelogramma rectangula, EH, IM, latera verò hæc describentia, GH, LM, ut & reliqua omnia præfata parallelogramma pariter describentia, sint vni cuidam regulæ, PQ, æquidistantiæ. Dico solidum, ASOC, superficiebus cylindraceis comprehendi. Quod enim superficies, in qua iacent omnia prædicta latera, quæ rectangula describunt (quæ sit, CNOD,) sit cylindracea, manifestum est ex eo, quod omnia vni regulæ, PQ, sint parallela, & eadem ratione superficies, in qua iacent latera, rectangulorum prædictis opposita (quæ sit, ARSB,) erit cylindracea. Similiter cum planum, EH, æquidistet plano, IM, & GH, ipsi, LM, etiam, EG, ipsi, LI, æquidistabit, eodem modo autem etiam ostendemus reliqua latera, quæ præfatis rectangula describentibus lateribus perpendiculariter

Defin. 3.
lib. 1.

riter

riter insistant, eidē,
 LI, æquidistare, ex
 quo concludemus
 hæc omnia pariter
 in superficie cylin-
 dracea coextendi,
 quæ sit, ACNR,
 qua methodo pate-
 bit etiam superficiē,
 BSOD, esse cylin-
 draceam, in qua
 quidem iacent late-
 ra rectangulorū præ-
 dictis opposita. Nūc
 si ducta intelligan-
 tur opposita plana
 solidum, AO, tan-
 gentia, ac præfatis
 secantibus planis æ-
 quidistantia, contingere potest, vt ipso-
 rum planorū cōtactus sit ex vtraq; parte, vel in puncto, vel in linea, vel
 in plano, vel ex vna parte cōtactus in vno istorum, ex altera verò
 in alio promiscuè, vt consideranti faciliè innotescet, attamen quom-
 modocunq; res se habeat etiam ratione istorum cōtactuum fiet,
 vt dictum solidum cylindraceis superficiebus comprehendatur, si
 enim cōtactus ex neutra partē fiat in plano, dictum solidum non
 alijs superficiebus cylindraceis, quam ijs, quæ dictæ sunt compre-
 hendetur, vt manifestum est, si vero cōtactus sit in plano, illud
 erit parallelogrammum rectangulum, vt, AD, RO, cum enim
 hæc tangentia plana æquidistant planis secantibus, quæ transeunt
 per latera cylindrici, cuius, ACNR, BDOS, sunt superficies, etiam
 ipsa per eiuſdem latera transibunt, ergo, AC, BD, sicut etiam, R
 N, SO, per quæ transeunt dicta tangentia plana, ipsis, EG, FH, æ-
 quidistant, quo pacto ostendemus etiam, AB, CD, RS, NO, ipsi
 EF, GH, pariter æquidistare, ergo plana cōtactuum, AD, RO,
 erunt parallelogramma rectangula, ergo & ipsa erunt superficies
 cylindraceæ, ergo etiam ratione contingentium planorum secan-
 tibus planis æquidistantium præfatū solidū superficiebus cylindra-
 ceis comprehendi manifestum est, quod ostendere opus erat.



DEFINITIO. A.

Huiusmodi ergo solida appellabimus nomine communi solida rectangula. Cum verò vnumquodque in eisdem solidis ex secantibus planis productorum parallelogrammorum rectangulorum fuerit quadratum, etiam solida quadrata vocabuntur. Et ipsorum regulæ, quibus latera plana rectangula continentia, æquidistant.

DEFINITIO. B.

In super solidum quodcunque rectangulum sub duabus quibuscunque superficiebus dicitur contineri (regulis iisdem supradictis) in quibus vnumquodque æquidistantium planorum, ipsum solidum rectangulum ita secantium, ut dictum fuit, æqualia latera per sectionem eisdem designauerit, sub quibus parallelogrammum rectangulum, ab eodem plano secante in solido productum, continetur. Et cum fuerit solidum quadratum poterit etiam appellari, solidum quadratum alterutrius dictarum superficierum ipsum continentium. Ipsas verò superficies, æqualia rectangulorum planorum latera capientes, homologas pariter nuncupabimus, regula quocunque dictorum eandem secantium planorum.

ANNOTATIO.

Iuxta ergo suprapositas definitiones manifestum est, quasnam condiciones habere debeant ea solida, quæ vocantur solida rectangula: Erit igitur, ASOC, rectangulum solidum: quod si, AD, EH, IM, RO, & cætera huiusmodi plana fuerint quadrata, poterit etiam dici, ASOC, quadratum solidum: Ipsi autem regulæ erunt ex, g. NO, OS, quibus latera rectangula continentia æquidistant. Esto nunc, quod parallela plana, quæ in solido, AO, rectangula, AD, EH, IM, RO, genuerunt, indefinite producta occurrerint ex g. tribus superficiebus, TXZ, Y, DORZ, NOAS, in quibus per sectionem designauerint, TY, æqualem ipsi, BD, &

8, æqualem, CD, similiter, & Δ, Vn, Xp , deinceps æquales ipsis, FH, KM, SO, sicut etiam, $\Sigma\Lambda, \Pi\Lambda, NO$, deinceps æquales ipsis, GH, LM, NO, & in superficie, DZ IO, ipsas, DZ, Hg, $N\beta, Cr$, deinceps æquales eisdem, BD, FH, KM, SO, & cætera plana parallela similiter se habuerint (ipsæ autem superficies, BO, DF, Tg, inter se, vti etiam, CO, ϕO , inter se, erunt homologæ, regula quocunq; dictorum a eisdem secantium planorum inter se æquidistantium.) Dicimus ergo solidum rectangulum, AO, nedum contineri ex. g. sub superficiebus, BDOS, CDON, in quibus iacent latera præfata rectangula continentia, sed etiam sub superficiebus, Tg, CO, vel, Tg, ϕO , vel sub superficiebus, $\Gamma ZDO, ODCN$, vel sub, $\Gamma ZDO, \phi NO\alpha$, in his enim plana parallela produxerunt latera ijs æqualia, sub quibus parallelogramma rectangula, AD, EH, IM, RO, & cætera huiusmodi continentur, vt dictum fuit, in quo non nihil à modo loquendi in planis distcedere videmur, dicitur. n. ex. g. rectangulum planum, AD, contineri sub, BD, DC, quæ rectum angulum constituunt, & non sub, TY, $\phi 8$, quæ ipsius re^{tri} Def. angulum non constituunt, hoc tamen loquendi modo vsus sum, Sec. Elem. potius soliditatis determinationē respiciens, quam continentiam, quæ sit à superficiebus in ambitu contentorum solidorum existentibus, cum enim cernerem non omnes superficies solidum rectangulum vt sic continentes posse in ipsius contenti solidi ambitu reperiri (vt ex. g. cum contineretur duabus superficiebus planis in illius ambitu existentibus, aliæ autem illis homologæ essent curvæ) & tamen latera in his concepta viderem adæquari lateribus rectangula plana continentibus, & consequenter eorundem aræ quantitatem præscribere, vnde & istæ prædictis homologæ superficies viderentur ipsius contenti soliditatem determinare (quæcumq; enim solida sub ipfius contineantur inter se erunt æqualia, vt infra ostendemus) ideo volui præfata solida rectangula dictis omnibus his superficiebus homologis secundum eandem regulam contineri. Quemadmodum si quis aliter ab Euclide diceret parallelogrammum rectangulum nedum sub lateribus ipsius angulum rectum constituentibus, sed etiam sub quibuscunq; alijs lateribus prædictis æqualibus contineri, subintelligendo non hoc parallelogrammum in ipsius ambitu necessarium ipsa latera continentia habere, sed per ea siue sint in ambitu, siue non, ipsius aræ quantitatem determinari, parallelogrammum enim rectangulum contentum sub duobus lateribus, iuxta modum loquendi Euclidianum, æquatur cuiusq; parallelogrammo rectangulo sub alijs duobus prædictis æqualibus contento. Quod si quis attendat demonstrationes sec.

Elem. à prima illius def. dependentes, animaduertet suam fortis; veritatem siue secundum hanc, siue secundum adductam definitionem intelligantur; consimilem autem demonstrationum serie ex superioribus definitionibus emanantem, inferius & ipsæ subiungam.

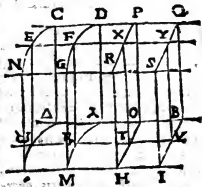
THEOREMA XII. PROPOS. XII.

Proposito quocunq; solido rectangulo iuxta datas regulas, ac sub duabus quibusdam superficiebus contento; indefinita numero solida rectangula pariter dari possunt, iuxta easdem regulas, quorum vnumquodq; proposito solido æquale erit, ac sub eisdem superficiebus continebitur.

Sit propositum quocunq; solidum rectangulum, POIS, sub duabus superficiebus, QSIB, OB1H, contentum, cuius regulæ sint, HI, IS. Dico indefinita numero solida rectangula regulis eisdem pariter dari posse, quorum vnumquodq; ipsi, POIS, æquale erit, ac sub eisdem superficiebus, QSIB, OB1H, continebitur. Igitur rectangulum solidum, POIS, superficiebus cylindraceis comprehendetur, illæ ergo superficies indefinitè hinc inde produci intelligantur, in quibus latera signata per plana parallela, in solido parallelogramina rectangula gignentia, vni regulæ, vt ipsi, HI, æquidistant, tales autem sunt superficies, PS, SH, HB, BP, sicut etiam, PH, HS, SB, BP, quarum est pariter regula, SI, cum enim, RI, PB, fuerint parallelogramina rectangula, tam iuxta regulam, HI, quam iuxta, SI, possunt in ipsis recte lineæ vni cuidam parallelæ designari: Producat autem ipsæ, PS, SH, HB, BP, hinc inde indefinitè, intelligaturq; similiter in quacunq; productarum superficialium, vt in, OI, producta, existere figura quæcunque, $\Delta K M \lambda$, homolôga, iuxta regulam, RI, ipsi, OHIB, in eadem superficie existenti, deinde per illius ambitum, $\Delta K M \lambda$, feratur quædam recta linea indefinitè hinc inde producta, semper ipsi, SI, æquidistanter, donec omnem illius percurrerit ambitum, gignens superficies cylindraceas, ΔCKN , NM, $G M \lambda D$, $D \lambda$, abscindensq; a superficie, QR, indefinitè producta superficiem cylindraceam, DCN G. Esto igitur, quod vnum parallelorum planorum in solido, PI, rectangula plana gignentium, vt, quod genuit, XV, indefinitè productum, ita vt secet solidum, CM, in eo produxerit figuram. Ege, quoniam ergo, EF, est parallela ipsi, &æ, nam est portio, EY, quæ est parallela ipsi, &V, similiter, E&, est parallela ipsi, F&, erit, Ege, pa-

11. huius.

parallelogrammum, & $F\alpha\epsilon$, est angulus rectus, est enim exterior parallelarum, $F\alpha$, $X\tau$, & ideo ipsi interiori, $X\tau$, æqualis, erit, $E\alpha$, etiam rectangulum, & quia, $\alpha\beta$, æquatur ipsi, TV , sunt .n. ΔM , OI , figuræ homologæ, sicut etiam, $F\alpha$, æquatur ipsi, YV , ideo rectangulum, $E\beta$, erit æquale rectangulo, XV . Eadem ratione ostendemus, quæcunq; alia duo rectangula ab eodem distorum æquidistantium plano in ipsis solidis producta æqualia esse, ergo cum solida, CM , PI , sint in eadem altitudine sumpta regulis eisdem æqualibus rectangulis, cõcluduntur enim



inter extrema plana parallela, quorum contactus est in planis, NM , RI ; Ca , Pb , ideo dicta solida erunt æqualiter analogæ iuxta dictas regulas, ergo inter se æqualia erunt; & cum superficies, ΔM , sit homologa ipsi, OI , & DM , ipsi, QI , regula plano, RI , propterea & erit, CM , solidum rectangulum æquale ipsi, PI , & sub eisdem superficiebus, QI , IO , continebitur, & eius regulæ erunt pariter ipsæ, HI , IS . Cum verò in superficie, OI , indefinitè producta, indefinitæ numero figuræ ipsi, OI , homologæ, regula plano, RI , supponi possint, vt facillimè apparet, ideo supradicta methodo tot solida rectangula iisdem superextrui poterunt, regulis eisdem, quot erunt figuræ ipsi, HP , homologæ, iuxta dictas regulas, idest numero indefinita, quorum vnumquodq; ipsi, PI , adæquari, ac sub eisdem superficiebus, QI , IO , contineri, vt supra ostendimus. Quemadmodù si etiã indefinitè superficies, PH , HS , SB , BP , supra, vel infra producerentur, alia indefinita numero solida rectangula inueniri eodem modo possent, quorum vnumquodque ipsi, PI , adæquari, ac sub eisdem superficiebus, QI , IO , contineri, regulis eisdem, HI , IS , pari ratione probaremus. Hæc autem ostendenda proponebantur.

COROLLARIUM I.

Ex supra demonstratis manifestum est, quomodo solidum rectangulum sub duabus datis superficiebus contentum, iuxta datas regulas, in data superficie cylindræca, quæ continentium altera sit

homologæ, describi possit, superficies enim CG , describetur & ipsa latera, NG , moto per lineam, NEC , semper ipsi, HI , æquidistanter.

COROLLARIUM II.

Insuper innotescit solidum rectangulum quocumq; esse semper portionem solidam duobus cylindricis se se inuicem per suas superficies cylindræas decussantibus communem, quorum laterum regula si simul ad unum punctum componantur, sibi inuicem perpendiculares erunt, ut regula, HI , cui æquidistant latera superficiæ cylindrææ, $PSHBP$, est ad angulum rectum cum regula, IS , cui æquidistant latera superficiæ cylindrææ, $PHSBP$, quod quidem solidum, PI , patet gigni ex concursu dictarum superficialium, sicut, CM , ex concursu earundem, $PSHBP$, indefinite productarum, necnon ipsarum, $CKGKC$, hoc est unumquodq; ipsorum, CM , PI , esse portionem solidam communem duobus cylindricis, quorum laterum regula sunt ipsæ, HI , IS , ad inuicem perpendiculares.

COROLLARIUM III.

Vlterius patet, quod solida rectangula sub superficialibus homologis in xta easdem regulas contenta, inter se sunt æqualia: Et enim si propositæ ex. g. essent superficies, QI , IO , homologæ ipsis, DM , MA , regula plano, RI , & completa fuissent solida rectangula, PI , CM , eodem modo ostensum fuisset ipsa inter se æqualia esse.

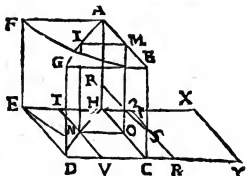
COROLLARIUM IV.

Ex hac Prop. & Cor. ant. deniq; apparet, quam congruenter dictum fuerit solidum rectangulum nedum sub duabus superficialibus in eiusdem ambitu existentibus contineri, sed etiam sub duabus alijs quibuscumq; prædictis homologis, iuxta easdem regulas, licet enim diuersis superficialibus ipsa solida comprehendatur, tamen eadem semper solidatis quantitas conseruatur, retentis eisdem regulis, cuius determinatio cum ex lateribus habeatur, vel rectangula plana dictorum solidorum continentibus, vel æqualia ijs, quæ eadem continent, iaceant verò hæc in dictis superficialibus, propterea non incogruè, puto, dictum fuit præfata solida sub talibus quibuscumque homologis superficialibus, regulis eisdem, contineri.

THEOREMA XIII. PROPOS. XIII.

SI, expositis duabus quibuscumq; solidorum reſtangu-
lorum deſcriptibilium regulis, ad vnum punctum cō-
poſitis, iuxta eandem ſolidum reſtangulum contineatur
ſub parallelogrammo, & alia quacumq; figura plana in
ambitu contenti ſolidi exiſtente, ipſum ſolidum reſtangu-
lum erit cylindricus, & figura plana ſuperius dicta erit il-
lius baſis. Quod ſi etiam prædicta figura fuerit parallelo-
grammum, & ambo in illius ambitu, contentum iſdem
ſolidum reſtangulum erit parallelepipedum.

Exponantur duæ inuicem perpendiculares regulæ, BC, CD, ſo-
lidorū deſcriptib liū ſub parallelogrammo, AC, & figura plana qua
cumque, HDC, ſit autem deſcriptum ſolidum reſtangulum ſub eiſ-
dem contentum, AG
CH, iuxta regulas, B
C, CD, ita tamen vt
figura plana, HDC,
ſit in ambitu ipſius
contenti ſolidi. Di-
co, AGCH, eſſe cy-
lindricum. Quod.n.
AC, CG, GH, ſint
ſuperficies cylindra-
cæ, quarum regula,
BC, manifeſtum eſt,
quod verò latera per



ſecantia paralela plana in ipſis deſignata ſint æqualia ipſi, BC, la-
teri parallelogrammi, AC, ex diſtis etiam cōſtare poteſt, ſed maio-
ris dilucidationis gratia ſit ab aliquo diſtorum ſecantium planorū,
in ſolido, AGHC, productum reſtangulum, IMON, eſt ergo, IN,
æqualis, MO, hoc eſt ipſi, BC, quo pacto idem de cæteris oſten-
demus, in parallelogrammo autem, GC, eadem verificantur, & in
illi oppoſito, ſi contactus plani ipſi, GC, oppoſiti eſſent in plano,
vt manifeſtum eſt, ergo perinde eſt ac ſi latus æquale, BC, ambitū
figuræ, HDC, extremo ſui puncto temper ipſi, BC, æquiditanter
percurſiſſet iplam ſuperficiem, ADBH, deſcribendo, erit ergo, A
GCH, cylindricus, cuius baſis eſt, HDC, figura. Præſatum qui-
dem ſolidum habet in ambitu figuras ipſum continentes, ſed ſi vel-
limus

Def. 3. l. 1.

linus etiam casum intelligere cum tantum figura plana est in illius ambitu; hoc in schemate ant. prop. facile percipiemus, in qua sint regulæ, SI, IH, continentes verò figuræ, QI, ΔM , quarum, QI, supponatur esse parallelogrammum, sed non in ambitu contenti eidem solidi, quod sit, CM, ΔM , verò sit figura plana, quæ debet in ambitu solidi reperiri; igitur consimili methodo ostendemus etiam, CM, esse cylindricum, in basi, ΔM , constitutum. Quod si continentes figuræ, QI, IO, fuerint ambo parallelogramma, ac in ambitu contenti solidi, quod sit, PI, manifestum est nedum, PI, esse cylindricum, sed etiam esse parallelepipedum, sunt enim plana, RI, PB, parallela, necnon, PH, est superficies plana ipsi, QI, parallela, ac, PS, est plana, necnon ipsi, HB, similiter parallela, quod ostendere oportebat.

COROLLARIUM I.

EX hoc colligitur, si, ducta, EH, per, H, parallela, DC, in parallelis, EH, DC, ind. finitè productis, reperitur alia quacunque plana figura, vt, EHC, solidum rectangulum sub parallelogrammo proposito, AC, seu illi analogo superficie secundum regulam planam, GC, & sub figura, FHC, in ambitu contenti solidi exi. lence, quod sit, AFCH, ad contentum sub eodem parallelogrammo, AC, seu illi analogo superficie secundum dictam regulam, & sub figura, HDC, dummodo ea sit in ambitu pariter contenti solidi, esse vt figura, EHC, ad figuram, HDC, sunt enim hæc solida, ABFHC, ABGHC, cylindrici in eadem altitudine sumpta respectu basium, EHC, DHC, & ideo sunt inter se vt ipsæ bases, unde cum ipsæ fuerint æquales etiam dicta solida rectangula æqualia erunt.

s. huius.

COROLLARIUM II.

Habetur in superfi in eodem schemate ducatur in parallelogrammo, AC, quacunque; parallela, HC, vt, RS, constituens parallelogrammum, RG, rectangulum solidum sub, AC, & figura plana ex. g. HDC, contentum, dummodò hæc sit in ipsius ambitu, ad rectangulum solidum sub, RC, & eadem figura, HDC, in huius etiam ambitu existente, seu sub quacunque alia plana figura in eisdem parallelis cum, H DC, existens, dummodò sit in ipsius ambitu, regulis usdem, BC, CD, esse vt parallelogrammum, AC, ad parallelogrammum, CR, seu vt, RC, ad, CS; Et si sint etiam parallelogramma, HV, HD, habetur etiam rectangulum solidum sub, AC, CE, ad rectangulum solidum sub, RC, CT, esse

vt

*ut rectangulum, BCD, ad rectangulum, SCV, sunt enim hæc plana re-
ctangulæ bases dictorum rectangulorum solidorum, qua ex dictis sunt
parallelepipeda, seu cylindrici eiusdem altitudinis sumpta respectu
dictarum basium, & ideo sunt ut ipsæ bases, hoc est ut dicta rectangu-
la, supposito tamen quod continentia parallelogramma sint in ambitu
contentorum solidorum.*

ANNOTATIO.

Poterant quidem exhiberi parallelogramma, AC, RC, in eodẽ
plano cum figuris, EHC, CHD, & in eisdem cum ipsis paral-
lelis, vt, HY, pro ipso, AC, &, HR, pro ipso, RC, & intelligi mē-
taliter descripta solida rectang. iam dicta sub istis in eodem plano
iacentibus fig. prout dictum est, quo pacto eadem intelligi potuif-
sent, sed cum nonnihil difficile captu initio huius nouæ doctrinæ
hoc mihi fore videretur, eadem vt supra exhibere malui, verunta-
men valde expediet pro sequentibus assuefieri dictorum solidorum
mentali descriptioni, exhibitis continentibus eadem fig. (quæ, pu-
to, semper planæ erunt) in eisdem parallelis constitutis, quemad-
modum duabus quibuscunq; rectis lineis exhibitis, illico rectangu-
lum sub ipsis mentaliter describere solemus, sicuti & quadratum
datæ rectæ lineæ cuiuscunq; absque eo, quod semper in schema-
tibus ipsa descripta exhibeantur, sic ergo & solida rectang. & solida
quadrata, sub duabus planis figuris in eisdem parallelis existentibus
iuxta datas regulas contenta, ad figurarum confusionem cuitan-
dam & nos quoq; mentaliter vt plurimum describemus.

THEOREMA XIV. PROPOS. XIV.

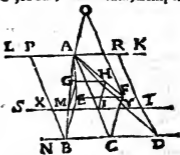
Si duo triangula fuerint in eisdem parallelis constituta.
Solidum rectangolum sub eisdem contentum, regula
altera dictarum parallelarum, ac alia quadam illi in subli-
mi perpendiculari, erit pyramis, habens in basi parallelo-
grammum rectangulum, sub dictorum triangulorum basi-
bus contentum, dummodo alterum dictorum triangulorũ
sit in ambitu contenti solidi.

Sint duo triangula in eisdem parallelis constituta, LK, ND, nẽ-
pẽ, ABC, ACD, in basibus, BC, CD, in parallela, ND, dispositis,
cleuetur autem à puncto, C, quædam, CF, perpendicularis ipsi, C

V v v

B. Di-

B. Dico solidum rectangulum sub duobus triangulis, ABC, ACD , contentum, regulis, BC, CF , esse pyramidem, cuius basis erit parallelogrammum rectangulum sub prædictis basibus, BC, CD , pariter contentum, dummodo alterum dictorum triangulorum sit in ambitu ipsius contenti solidi. Sit enim descriptum ipsum solidum rectangulum sub triangulis, ABC, ACD , contentum, nempe, $ABCF$, sit tamen alterum ipsorum, vt, ABC , in ambitu ipsius contenti, solidi, & ACF , superficies homologa ipsi, ACD , iuxta regulam planū, BCF , erit ergo, ACF , triangulum, esto enim, quod vnū parallelorum ipsi, BF , planorum, solidum, AEC , secantium, in eo effecerit parallelo-



grammum rectangulū, $GMIH$, & in triangulo, ACD , rectam, IY , iam scimus, quod, HI , est in eodem plano cum, FC , cui est parallela, & ambo sunt in eodem plano cum, AC , quod etiam de reliquis in superficie, ACF , ipsi, FC , parallelis existentibus eodem modo ostendetur, ergo iacent omnes in plano ipsarum, AC, CF , ergo, ACF , est superficies plana cum vero vt, CD , ad, IY , ita sit, CA , ad, AI , & ita etiam, CF , ad, IH , erit, CF , ad, IH , vt, CA , ad, AI , ergo tria puncta, FHA , erunt in recta linea, in eadem autem esse ostendemus etiam reliquarum ipsi, CF , parallelarum extrema puncta ex hac parte, ergo, ACF , erit triangulum: Confimili autem modo pariter demonstrabimus, ABE, AEF , esse triangula, & est, BF , parallelogrammum rectangulum, ergo solidum, ABF , est pyramis, & eius basis parallelogrammum, BF , quod ostendere opus erat.

Lemmas 1.
22. 41.

COROLLARIUM I.

EX hoc pariter intelligi potest, quod solidum rectang. contentum sub trapezibus ex.g. $MBCI, ICDY$, in eisdem parallelis, ST, ND , existentibus, regulis eisdem, BC, CF , est frustum pyramidis abscissa per planum basi, BF , æquidistans, vt, $GECI$, dummodo alterum dictorum trapeziorum in ambitu contenti solidi consistat.

COROLLARIUM II.

Similiter si compleantur parallelogramma, PC, CR, CO , solidum rectangulum sub, RC, CP , seu sub, OC, CP , contentum, quod est parallelepipedium, triplum erit contenti sub triangulis prædictis idest pyramidis, AEC . Contentum verò sub parallelogrammis, TC, C, CX , ad contentum sub dictis trapezijs hoc est ad frustum pyramidis, $GECl$, erit ut quadratum, BC , rectangulum sub, XI, IM , una cum; *ac. huius.* quadrat. XM , retentis semper iisdem reg. BC, CF . Hæc autem vera sunt siue latus, AC , sit commune præfatis triangulis, seu parallelogrammis siue non, ac siue latus, IC , sit commune prædictis trapezijs seu parallelogrammis, siue nõnt facillè intuenti innotescet.

COROLLARIUM III.

Patet ultimo solida rectangula sub dictis triangulis, regulis iam dictis, contenta, se habere inter se, ut ipsæ pyramides, nempe æquè alta esse in proportione basium, & in eadem, vel equaliquè basibus existentia esse in proportione altitudinem respectu basium assumpatarum, quod est simile illi, quod animaduersum est in Cor. 1. & 2, prop. ant. circa parallelogramma solida rectangula continentia.

ANNOTATIO.

Aduerte autem cum solidum rectangulum fuerit quadratum, tunc vnâ sufficere exponi figuram, ut ex. g. triangulum, A, BC , quod tunc æquipollet duobus expositis, ABC, ACD ; & contentum solidum sub, ABC, ACD , tunc etiam dicimus quadratum solidum ipsius, ABC , regulis, BC, CF , hæc autem planarum figurarum quadrata solida mentaliter quoque ut plurimum descripta esse intelligemus, ut etiam superius animaduersum fuit. His autem præpositis, nunc illa subiungemus, quæ assimilantur Prop. Sec. Elem. ac iuxta methodum indiuisibilem lib. 2. prop. 23. ostensa fuere.

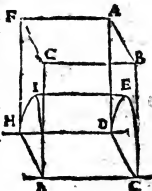
THEOREMA XV. PROPOS. XV.

Si duæ expositæ fuerint superficies solidum rectangulû iuxta datas regulas continentes, altera autem earum fuerit in quotcunq; partes diuisa per lineas secantes quas- cunq; suæ regulæ intra dictam superficiem parallelas, alte-

ra autem fuerit indiuisa : Solidum rectangulum sub indiuisa, & sub diuisa contentum, æquabitur solidis rectangulis sub eadem indiuisa, & sub partibus diuisæ, regulis iisdem, contentis.

Sint duæ expositæ superficies, AC, CH, solidum rectangulum, FC, iuxta regulas, kC, CB, continentem, earum autem altera, vt, AC, sit diuisa in quocumq; partes, vt per lineam, DEC, secantem quascumq; intra superficiem, AC, ipsi regulæ, BC, parallelas, in duas partes, DEC, ADECB, ipsa

verò, HC, sit indiuisa. Dico solidum contentum sub indiuisa, HC, & sub diuisa, AC, id est, FC, æquari solidis contentis sub, DEC, CH, & sub, DECBA, & sub eadem, CH. Intelligatur ergo quendam rectam lineam ferri per ipsam, CED, indefinite productam, donec totam percurrerit, ac semper moueri ipsi regulæ, KC, æquidistanter, describet ergo superficiem cylindraceam, quæ sit, KEH, & abscindet à superficiebus, FK, AC, superficies cylindraceas, HIK, DEC, & HC, est cylindracea, & hoc



siue sit in ambitu contenti solidi, siue non, alioquin non possent latera, quæ per solidum, FC, secantia plana, ipsi, GC, æquidistantia signantur in ipsa superficie, HC, omnia vni regulæ, kC, æquidistare, ergo solidum, HIKCED, superficiebus cylindraceis comprehenditur, quarum regulæ sunt, kC, CB, inuicem perpendiculares ergo si solidum, HIKCED, secetur planis ipsi, kB, parallelis fiet in solido parallelogramma ipsi, kB, æquiangulara, hoc est rectangula, & ideo dictum solidum erit solidum rectangulum contentum sub, HC, CED, superficiebus : Eodem modo ostendemus, HIKCEDAG, esse solidum rectangulum contentum sub superficie, DIC, hoc est, Dk, illi homologa iuxta planum, BK, ac sub, DECBA, est autem solidum, FC, æquale duobus solidis, HIC, CIHFB, simul sumptis, ergo solidum rectangulum contentum sub indiuisa superficie, HC, & sub diuisa, AC, æquale est solidis rectangulis contentis sub eadem indiuisa, HC, & sub partibus diuisæ, DEC, DECBA, regulis semper iisdem, BC, CK, retentis, quod ostendere opus erat.

COROLLARIUM I.

Exposita figura plana quacumq; BGEO, in parallelis, AC, DF, & assumptis pro regulis, DF, FH, inuicem perpendicularibus, ita tamen ut, FH, sit extra planum parallelarum, AC, DF, primò colligitur, si ipsa figura per solam lineam, BE, (secantem quascumq; intra eandem figuram, ipsi regula, DF, parallelas descriptibiles) diuidatur utrunq; quadratum solidum sub indiuisa, BGEO, & sub eadem, BGEO, quatenus diuisa, aequari reſtangularis solidis sub eadem indiuisa, BGEO, & sub partibus, BGE, BOE.



COROLLARIUM II.

Colligitur secundo reſtangularum solidum sub indiuisa, BEO, & sub diuisa, BGEO, aequari reſtangularis solidis sub eadem indiuisa, BEO, & sub parte, BEO, hoc est quadrato solido, BEO, & reſtangulari solido sub, BEO, BEG.

COROLLARIUM III.

Colligitur tertio quadratum solidum ipsius, BGEO, aequari reſtangularis solidis sub, BGEO, ac, utriusq; partibus, BEG, BEO, per Cor. prim. & subinde aequari quadratis partium, BEG, BEO, una cum reſtangularo bis sub eisdem partibus, BEG, BEO, per Cor. ant.

COROLLARIUM. IV.

Colligitur quarto, si linea, BIE, bifariam, BNE, verò non bifariam secet ductas ipsi, DF, parallelas: Reſtangularum solidum sub indiuisa, BNEO, & sub diuisa, BGEN, per ipsam, BIE, aequari reſtangularo solido sub eadem indiuisa, BNEO, & sub partibus, BIEN, BGEI, diuisa, hoc est aequari reſtangularo sub eadem, BNEO, & sub, BIEO, cum solido reſtangularo sub, BOEN, BNEI, cui si addatur quad. solidum, BIEN, (ex quibus integratur reſtang. solidum sub, BIEO, BIEN, per Cor. primum) fiet quadratum solidum, BEO, cui aequabitur reſtangularum solidum sub, BGEN, BNEO, cum quadrato solido figura, BIEN. intermedia secantibus lineis, BIE, BNE, liceat autem, cum dicimus reſtangularum solidum sub duabus figuris, subintelligere semper contentum, breuitatis gratia, etiam si non exprimitur, ut in planis fieri consuevit.

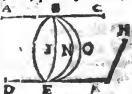
(C)

COROLLARIUM V.

Colligitur quintò, si supponamus, BIE , bifariam secare dictas ipsi, DF , parallelas in figura, $BGEN$, & deinde illis adiungi, $BNEO$, figuram in eisdem parallelis cum, $BGEN$, constitutam; rectangulum solidum sub, $BGEO$, & sub, $BNEO$, hoc est unum sub, $BGEI$. seu, $BIEN$, & sub, $BNEO$, indivisa, aliud sub, $BIEO$, & sub, $BNEO$, cum quadrato solido, $BIEN$, (quod in eodem rectangulo solido sub, $BIEN$, $BNEO$, facit rectangulum solidum sub, $BIEN$, $BIEO$, per Cor. 2.) equari quadrato solido, $BIEO$, per Cor. 1. hoc est rectangulum solidum sub figura composita ex proposita, $BGEN$, & adiecta, $BNEO$, & sub adiecta, $BNEO$, cum quadrato solido, $BIEN$, dimidia ipsius propositæ, equari quadrato solido, $BIEO$, composita ex dimidia, $BIEN$, & adiecta, $BNEO$..)

COROLLARIUM VI.

Colligitur sextò, in eadem fig. $BGEO$, posito, quod per lineam tantum, BNE , secentur dictæ parallela ipsi, DF , quad. solidum figuræ, $BGEO$, cum quadrato solido figuræ, $BNEO$, equari rectangulo solido bis sub, $BGEO$, & $BNEO$, figuris contento, cum quadrato solido reliquæ figuræ, $BGEN$. Nam quadratum solidum, $BGEO$, æquatur quadratis solidis, $BGEN$, $BNEO$, cum duobus rectangulis solidis sub eisdem figuris, addito ergo quadrato solido communi, $BNEO$, sicut quadrata solida figurarum, $BGEO$, $BNEO$, æqualia duobus rectangulis solidis sub figuris, $BGEN$, $BNEO$, cum duobus quadratis solidis, $BNEO$, hoc est duobus rectangulis solidis sub, $BGEO$, $BNEO$, cum quadrato solido, $BGEN$.



COROLLARIUM VII.

Colligitur septimò, si proposita figuræ, $BGEN$, dividatur per lineam, BIE , dictas quoque parallelas ipsi, DF , secantem, rectangulum solidum quartum sub, $BGEN$, $BIEN$, cum quadrato solido, $BGEI$, æquari quadrato solido figuræ composita ex, $BGEN$, & figuræ, $BIEN$, seu illi homologa, quæ sit, $BNEO$. Duo enim rectangula solidi sub, $BGEN$, $BIEN$, cum quadrato solido, $BGEI$, æquantur duobus quadratis solidis, $BGEN$, $BIEN$, ex Cor. ant.

hoc

hoc est quadratis solidis, $BGEN, BNEO$, additis communibus duobus ad huc reſt angulis ſub, $BGEN, BIEN$, ſeu, $BNEO$, qua ſuperſunt, ſi-
ent quatuor reſt angula ſolida ſub, $BGEN, BIEN$, cum quadrato ſo-
lido, $BGEI$, aequalia duobus quadratis ſolidis, $BGEN, BNEO$, cum
duobus reſt angulis ſolidis ſub, $BGEN, BNEO$, hoc eſt quadrato ſoli-
do, $BGEO$, per Cor. Tertium.

COROLLARIUM VIII.

Colligitur ſecundò, ſi figura, $BGEO$, ſecetur ut in Cor. 4. quadrata
ſolida figurarum, $BGEN, BNEO$, dupla eſſe quadratorum ſoli-
dorum, $BGEI, BIEN$. Nam quad. ſolidum, $BGEN$, aequatur quadra-
tis ſolidis, $BGEI, BIEN$, cum duobus reſt angulis ſolidis ſub, $BGEI, BI-
EN$, per Cor. Tertium, id eſt cum duobus reſt angulis ſolidis ſub, $BIEO$,
(homologa ipſi, $BGEI$.) & $BIEN$, quibus ſi addatur reſiduum qua-
dratum ſolidum, $BNEO$, ſunt duo reſt angula ſolida ſub, $BIEO, BIE-
N$, cum quadrato ſolido, $BNEO$, aequalia quadrato ſolido, $BIEO$. ſeu,
 $BGEI$, cum quadrato ſolido, $BIEN$, igitur quadrata ſolida, $BGEN, B-
NEO$, dupla ſunt quadratorum ſolidorum; $BGEI, BIEN$.

COROLLARIUM IX.

Colligitur nonò, ſuppoſitis in figura ſectionibus ipſius Cor. 4. qua-
drata ſolida, $BGEO, BNEO$, dupla eſſe quadratorum ſolidorum,
 $BGEI, BIEO$. Etenim quadratum ſolidum, $BGEO$, aequatur per Cor 3.
quadrati ſolidis, $BGEI, BIEO$, cum duobus reſt angulis ſolidis ſub, $BG-
EI$, ſeu, $BIEN$, illi homologa, & $BIEO$, qua duo reſt angula ſolida ſa-
ciunt cum quadrato ſolido, $BNEO$, reſiduo, quadrata ſolida, $BIEO, BI-
EN$, ſeu, $BGEI, BIEO$, ergo quadrata ſolida, $BGEO, BNEO$, dupla
ſunt quadratorum ſolidorum, $BGEI, BIEO$.

COROLLARIUM X.

Colligitur decimò, & ultimò, ſi tandem ex. g. linea, BNE , ſecet
quaſcumq; mra. figuram, BNE , ipſi DF , equidistantes, ſecun-
dum extremam, ac mediam rationem, ita ut maior portio cuiuſcumq;
ſectæ linea ſit ex. g. in figura, $BGEN$, reſt angulum ſolidum ſub, $BGE-
O, BNEO$, aequari quadrato ſolido, $BGEN$, hac enim ſolida erunt
equaliter analogæ iuxta regulam planum, DFH , ex eo quod in unoquo-
que eodem parallelorū planorum ipſa ſolida ſecantiū, ac capientiū unū
reſt angulum, & unum quadratum, ſemper reſt angulum eſt æquale,
quadrato in eodem plano exiſtenti.

AN-

ANNOTATIO.

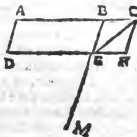
Duertatur autem me in omnibus supra positis Corollarijs supponere fecantes lineas, parallelas ipsi, DF , in dictis figuris, non nisi semel occurrere eidem rectæ lineæ; vt, BFE , semel, ac, BNE , (scorsim semel tantum; ipsas verò parallelas ad ambitum figuræ terminari, & singulas integras esse, quod etiam suppono in prop. 2. lib. 2. integras autem esse subintelligo; cum in plures rectas lineas, aliquo interuallo separatas, per ambitum figuræ, quæ ab eadem regulæ parallela efficiuntur, difungi minimè comperentur, in quo sensu sciat lector (ne quis circa hoc hæsitaret) me semper in his libris hunc terminum usurpare, sciat insuper easdè regulas, DF, FH , pro omnibus semper retineri. Hæc autè segnius, quam fortè par erat, à me nunc explicata sunt; sed cum Propositiones Lib. Sec. Etenim hæc imitarentur, & insuper consimilis doctrina, adhibita tamen indiuisibilem methodo, tradita iam fuisset Lib. 2. Prop. 29. idèò ne rerum similitudo fastidium pareret, currenti, vt ita dicam, calamo adnotata sunt. Ex supradictis autem facile est intelligere nomen quadrati solidi alicuius figuræ planæ æquipollere nomini omnium quadratorum eiusdè figuræ, & nomen rectanguli solidi sub duabus figuris æquipollere nomini rectangulorum sub eisdem figuris, quibus quidem in methodo indiuisibilem uteremur, ex quo patet, vt sic nos indefinitum planorum numerum euitare, cui ipsorum, quæ rectangula solida appellauimus, soliditatem satis concinne puto substitutumus. His autem paratis, sequentium propositionum demonstrationes tum quæ supersunt l. 2. tum lib. 3. 4. ac 5. paucis mutatis compendiosissimè per hanc nouam methodum, absq; solidarum figurarum circumscriptione, & inscriptione, vt alij consueuerunt, necnon facile, ostendemus, per hæc verò Prop. 23. Lib. 2. iam satisfactum esse manifestò apparet.

THEOREMA XVI. PROPOS. XVI.

Conspecta denuò figura Prop. 30. lib. 2. & assumpta regula, FD , & alia, quæ à puncto, F , quomodocunq; intelligatur eleuata super planum, AF ; perpendiculariter ipsi, FD . Rectangulum solidum sub, AE, EC , ad rectangulum solidum sub, $ADEC$, trapezio, & triangulo, CEF regulis iam dictis, contentum, erit vt, DE , ad compositam ex DE , & EF .

Hoc

Hoc ostendetur eodem modo, ac insupradicta prop. 30. lib. 3. mutatis tantum supradictis nominibus, nempe si ubi dicimus rectangula sub duabus quibusdam figuris, hic dicamus rectangulum solidum sub eisdem figuris, sicuti etiam cum dicuntur omnia quadrata cuiusdam figuræ, nos illius vice nunc substituemus nomen quadrati solidi eiusdem figuræ, ut supra dicebatur. Igitur cum rectangulum solidum sub trapezio, ADEC, diuiso per lineam, BE, & sub triangulo, CEF, indiuiso, æquetur rectangulo solidum sub, AE, & triangulo, CEF, vel triangulo, BEC, & rectangulo solidum sub triangulo, BEC, & triangulo, CEF, primò patet rectangulum solidum sub, AE, EC, ad rectang.



§1. huius.

solidum sub, AE, & triangulo, BEC, esse vt, BF, ad, BEC, idest vt, DE, ad $\frac{1}{2}$. DE, est enim, BF, duplum trianguli, BEC. Similiter rectangulum solidum sub, AE, EC, ad quadratum solidum, BF, est vt rectangulum, DEF, ad quadratum, EF, idest vt, DE, ad, EF, quadratum verò solidum, BEF, cum sit triplum quadrati solidi, CEF, & quadrati solidi, BEC, erit etiam triplum duorum rectangulorum solidorum sub, BEC, CEF, (quadratum solidum enim, BF, ostensum est æquari quadratis solidis, BEC, CEF, cum duobus rectang. solidis sub, BEC, CEF,) & ideò erit sexcuplum rectanguli solidi, sub, BEC, CEF, idest erit ad illud vt, EF, ad sui $\frac{1}{2}$. ergo ex æquali rectangulum solidum sub, AE, EC, ad rectangulum solidum sub, BEC, CEF, erit vt, DE, ad $\frac{1}{2}$. EF, & ad rectangulum solidum sub, AE, & triangulo, BEC, seu, CEF, ostensum est esse vt, DE, ad $\frac{1}{2}$. DE, ergo colligendo rectangulum solidum sub, AE, EC, ad rectangulum solidum sub, AE, CEF, & sub, CBE, CEF, idest sub trapezio, CAL, & triangulo, CEF, erit vt, DE, ad compositam ex $\frac{1}{2}$. DE, & $\frac{1}{2}$. EF, quod ostendere oportet.

Coroll. 1.
12. huius.
Coroll. 2.
13. huius.
Coroll. 3.
14. huius.

Coro. 15.
huius.

ANNOTATIO.

Præsentem propositionem denuò secundum hanc nouam methodum ostendere volui, vt ad huius imitationem, reliquæ suppleri possint, in quibus, non alia, quam supradictorum nominum mutatione facta, demonstratio simillima sit; cum ea pariter fuerint stabilita principia, vt in antecedentibus potuit studiosus animaduertere, quæ principijs methodi indiuisibilium similia apparebant, sufficet ergo tales propositiones, tantum innuere, cum

XXX

illæ

illæ non aliam mutationem, quàm prædictam in suis demonstrationibus, poposcere videbuntur. Quoad regulas autem, iuxta quas dicimus solida rectangula contineri, poterimus etiam vice duarum vnam tantum retinere, pro vt in methodo indiuisibilem effectum est, vt ex. g. in fig. huius prop. poterat sufficere ipsa, DF, altera enim regula non alio fungitur officio, quam determinandi cum priori regula vnum planum, cui plana solida rectangula secantia, ac in illis rectangula plana producentia, æquidistant, & hoc in antecedentibus effectum est, vt clarior solidorum rectangulorum descriptio haberetur, in posterum tamen vnam tantum regulam innuemus, alteram tacitè subintelligentes, dum præfata vni cuidâ esse parallela semper supponere debeamus, erunt autem eadem regulæ, quæ in propositionibus infra citandis adhibitæ fuerunt, nisi alias regulas innuendi quandoq; necessitatem habuerimus.

THEOREMA XVII. PROPOS. XVII.

IN eodem Prop. 30. Lib. 2. schemate, regula eadem ibi assumpta, rectangulum solidum sub, AF, FB, ad rectangulum solidum sub trapezio, ADEC, & triangulo, BEC, erit vt, DF, ad compositam ex, \therefore DE, & \therefore EF.

Hæc ostendetur vt ibi, prædicta tantum nominum mutatione facta, vt mediantinnotescet.

THEOREMA XVIII. PROPOS. XVIII.

IN schemate Prop. 31. eiusdem Lib. 2. regula eadem, rectangulum solidum sub, AO, OB, ad rectangulum solidum sub trapezijs, HACN. MBCN, est vt rectangulum, HOM, ad rectangulum sub, HO, MN, cum rectangulo sub composito ex \therefore HM, & \therefore NO, & sub, NO.

Hæc similiter vt antecedens expedietur.

THEOREMA XIX. PROPOS. XIX.

IN schemate Prop. 32. Lib. 2. similiter regula eadem retenta, rectangulum solidum sub, AE, ER, ad rectan-

gulum solidum sub trapezijs, ADEC, CESR, erit vt rectangulum, DES, ad rectangulum sub, DE, & composita ex, SF, & . FE, vna cum rectangulo sub, EF, & composita ex . E F, & . FS.

Hæc etiam vt antecedentes absoluetur.

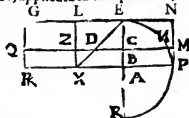
ANNOTATIO.

HVcusq; Propositionibus Lib. 2. quæ restauratione indigere videbantur satisfactum esse manifesto apparet. Reliquum est, vt & sequentium Librarum Propositiones denuo perpendentes, per hanc nouam methodum à nobis quoq; & ipsæ restaurentur, quod maiori, qua fieri poterit, breuitate, ac facilitate, nunc præstare conabimur.

THEOREMA XX. PROPOS. XX.

Assumpto ex Schemate Prop. 1. Lib. 3. semicirculo, vel semiellipsi, EPR, circa diametrum, ER, simul cū applicata, BP, quæ etiam sit regula, & parallelogrammo, HB, iuxta quemlibet trium ibi allatorum casuum nunc ostendemus, conspecta etiam illa figura, quadratum solidum portionis, DEP, ad quadratum solidum parallelogrammi, FP, esse vt composita ex . EB, & . BR, ad ipsam, BR.

Producantur enim indefinitè verius, B, E, ipsæ, PB, HE, & fiant, Bæ, EG, singulæ æquales ipsi, RE, & iungantur, Gæ, capiaturq; BX, æqualis ipsi, BE, & per, X, agatur, XL, parallelia, ER, & iungatur, æE, ac sit quæcumque, CN, applicata in tenui portione, EP, quæ producatui indefinitè hinc inde vt fecet, HP, vt in, M, EX, vt in, D, LX, vt in, Z, & Gæ, vt in, Q; sunt ergo, GB, LB, GX, parallelogramma, & . æX, est æqualis, RB, XB, autem ipsi, B E, vnde rectangulum, æXB, est æquale rectangulo, RBE, hoc est, in circulo quadrato, BP: eadem ratione ostendemus tum rectangulum, QZC, æquari quadrato, CM, tum rectangulum, QDC, æquari quadrato, CN, & hoc



Xxx 2

idea

- quatur quoq; rectangulo, DTA, ergo vt rectangulum, GQR, ad rectangulum, POT, ita rectangulum, DRA, erit ad rectangulum, DTA, hoc est ita quadratum, RF, ad quadratum, TX, ergo permutando rectangulum, GQR, ad quadratum, RF, erit vt rectangulum, POT, ad quadratum, TX, quod & in reliquis huiusmodi ostendetur spatij ergo rectangulum solidum sub trapeziji, LHGQ, LMRQ, & quadratum solidum, MSXFR, erunt, vel æqualiter in circulo, vel proportionaliter analogæ in ellipsi, ergo erunt inter se vt rectangulum, GQR, & quadratum, RF, sunt quoq; inter se, sed vt rectangulum, GQR, ad quadratum, RF, sic etiam esse ostendemus rectangulum solidum sub, HQ, QM, ad quadratum solidum, NR, ergo rectangulum solidum sub, HQ, QM, ad quadratum solidum, NR, erit vt rectang. solidum sub, LHGQ, LMRQ, ad quadratum solidum, MSXFR, & permutando rectangulum solidum sub, HQ, QM, ad rectangulum solidum sub, LHGQ, LMRQ, erit vt quadratum solidum, NR, ad quadratum solidum, MSXFR, est autem rectangulum solidum sub, HQ, QM, ad rectangulum solidum sub, HGQL, LQRM, vt rectangulum sub, GQR, ad rectangulum sub, GQ; & sub composita ex $\frac{1}{2}$. QY, & ex, YR; vna cum rectangulo sub, QY, & sub composita ex $\frac{1}{2}$. QY, & $\frac{1}{2}$. YR, hoc est vt rectangulum, DRA, ad rectangulum sub, DR, & sub composita ex $\frac{1}{2}$. RM, & ex, MA, vna cum rectangulo sub, RM, & sub composita ex $\frac{1}{2}$. RM, & $\frac{1}{2}$. MA, ergo sic etiam erit quadratum solidum NR, ad quadratum solidum semiportionis, MSXFR, & ita etiam quadratum solidum, BF, ad quadratum solidum ipsius, ICFS, con-
specta figura dictæ prop. 3. quod ostendere opus erat.

A N N O T A T I O.

- P**osterior pars dictæ Prop. 3. ostendetur vt ibi, solita nominum mutatione facta, sicut etiam Prop. 4. Prop. 5. restauratione non indiget; Cor. autem deducetur eodem modo, vt ibi mutatis tantum dictis nominibus, sunt enim quadrata solida figurarum iidem parallelis in eiusdem schemate interceptarum, figuræ solidæ æqualiter analogæ, vnde etiam sunt æquales, ex quo concluditur deinde Corollarium eodem modo, quo ibi factum est. Prop. 6. cum Cor. Prop. 7. 8. 9. cum Cor. pariter vt ibi ostenduntur, mutatis nominibus, vt supra Prop. 10. sic patebit probabantur eam figuræ, AFH, AGH, esse proportionaliter analogæ, & ideo esse inter se, vt, FH, HG, eodem modo, quo ibi factum est, ex quo similiter concludetur, AFVT, ad, AGVS, esse vt, FT, ad, GS; & non dissimi.

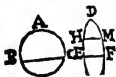
similiter in Cor. colligemus quadratum solidum, AFVT, ad quadratum solidum, AGVS, esse ut quadratum, FT, ad quadratum, GS, subaudi tamen in illius schemate secundas diametros, FT, GS, esse in eadē recta linea. Prop. 11. cum Cor. demonstrantur, ut ibi, Prop. verò 12. similiter, solita tantum nominum mutatione facta. Prop. 13. ostendetur quoque mutatis nominibus, &c. in qua aduerte pag. 17. lin. 22. superflue dicitur in, EF, quadratum, EI, detractum à rectangulo sub, IE, EF, relinquere rectangulum sub, EI, IF, ut concludatur detractis omnibus quadratis semiportionis, OCD, à rectangulis sub parallelogrammo, OV, & semiportione, OCD, relinqui rectangula sub, OCD, DCV, hoc enim constat ex C. 23. l. 2. ut citatur in margine, illud tamen ad maiorem declarationem appositum erat. Corollarium eiusdem pariter declarabitur mutatis, &c. Prop. 14. similiter probabitur, cum Cor. mutatis nominibus, &c. Sic etiam Prop. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. cum Cor. in qua patebit rectangula sub, ASB, AHTFB, æquari rectangulis sub triangulis, ABD, AVD, cum sit solida æqualiter analoga, & hoc in figura circuli, in figura autem ellipsis dicta solida ostendentur esse proportionaliter analoga, ac inter se ut coniugarum diametrorum quadrata: Sic etiam Prop. 22. 23. 24. 25. 26. in qua schema antecedentis reponendum est. Propoi. 27. 28. 29. 30. 31. cum Cor. Prop. 32. cum Cor. ac tandem Prop. 33. pariter cum Cor.

THEOREMA XXII. PROPOS. XXII.

Expositis duabus quibuscumq; figuris planis, & in earum vnaquaq; sumpta utcumq; regula, ut quadrata solida earundem figurarum iuxta dictas regulas, ita erunt solida quæcumq; ad inuicem similia ex eisdem genita figuris, iuxta easdem regulas.

Sint duæ quæcumq; figuræ planæ, ABC, DEF, in quibus duæ utcumq; sint sumptæ, BC, EF, rectæ lineæ. Dico igitur ut quadratum solidum figuræ, ABC, ad quadratum solidum figuræ, DEF, regulis iam dictis ita esse quodcumq; solidum simile genitum ex, ABC, ad sibi simile genitum ex, DEF, iuxta eandem regulas. Ducatur in altera figurarum, ut in, DEF, utcumq; regula, EF, parallela, HM. Igitur quadratum, EF, ad quadratum, HM, habet duplicatam rationem eius, quam habet, EF, ad, HM, sed etiam alia quælibet figura plana descripta ab, EF, ad sibi similem descriptam

ptam ab, HM, prædictæ homologa, habet duplicatam rationem eius, quam, EF, habet ad, HM, ergo vt quadratum, EF, ad quadratum, HM, ita est figura, EF, ad sibi similem figuram descriptam ab, HM, & permutando vt quadratum, EF, ad figuram quæcumq; aliam descriptam ab, EF, ita erit quadratum, HM, ad figuram prædictæ similem descriptam ab, HM, prædictæ homologa, ergo quadratū solidum figuræ, DEF, & solidum simile quodcumq; genitum ex figura, DEF, iuxta communem regulam, EF, sunt solida proportionaliter



3. huius. analogæ secundum communem regulam, EF, ergo erunt inter se vt figuræ planæ ab eodem latere, vt ab, EF, descriptæ. Eodẽ modo ostendimus quadratum solidū, ABC, & solidū aliud quodcumq; simile genitum ex figura, ABC, iuxta comunẽ regulam, BC, esse inter se, vt figuræ à, BC, descriptæ, sunt autem duo quadrata, BC, EF, & duæ aliæ quæcumq; similes figuræ planæ descriptæ ab homologis, BC, EF, proportionales, ergo & dicta solida proportionalia erunt, nèpè vt quadratū, BC, ad figuram, BC, sic erat quadratum solidū, ABC, ad solidum simile genitū ex, ABC, sed vt quadratū, BC, ad figuram, BC, ita est quadratum, EF, ad figuram, EF, prædictæ similem, & ita etiam quadratum solidum, DEF, ad solidum prædicto simile genitum ex, DEF, ergo quadratum solidum, ABC, ad solidum simile, ABC, est vt quadratum solidum, DEF, ad solidum prædicto simile genitū ex, DEF, & permutando quad. solidū, ABC, ad quadratū solidū, DEF, erit vt solidū quodcumq; simile genitū ex, ABC, ad sibi similem genitū ex, DEF, iuxta dictas regulas, quod ostendere opus erat.

ANNOTATIO.

Huius demonstratio similis est demonstrationi Prop. 33. l. 2. cui per hanc suppletur, Corollaria autem iuxta methodum ibi adhibitam facillè quoq; deducuntur, illam vero huc referuavi, vt promptiore non pro colligendis sequentibus Corollarijs lib. 3. ex hac pendentibus eam haberemus. Adhibuit quidem nomen solidi similis, quod per indefinitum numerum parallelorum planorum fuit pariter applicatum lib. 2. ad B. Defin. 8. atramen si vice omnium planorum, seu descriptarum figurarum, substituamus quocumq; plana, seu descriptas figuras, ita vt perimetri descriptarum figurarum iacere intelligantur in superficie ipsius solidi ambiente, intelligemus nihilominus, licet nonnihil diuerso modo, esse idẽ solidum, quod dicitur simile, ac a propria genitrice descriptum, iuxta

iuxta datam regulam, siue secundam illam definitionem absolute, siue per eandem sic modificatam, vt hæc similia solida ab infinitatis conceptu, seu ab indiuisibilium methodo, eximerentur; Non est autem difficile insuper intelligere quadrata solida quorumcūq; planarum figurarum, in ambitu eorundem existentium, esse etiam solida similia, genita ex eisdem figuris, quarum dicuntur quadrata solida, iuxta easdem regulas, iuxta quas quadrata solida dicebantur: & è conuerso solida similia, genita ex quibuscumq; figuris iuxta quasuis regulas, quarum figuræ, à genitricium lineis homologis descriptæ tamquam à lateribus, sint quadrata, esse pariter quadrata solida earundem figurarum iuxta easdem regulas. Igitur ad rem nostram manifestum est, quod quæcumq; solida ad inuicem similia, genita ex figuris lib. 3. hic denuò consideratis, iuxta assumptas regulas (quarum patefacta est ratio quadratorum solidorum) habebunt rationem notam, per quod suppletur Proposit. 34. lib. 3. colligentur autem vt ibi factum est sequentia Corollaria vsq; ad finem eiusdem lib. 3. mutatis tantum læpè dictis nominibus, vbi necesse fuerit, quod enim ibi per omnia quadrata hic per quadrata solida consideratarum figurarum colligetur. Doctrina autem scholij subsequenti etiam pro hac noua methodo subsistit, si tamen vice omnium figurarum, seu omnium planorum, substitutas intelligamus quocumque figuras, seu quocumque plana, cætera enim à methodo indiuisibilium exempta iunt, & hæc sufficiant circa examèn lib. 3. nunc autem Prop. lib. 4. similiter perustrabimus.

THEOREMA XXIII. PROPOS. XXIII.

Asumpta ex schemate Prop. 1. Lib. 4. femiparabola, CHG, cum parallelogrammo, EG, visa tamen etiam illa figura, ostendemus parallelogrammum, EF, sexquialterum esse parabolæ, HCF.

Producta enim diametro, CG, vtcumq; in, V, describatur quadrans circuli, vel ellipsis, HGV, iuxta duas semidiametros coniugatas, HG, GV, & per, H, ducta, EP, parallela, CV, & indefinitè extensa, agantur similiter à punctis, CV, parallele, HG, ipsæ, EC, PV, erunt ergo parallelogramma, EG, GP, EG, quidem circumscriptum femiparabolæ, HCG, & PG, quadrati, HGV, sit insuper quæcumq; MO, ordinatim ad, HG, applicata, regula, CG, quæ

Y y

pro

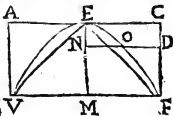
percurreremus. Igitur circa Corollarium p. 1. nihil dicendum est. Prop. 2. autem restauratione non indiget. Prop. 3. similiter. Prop. 4. ostendetur eo modo, quo nos primam demonstrauimus, Corollarium verò deducetur vt ibi, mutatis tamè sepè dictis nominibus &c. ex hac autem ostensa faciliè deducetur prop. 5. cum Cor. mutatis &c. vt etiam prop. 6. cum Cor. p. 7. 8. cum dictis in Scholio. Similiter Prop. 9. 10. cum Cor. mutatis &c. Prop. 11. cum Cor. p. 12. 13. 14. 15. 16. 17. cum Cor. 18. 19. cum Cor. 20. cum Cor. restaurationem minime postulant, cum à methodo indiuisibilium non dependant.

THEOREMA XXIV. PROPOS. XXIV.

EXposito denuò Schemate prop. 21. eiusdem lib. 4. regula eadem, VF, retenta, ostendemus quadratum solidum, AF, duplum esse quadrati solidi parabolæ, VEF, & hoc esse sexquialterum quadrati solidi trianguli, VEF.

Estò quòd, ND, secet, FF, in, I, igitur rectangulum, DNI, est æquale quadrato, NO, quod & circa quascumq; applicatas con-

tingere concludemus, ergo rectangulum solidum sub parallelogrammo, CM, & triangulo, EMP, erit æqualiter analogum quadrato solido semiparabolæ, EMF, quadratum solidum autem, CM, ad rectangulum solidum sub eodem parallelogrammo, CM, & sub triangulo, EMP, est vt, CM, ad EMP, idest duplum, ergo quadratum solidum, CM, duplum erit quadrati solidi, EMP, & consequenter quadratum solidum, AF, duplum etiam erit quadrati solidi parabolæ, VEF, vnde & quadratum solidum, VEF, sexquialterum erit quadrati solidi, E



VF, quod &c. Cor. 1. 13. huius.

ANNOTATIO.

Per suprapositam prop. suppletur prop. 21. prop. 22. verò deducetur eodem modo mutatis nominibus &c.

THEOREMA XXV. PROPOS. XXV.

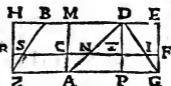
Asumpta ex Schemate prop. 23. semiparabola, NOH, cum frusto, MROH, & parallelogrammo, VO, ac re-

Y y 2 cta,

THEOREMA XXVI PROPOS. XXVI.

IN figura prop. 46. ostendemus, regula eadem retenta, re-
ctangulum solidum sub, HP, PE, duplum esse rectangu-
li solidi sub, BZPD, DPG.

Sumatur .n. de illius schemate
parallelogrammum, HG, cum fru-
sto parabolæ, BZGD, & rectis, R
F, DP, fiat autem insuper, AP, R
æqualis, PD, & ducta, AM, paral-
lela, DP, iungatur, AD, secans, C
T, in, N. Cum ergo in dicta prop.



independentem ab indiuisibilibus methodo, cōcludatur rectangulū
RTF, ad, STI, esse vt, PD, ad, DT, idpsum & hic tanquā demonstra-
tū recipimus, sed, PD, ad, DT, hoc est, CT, ad, TN, est vt quadra-
tum, CT, ad rectangulum, CTN, ergo rectangulum, RTF, ad, STI,
erit vt quadratum, CT, ad rectangulum, CTN, est autem, RF, vt-
cumq; ducta parallela, ZG, ergo modo consueto ostendemus soli-
dum rectangulum sub, HP, PE, esse proportionaliter analogum
quadrato solido, MP, sicut rectangulum solidum sub, BZPD, DP
G, esse proportionaliter analogum rectangulo solido sub, MP, PA
D, & tandem concludemus hæc solida esse proportionalia, idest
rectangulum solidum sub, HP, PE, ad rectang. solidum sub, BZPD,
DPG, esse vt quadratum solidum MP, ad rectangulum solidum sub,
MP, PDA, idest vt, MP, ad, PDA, idest concludemus rectangulum
solidum sub, HP, PE, duplum esse rectanguli solidi sub, BZPD, PD
G, quod ostendendum erat.

Cor. 1. 13.
hu. 15.

A N N O T A T I O.

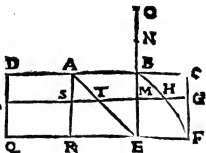
Prop. 46. igitur restaurata, stylo nostro sequentium propositio-
num demonstrationes prosequemur ab hac vsque ad 51. inclu-
siuè, quæ quidem veritatem habere comperitur ex prop. 22. hu. 15.
Scholium autem sequens retineatur vt ibi, substituendo tamen no-
minum omnium similibus figurarum hoc aliud, nempe quocunq;
similes figuras &c. vt in examine lib. 3. animaduersum est. His ve-
rò prædemonstratis subsequētia Corollaria vsq; ad finem lib. 4. so-
lita nominum mutatione facta, cuncta facillimè deducuntur per
iam ostēta circa quadrata, seu rectangula solida sub talibus, & ta-
libus.

libus figuris, in antecedentibus prop. consideratis. Appendix autem Cor. 6 restauratione minimè indigere manifestum est. Et hæc circa prop. lib. 4. adnotasse sufficiat, reliquum est, vt ad lib. 5. examinandum nos conferamus.

THEOREMA XXVII. PROPOS. XXVII.

IN Schemate prop. 1. lib. 5. regula eadem retenta, ostendamus quadratum solidum parallelogrammi, AF, ad quadratum solidum hyperbolæ, DBE, esse vt, OE, ad compositam ex, NB, & $\frac{1}{2}$. BE.

Assumatur n. ex eo parallelogrammum, CE, cum semihyperbola, BBE, & recta, OE, necnon, MG, quæcumq; ex ordinatis applicatis ad diametrum, BE, extendantur autem, CB, FE, & fiant BD, EQ, singulæ æquales ipsi, EP, O, necnon, RE, AB, singulæ æquales ipsi, EB, & iungantur, DQ, AR, AE, quas, GM,



39. & sch.
40. l. 1.

indefinitè quoq; producta secet in punctis, P, S, T. Erunt ergo, DR, DE, AE, parallelogramma. Quoniam verò quad. EF, ad quad. MH, est vt rectang. OEB, ad, OMB, hoc est vt rectangulum, QER, ad rectangulum, PTS, permutando quadratum, FE, ad rectangulum, QER, erit vt quadratum, HM, ad rectangulum, PTS, quod & in cæteris ostendemus, ergo quadratum solidum, BEF, & rectangulum solidum sub trapezio, DQEA, & triangulo, AER, erunt proportionaliter analogæ, ac in proportione quadrati, FE, & rectanguli, QER. Consimili modo probabimus quadratum solidum, CE, esse æqualiter analogum rectangulo solido sub, QB, BR, & ad ipsum pariter esse in proportione quadrati, EF, ad rectangulum, QER, ergo dicta solida proportionalia erunt, & permutâdo quadratû solidum CE, ad quad. solidû, BEF, erit vt rectangulum solidum sub, QB, BR, ad rectangulum solidum sub, DQEA, ARE, hoc est vt, QE, ad compositam ex $\frac{1}{2}$. QR, & $\frac{1}{2}$. RE, hoc est vt, OE, ad compositam ex, NB, (quæ est dimidia, BO,) & $\frac{1}{2}$. BE, igitur, viso schemate dictæ prop. 1. quadratum solidum, AF, ad quadratum solidum, DBE, erit vt, OE, ad compositam ex, NB, & $\frac{1}{2}$. BE, quod demonstrare oportebat.

17. huius.

AN.

ANNOTATIO.

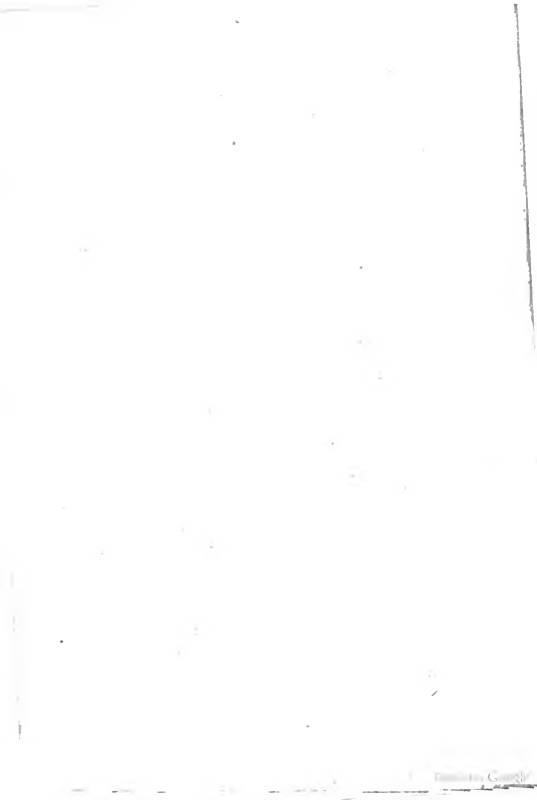
Per hanc suppletur prior parti prop. 1. posterior verò ostendetur vt ibi, mutatis consuetis nominibus &c. sicut etiam prop. 2. Consimili autem methodo adhibita in præsentis prop. ostendemus quad. solidum, GE, ad quadratum solidum, HMEF, in superiori fig. (hoc est in figura p. 3. lib. 5. quadratum solidum, SE, ad quadratum solidum, HDFG,) esse vt rectangulum solidum sub, QM, MR, ad rectangulum solidum sub trapezijs, PQET, SRET, hoc est vt rectangulum, QER, ad rectangulum sub, QE, ST, vna cum rectangulo sub composita ex 1. PS, & 2. TM, & sub, TM, idest viso schemate p. 3. vt rectangulum, OEN, ad rectangulum sub, OE, & NM, ^{1. h. b. is,} vna cum rectangulo sub composita ex 1. NO, & 2. ME, & sub, ME; posterior pars autem eiusdem prop. 3. deducetur vt ibidem, mutatis nominibus &c. Sicut & omnes prop. à 4. vsque ad 20. inclusivè, cum earum Corollarijs. In prop. 21. verò patebit quadratum solidum, OP, visa illius figura æquari rectangulo solido sub, OLS, OVCS, figuris, regula, DC, etenim exhibi demonstratis liquidò apparet hæc esse solida æqualiter analogæ iuxta dictam regulam, ex quo de inde reliqua concludentur mutatis nominibus &c. sicuti & Cor. In prop. 22. figura sic est corrigenda, debet enim, EC, hinc inde produci, vt incidat asymptotus, OY, OP, versus eam productis, in, S, I, quæ litteræ defunt, cæterum prop. ostendetur vt ibidem mutatis &c. simul cum Corollarijs, necnon prop. 23. 24. 25. 26. 27. 28. cum Cor. & 29. cum Cor. Prop. 30. autem patet ex dictis. His deniq; restauratis, ac sequenti scholio modificato, iuxta quod dictum fuit in examine lib. 3. & 4. sequentia Corollaria vsq; ad finem eiusdem l. ^{22. huius,} 3. per quadratorum solidorum prædemonstrata, similiter, vt in præ- ^{Ar not. 22.} fatis libris, colligentur, hæc autem pro restauratione lib. 5. dicta ^{& 26. huius,} sint satis. ^{it. 5.}

Quoad lib. 6. verò patet in eo traditas demonstrationes, quæ ex methodo indivisibilium dependebant, ibidè fuisse restauratas. Illæ autem propositiones, in quibus adhibentur aliquando nomina omnium quadratorum talium, vel talium figurarum, adhuc subsistent, si illis nomina quadratorum solidorum earundem figurarum substituiamus, hæc, n. sola mutatione facta, cætera omnia manent in suo robore, vt in eo libro innuitur in scholio prop. 20. ac superius sæpè sæpius repetitum fuit.

Finis Septimi Libri.

147 5 12 17

AOI 1462217



D. 18.

18
7